

EXERCICES
DE CALCUL INTÉGRAL.

GEORGE W. B. BROWN

DEPT. OF AGRICULTURE

EXERCICES

DE

CALCUL INTÉGRAL

SUR

DIVERS ORDRES DE TRANSCENDANTES

ET SUR LES QUADRATURES;

PAR A. M. LE GENDRE, Membre de l'Académie royale des
Sciences et du Bureau des Longitudes, de la Société royale de
Londres, etc.

TOME TROISIÈME.

PARIS,

M^{ME} V^E COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,
rue du Jardinnet, n° 12, quartier Saint-André-des-Arcs.

1816.

QA311
LA
v.3
math.
dept.

EXERCISES

30. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')
 σ_{11} . $27(100 + \frac{1}{2} \phi(1103 - 7541 \pi))$

31. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

32. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

33. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

34. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

35. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

36. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

37. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

38. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

39. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

40. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

41. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

42. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

43. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

44. 1.25. $20, 24$
 σ_{11} . $27\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$ (20')
 σ_{11} . $54, 65$ (15')

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL.



MÉTHODES DIVERSES

POUR LA CONSTRUCTION

DES TABLES ELLIPTIQUES, x)

*Suivies de la Table générale des Fonctions complètes, de
la Table particulière pour le module $\sin 45^\circ$, etc.*

JUILLET 1816.

J. M.
J. M. Stirlingham
Math. Dept.

DA311
14
V.3
MATHE-
STAT.
LIBRARY

EXERCICES

DE CALCUL INTÉGRAL.

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES.

Nous avons fait voir dans tout le cours de cet Ouvrage, et principalement dans la première Partie, que la théorie des fonctions elliptiques mérite d'être cultivée plus qu'elle ne l'a été jusqu'à présent, non-seulement à cause des belles propriétés dont jouissent ces fonctions et qui leur assignent un rang distingué dans l'analyse, mais à cause des applications nombreuses que cette théorie peut recevoir, et qui contribueront au perfectionnement du Calcul intégral, en donnant aux Géomètres les moyens de continuer leurs recherches sur beaucoup de questions importantes, sans être arrêtés par cette espèce de barrière qu'ils n'osaient plus franchir quand ils avaient dit que le problème était réduit aux quadratures.

Mais cette nouvelle branche d'analyse ne pourra rendre tous les services qu'on peut attendre d'elle, que lorsqu'on aura construit des Tables au moyen desquelles les fonctions elliptiques pourraient être évaluées dans tous les cas avec un degré d'approximation convenable, et sans exiger des calculs trop pénibles.

Il ne peut être question de réduire en Tables les fonctions de la troisième espèce, puisqu'elles contiennent deux constantes arbitraires, outre la variable principale, et qu'ainsi il faudrait que ces Tables fussent à triple entrée, chose tout à fait inexécutable. Il suffit d'avoir prouvé, relativement à ces fonctions, 1°. que le cas des paramètres imaginaires se réduit toujours à celui des paramètres

réels; 2°. que les fonctions complètes de ce genre s'expriment toujours par des fonctions de la première et de la seconde espèce; 3°. qu'il y a une infinité de cas particuliers, déterminables algébriquement, où une semblable réduction peut avoir lieu; 4°. qu'on peut pareillement trouver une infinité de cas où une fonction donnée de troisième espèce, est réductible indéfiniment à la première espèce; 5°. enfin que dans tous les cas, la valeur aussi approchée qu'on voudra de toute fonction de troisième espèce, peut être trouvée par des séries régulières et toujours convergentes (*).

Toute la difficulté se réduit donc à construire des Tables qui représentent les fonctions de première et de seconde espèces, calculées pour un nombre déterminé de valeurs, tant du module c que de l'amplitude ϕ , afin d'en pouvoir déduire par interpolation, les valeurs des mêmes fonctions correspondantes à toutes valeurs données des quantités c et ϕ . Le calcul d'un pareil système de Tables, et en général le perfectionnement des formules d'approximation, sont l'objet des recherches suivantes, que nous allons indiquer sommairement.

Dans le § I on donne les formules nécessaires pour calculer jusqu'à 14 décimales, les logarithmes des fonctions complètes E^1c , F^1c , et on explique la construction de la Table I. Ce même paragraphe contient quelques théorèmes nouveaux sur les fonctions complètes, et sur l'échelle des modules dont elles dépendent.

Le § II offre deux méthodes générales et entièrement nouvelles pour réduire en Table toute intégrale proposée de la forme $\int \sin \phi$.

Le § III contient l'application de ces méthodes aux fonctions elliptiques $E = \int \Delta d\phi$, $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$. On a pris pour exemple la construction de la Table II qui se rapporte au module $c = \sin 45^\circ$.

Le § IV contient une autre méthode purement trigonométrique pour construire les Tables des fonctions E et F .

Dans le § V on donne des formules qui expriment d'une manière très-simple les valeurs des fonctions $E(c, \phi)$, $F(c, \phi)$, lorsque l'amplitude ϕ n'excède pas une limite donnée.

(*) Voyez première Partie, § XXIII, XXIV et XXV.

Dans le § VI on indique divers moyens d'étendre à un plus grand nombre de cas l'usage des formules précédentes; mais les calculs deviennent quelquefois plus longs que ceux qu'exige la méthode générale d'approximation. On fait voir comment les formules de celle-ci peuvent être simplifiées dans un cas fort étendu.

Enfin dans le § VII, on donne quelques développemens nouveaux sur la méthode connue qui consiste à exprimer les fonctions F et E par des séries ordonnées suivant les sinus des angles multiples de 2ϕ .

§ I. Du Calcul des Fonctions complètes $F'c$, $E'c$.

1. Nous avons déjà donné dans la première Partie, art. 82 et suiv., des formules pour simplifier le calcul des fonctions complètes, lorsque le module est peu éloigné de l'une de ses limites; nous allons faire voir maintenant quels sont les moyens de faire ces calculs dans tous les cas, avec un degré d'approximation déterminé. Nous supposerons en général qu'on veut calculer les logarithmes des fonctions dont il s'agit jusqu'à 14 décimales, parce que ce nombre est celui que comportent les Tables les plus étendues qui aient été publiées jusqu'à présent, savoir, l'*Arithmetica Logarithmica* de Briggs, et la *Trigonometria Britannica* du même auteur. Les exemples que nous apporterons dans cette hypothèse feront juger aisément des simplifications dont les calculs sont susceptibles, lorsqu'on ne voudra obtenir que dix ou un moindre nombre de décimales exactes.

On verra bientôt que les mêmes données qui servent à calculer les fonctions $F'c$, $E'c$, servent aussi à calculer leurs complémens $F'b$, $E'b$. C'est pourquoi nous ne considérerons que des valeurs de c moindres que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire que nous supposerons toujours l'angle du module plus petit que 45° . S'il était plus grand, on échangerait entr'elles les quantités c et b , afin que c désignât toujours la plus petite des deux.

Mais avant de nous occuper de ces approximations, nous croyons devoir ajouter quelques théorèmes nouveaux à ceux que nous avons donnés, pag. 98 et suiv. de la première Partie, sur les fonctions $F'c$, $E'c$, et leurs complémens $F'b$, $E'b$.

2. Considérons les deux suites correspondantes

$$\begin{aligned} 1. & \dots c''', c'', c', c, c^{\circ}, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ} \dots 0, \\ 0. & \dots b''', b'', b', b, b^{\circ}, b^{\circ\circ}, b^{\circ\circ\circ} \dots 1. \end{aligned}$$

Dans la première on distingue deux parties ; l'une à compter de c vers la droite, se compose des modules décroissans $c, c^{\circ}, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ}, \dots$ dont la limite est zéro ; l'autre à compter de c vers la gauche, offre la série des modules croissans c, c', c'', c''', \dots dont la limite est l'unité. Ces deux parties ne forment qu'une seule et même suite de termes liés entr'eux par une seule et même loi qui consiste en ce que si x, y sont deux termes consécutifs, on a $x = \frac{2\sqrt{y}}{1+y}$, et réciproquement $y = \frac{1 - \sqrt{1-xx}}{1 + \sqrt{1-xx}}$. On peut donc en partant d'un terme quelconque de la série, former successivement tous les autres termes, tant dans le sens où la série est décroissante que dans le sens contraire, la limite étant zéro dans le premier cas, et 1 dans le second.

La seconde série qui répond terme à terme à la première, est composée des modules complémentaires, ensorte que si c'' et b'' sont deux termes correspondans dans les deux séries, on aura toujours

$$(c'')^2 + (b'')^2 = 1.$$

Au reste la série inférieure est formée suivant la même loi que la série supérieure, avec cette seule différence qu'elle est croissante dans le sens où l'autre est décroissante, et réciproquement. Nous avons adopté le signe $^{\circ}$ pour indiquer la diminution des c ; ainsi on a $c^{\circ} < c, c^{\circ\circ} < c^{\circ}, c^{\circ\circ\circ} < c^{\circ\circ}$, etc. De même nous avons adopté le signe $'$ pour indiquer l'augmentation des c , de sorte qu'on a $c' > c, c'' > c'$, etc. Ces signes auront un effet contraire sur les complémens ; ensorte qu'on aura $b^{\circ} > b, b^{\circ\circ} > b^{\circ}$, etc., $b' < b, b'' < b'$, etc. ; et d'après cette observation, toutes les fois qu'il y aura lieu d'échanger entr'elles les lettres c et b , on devra en même temps changer les signes $^{\circ}$ en $'$, et réciproquement.

5. Il résulte de la loi de nos deux suites, que si x et y sont deux termes consécutifs de la première, p et q les deux termes corres-

pondans de la seconde, on aura généralement $xq = 2\sqrt{py}$; ce qui donne dans un sens et dans l'autre, ces deux séries d'équations :

$$cb^{\circ} = 2\sqrt{(c^{\circ}b)}, \quad c^{\circ}b^{\circ\circ} = 2\sqrt{(c^{\circ\circ}b^{\circ})}, \quad c^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ} = 2\sqrt{(c^{\circ\circ\circ}b^{\circ\circ})}, \quad \text{etc.}, \\ c'b = 2\sqrt{(cb')}, \quad c''b' = 2\sqrt{(c'b'')}, \quad c'''b'' = 2\sqrt{(c''b''')}, \quad \text{etc.}$$

On remarque d'ailleurs dans celle-ci que l'échange des lettres c et b peut se faire en même temps que celui des signes $^{\circ}$ et $'$, et qu'alors l'une des deux séries se déduit de l'autre.

4. La fonction $F'c$ peut s'exprimer de deux manières; l'une au moyen des modules décroissans $c, c^{\circ}, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ}$, etc.; l'autre au moyen des modules croissans $c, c', c'',$ etc.

La première expression est, suivant l'art. 65, $F'c = \frac{\pi}{2} K$, où l'on a

$$K = \frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}} \cdot \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}{c^{\circ\circ}} \cdot \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ\circ\circ}}}{c^{\circ\circ\circ}} \dots$$

Mais les formules de l'article précédent donnent $\frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{c} = \frac{b^{\circ}}{\sqrt{b}}$, $\frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}} = \frac{b^{\circ\circ}}{\sqrt{b^{\circ}}}$, etc.; ainsi on aura plus simplement

$$K = \sqrt{\left(\frac{1}{b} \cdot b^{\circ} b^{\circ\circ} b^{\circ\circ\circ} \dots \text{etc.}\right)},$$

où l'on se souviendra que la suite $b, b^{\circ}, b^{\circ\circ}, b^{\circ\circ\circ}$, etc. converge rapidement vers une limite égale à l'unité.

La seconde expression, d'après les formules des art. 45 et 68, est $F'c = \frac{K'}{2^{\mu}} \log \frac{4}{b^{\mu}}$, où l'on a

$$K' = \sqrt{\left(\frac{1}{c} \cdot c' c'' c''' \dots\right)} = \frac{2\sqrt{b'}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{b''}}{b'} \cdot \frac{2\sqrt{b'''}}{b''} \dots \frac{2\sqrt{b^{\mu}}}{b^{\mu-1}},$$

et où l'on suppose b^{μ} assez petit pour que $1 - c^{\mu}$ soit négligeable.

Egalant entr'elles les deux valeurs de $F'c$, on aura cette formule générale

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{b' \dots b^{\circ\circ\circ} b^{\circ\circ} b^{\circ} b b' b'' \dots b^{(\mu-1)}}{b^{\mu}}\right)} = \log \frac{4}{b^{\mu}},$$

où l'on voit que la suite $b^{\circ\circ\circ} b^{\circ\circ} b^{\circ} b b' b'' \dots$ doit être prolongée à

d'où l'on tire, en supposant $1 - b^\mu$ négligeable,

$$(b^\circ b^{\circ\circ} b^{\circ\circ\circ} \dots b^{\mu-1}) (c c^\circ c^{\circ\circ} \dots c^{\mu-1}) = \frac{b}{c} \cdot 4^\mu c^\mu;$$

changeant c en b et réciproquement, ce qui oblige d'échanger en même temps les signes $^\circ$ et $'$, on aura

$$(c' c'' c''' \dots c^{\mu-1}) (b b' b'' \dots b^{\mu-1}) = \frac{c}{b} \cdot 4^\mu b^\mu.$$

Multipliant ces deux équations entr'elles, il viendra

$$\left(\frac{c' \dots c''' c' c' c^\circ c^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ} \dots c^{(\mu-1)}}{c^\mu} \right) \left(\frac{b' \dots b^{\circ\circ\circ} b^{\circ\circ} b^\circ b b' b'' b''' \dots b^{(\mu-1)}}{b^\mu} \right) = 4^{2\mu}.$$

Multipliant de même les deux équations du n° 4, et comparant les deux produits, on en tire ce théorème remarquable,

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{4^\mu} \cdot \log \frac{4}{c^{\circ\mu}} \cdot \log \frac{4}{b'^\mu}.$$

Ainsi $c^{\circ\mu}$ et b'^μ étant deux termes très-petits, pris dans les deux suites générales à égales distances des termes moyens c et b , la relation entre ces termes est telle que le produit de $\log \frac{4}{c^{\circ\mu}}$ par $\log \frac{4}{b'^\mu}$ est égal à $\frac{\pi^2}{4} \cdot 4^\mu$. Cette équation n'est qu'approchée; mais l'erreur diminuera de plus en plus à mesure que μ augmentera, et en général elle sera du même ordre que le carré des quantités $c^{\circ\mu}$, b'^μ .

Dans le cas de $c = b = \sin 45^\circ$, on a également $c^{\circ\mu} = b'^\mu$, et de là résulte $\log \frac{4}{c^{\circ\mu}} = \frac{\pi}{2} \cdot 2^\mu$, comme dans l'art. 4.

7. On peut parvenir plus directement à l'équation de l'article précédent. En effet faisant

$$K = \sqrt{\left(\frac{b^\circ b^{\circ\circ} b^{\circ\circ\circ} \dots b^{\circ\mu}}{b} \right)}, \quad K' = \sqrt{\left(\frac{c' c'' c''' \dots c'^\mu}{c} \right)},$$

2

on a

$$F'c = \frac{\pi}{2} \cdot K = \frac{K'}{2^\mu} \log \frac{4}{b'^\mu},$$

$$F'b = \frac{\pi}{2} \cdot K' = \frac{K}{2^\mu} \log \frac{4}{c'^\mu};$$

donc en multipliant ces équations, il viendra

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{1}{4^\mu} \log \frac{4}{b'^\mu} \cdot \log \frac{4}{c'^\mu}.$$

8. On peut, pour plus de simplicité, supposer que c est déjà assez petit pour que $1 - b$ ou $\frac{1}{2} c^2$ soit négligeable. Alors l'équation de l'art. 4 donnera

$$\log \frac{4}{c} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{c' c'' c''' \dots}{c} \right)}.$$

Cette formule offre le moyen d'exprimer directement le logarithme d'un nombre quelconque par le rapport de la circonférence au diamètre, savoir, en multipliant ce rapport π par $\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{c} c' c'' c''' \dots \right)}$, quantité qui se déduit du nombre donné, au moyen de quelques extractions de racine quarrée.

9. Veut-on, par exemple, avoir l'expression de $\log 2$, on fera $\frac{4}{c} = 2^m$, ayant soin de prendre m assez grand pour que les quantités de l'ordre c^2 ou $(\frac{1}{2})^{2m-4}$ soient négligeables.

Ainsi en faisant $m = 10$, les erreurs de la formule seront de l'ordre $(\frac{1}{2})^{16}$; on aura donc, à moins d'un 60000^{ème}, la valeur de $\log 2$ par l'équation

$$10 \log 2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{c' c'' c''' c^{1v}}{c} \right)},$$

dans laquelle il faut substituer les valeurs $c = (\frac{1}{2})^8$, $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c} = \frac{32}{257}$, $c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'} = \frac{8\sqrt{514}}{289}$, $c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''}$, $c^{1v} = \frac{2\sqrt{c'''}}{1+c'''}$. On borne cette suite à c^{1v} , parce que la différence $1 - c^v$ est beaucoup plus petite que l'erreur de la formule.

Le résultat donne en effet $\log 2 = 0.693150$, ce qui est conforme au degré de précision qu'on voulait obtenir.

En faisant $m = 20$, on aurait un terme de plus à calculer, et on obtiendrait au moins dix décimales exactes.

10. Puisqu'on a $F'c = \frac{\pi}{2} K$ et $F'b = \frac{K}{2^\mu} \log \frac{4}{c^\mu}$, il est facile de trouver la valeur du module c , tel qu'on ait $F'b = nF'c$; pour cela on aura l'équation $\frac{1}{2} \pi n \cdot 2^\mu = \log \frac{4}{c^\mu}$, qui exprimée en logarithmes des Tables, donne

$$\log \frac{4}{c^\mu} = \frac{1}{2} \pi mn \cdot 2^\mu.$$

Cette équation déterminera directement c^μ , si toutefois μ est connu; or c^μ étant connu, on en déduira aisément les modules précédens $c^{\mu-1}$, $c^{\mu-2}$, et enfin c , par la méthode de l'art. 59.

Quant à la valeur de μ , elle sera égale à 4, depuis $c = \sin 45^\circ$ jusqu'à $c = \sin 26^\circ 34'$, c'est-à-dire depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 1\frac{1}{3}$, à peu près.

Elle sera égale à 3 depuis $c = \sin 26^\circ 34'$ jusqu'à $c = \sin 3^\circ 11'$, ou depuis $n = 1\frac{1}{3}$ jusqu'à $n = 2\frac{2}{3}$.

Enfin on aura $\mu = 2$ depuis $n = 2\frac{2}{3}$ jusqu'à $n = 5\frac{1}{3}$, et $\mu = 1$ si on a $n > 5\frac{1}{3}$.

Ces résultats sont fondés sur la limite jusqu'à laquelle il convient de prolonger la suite des modules c , c° , $c^{\circ\circ}$, etc., pour obtenir un même nombre de décimales exactes que nous avons fixé à 14. Nous allons faire voir comment on détermine cette limite.

11. Si l'on est parvenu dans l'hypothèse dont il s'agit, à un terme b^μ tel que $-\log b^\mu$ soit moindre qu'une demi-unité décimale du 14^e ordre, alors on pourra regarder $\log b^\mu$ comme nul; et à plus forte raison, les termes suivans $\log b^{\mu+1}$, $\log b^{\mu+2}$, etc. Ainsi $b^{\mu-1}$ sera le dernier des modules b dont il faut tenir compte.

La série des modules c , c° , $c^{\circ\circ}$, etc. comprend toujours un terme de plus: elle devra par conséquent être terminée au module c^μ . La

raison en est qu'on a alors $c^\mu = \left(\frac{c^{\mu-1}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b^{\mu-1}}$, et qu'ainsi le log de $b^{\mu-1}$ est nécessaire pour composer la valeur de $\log c^\mu$.

Passé le terme c^μ , il n'y a pas lieu de considérer le suivant $c^{\mu+1}$, parce qu'on aura sans erreur sensible $c^{\mu+1} = (\frac{1}{2} c^\mu)^2$, et qu'ainsi la quantité $\frac{1}{2^\mu} \log \frac{4}{c^\mu}$ ne change pas en mettant $\mu + 1$ à la place de μ .

Cela posé, il est facile de voir qu'on connaîtra les limites des différens cas, en commençant par déterminer la valeur du module c qui donne pour son complément $\log b = -\frac{1}{2} (10)^{-14}$.

Le module supposé c étant extrêmement petit, on a d'une manière suffisamment exacte $b = 1 - \frac{1}{2} c^2$ et $\log b = -\frac{1}{2} mc^2$; donc $c^2 = M (10)^{-14}$ et $c = (10)^{-7} \sqrt{M}$, ou

$$\log c = 3.1811078.$$

Si on assimile c au sinus d'un arc, on trouvera que cet arc n'est qu'une fraction de seconde et qu'on a $c = \sin 0'' 0313$.

Il faut maintenant partir de ce module très-petit pour former la suite des modules croissans c, c', c'', c''' , etc.; c'est un calcul qu'on pourra faire d'une manière suffisamment exacte pour notre objet, par une Table à sept décimales seulement.

On aura d'abord $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, ou simplement $c' = 2\sqrt{c}$, ce qui donne $\log c' = 6.8915839$ et $c' = \sin 0^\circ 2' 40'' 70$.

Pour avoir c'' je fais $c' = \tan^2 \frac{1}{2} \theta$, j'ai $\log \tan \frac{1}{2} \theta = 8.4457919$, $\frac{1}{2} \theta = 1^\circ 35' 55'' 78$, $\theta = 3^\circ 11' 51'' 56$; donc $c'' = \sin 3^\circ 11' 51'' 56$ et $\log c'' = 8.7464836$.

Si on fait de nouveau $c'' = \tan^2 \frac{1}{2} \theta'$, on aura $\log \tan \frac{1}{2} \theta' = 9.3732418$, $\frac{1}{2} \theta' = 13^\circ 17' 18'' 84$, $\theta' = 26^\circ 34' 37'' 68$; donc $c''' = \sin 26^\circ 34' 37'' 68$ et $\log c''' = 9.6506981$.

Soit enfin $c''' = \tan^2 \frac{1}{2} \theta''$, on aura $\log \tan \frac{1}{2} \theta'' = 9.8253490$, $\frac{1}{2} \theta'' = 33^\circ 46' 40'' 15$, $\theta'' = 67^\circ 33' 20'' 30$; donc $c^{iv} = \sin 67^\circ 33' 20'' 30$ et $\log c^{iv} = 9.9657898$.

12. Il résulte des calculs précédens, 1°. que depuis $c = \sin 67^\circ 33'$

jusqu'à $c = \sin 26^\circ 34'$, on devra se borner à calculer les quatre termes b , b° , $b^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ}$, et les cinq c , c° , $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ\circ}$;

2°. Que depuis $c = \sin 26^\circ 34'$ jusqu'à $c = \sin 3^\circ 11'$, on n'aura à calculer que les trois termes b , b° , $b^{\circ\circ}$, et les quatre c , c° , $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$;

3°. Que depuis $c = \sin 3^\circ 11'$ jusqu'à $c = \sin 0^\circ 2' 40''$, il suffira de calculer les deux termes b , b° , et les trois c , c° , $c^{\circ\circ}$;

4°. Que depuis $c = \sin 0^\circ 2' 40''$ jusqu'à $c = \sin 0'' 0313$, il suffira de calculer le terme b , et les deux c , c° ;

5°. Enfin qu'au-dessous de $c = \sin 0'' 0313$, on n'a besoin que du seul terme c .

Tel est le nombre des termes de la série des modules et de celle de leurs complémens, qu'il sera nécessaire de calculer dans les différens cas, pour obtenir 14 décimales exactes dans les logarithmes des fonctions F^1c , E^1c , F^1b , E^1b . Nous allons faire voir maintenant comment les calculs de ces modules peuvent être effectués de la manière la plus facile.

Formation de l'échelle des modules.

13. Connaissant les logarithmes de c et b , il s'agit de trouver ceux des termes suivans c° et b° . Pour cela, soit $c^\circ = x$, l'équation $b^\circ c = 2\sqrt{(bc^\circ)}$ donnera $x = \frac{(\frac{1}{2}c)^2}{b}(1-x^2)$, et en faisant $p = \frac{(\frac{1}{2}c)^2}{b}$, la valeur de x développée en série régulière sera

$$x = p - \frac{1}{4} \cdot 4p^3 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot 16p^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 64p^7 + \text{etc.} = 1 - 1 + 2 - 5 +$$

Mais il importe de calculer directement $\log x$; or la valeur

$$x = \frac{\sqrt{(1+4p^2)} - 1}{2p} \text{ donne}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p\sqrt{(1+4p^2)}} = \frac{dp}{p} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 4p^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 16p^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 64p^6 + \text{etc.} \right),$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\log x = \log p - p^2 + \frac{3}{2} \cdot p^4 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4p^6}{3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8p^8}{4} - \text{etc.}$$

Ces logarithmes sont hyperboliques; pour les changer en logarithmes vulgaires, il faut multiplier les parties algébriques par m ;

c'est pourquoi faisant

$$P = mp^2 - \frac{3}{2} mp^4 + \frac{10}{3} mp^6 - \text{etc.},$$

on aura $\log x$ ou

$$\log c^\circ = \log p - P \quad \text{et} \quad \log b^\circ = -\frac{1}{2} P;$$

ainsi on connaîtra à la fois $\log c^\circ$ et $\log b^\circ$.

La même formule servira à calculer les termes $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$, au moyen des deux précédens c° , b° , et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait formé l'échelle entière des modules dans les limites déterminées par l'art. 12.

Nous remarquerons qu'en supposant toujours qu'on veuille obtenir 14 décimales exactes, la valeur de P ne comprendra jamais plus de trois termes; on trouvera même que le troisième ne devient nécessaire que lorsque c est peu éloigné de la limite $\sin 45^\circ$; dans les autres cas, il suffira des deux premiers termes $mp^2 - \frac{3}{2} mp^4$, et souvent du seul premier terme mp^2 .

14. Si la première valeur du module c est donnée sous la forme $c = \sin \theta$, et qu'en même temps l'angle θ , ainsi que sa moitié, se trouve directement et sans interpolation dans les Tables, alors on aura immédiatement les quatre modules c , b , c° , b° , par les formules

$$c = \sin \theta, \quad b = \cos \theta, \quad c^\circ = \tan^2 \frac{1}{2} \theta, \quad b^\circ = \frac{\sqrt{b}}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta}.$$

On calculera ensuite les termes $c^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ}$ en les déduisant des termes précédens c° , b° , par les formules de l'article précédent. C'est ainsi qu'on a procédé dans les calculs qui ont servi à former la Table générale des fonctions $E'c$, $F'c$ dont nous parlerons bientôt.

15. Si la valeur de c est donnée en nombres rationnels assez simples, il pourra être facile de trouver les valeurs logarithmiques de b , c° , b° au moyen des formules

$$b^2 = (1-c)(1+c), \quad c^\circ = \frac{1-b}{1+b} = \frac{c^2}{(1+b)^2}, \quad b^\circ = \frac{2\sqrt{b}}{1+b},$$

et pour cet effet on emploiera la Table connue qui donne jusqu'à 15 ou 20 décimales, les logarithmes des nombres de 1 à 1161, ou même de 1 à 1200. Les calculs seront encore plus faciles si la valeur de b est donnée immédiatement en nombres simples.

Si on ne connaît que $\log c$, dont le double sera $\log c^2$, on cherchera dans une Table ordinaire à sept décimales, un nombre qui approche de c^2 jusqu'à la sixième ou la septième décimale; on transformera ensuite cette valeur en fraction continue, afin d'obtenir une fraction ordinaire exprimée en nombres assez simples qui approche beaucoup de la valeur de c^2 . Cela posé, on appliquera la formule suivante qui sert à trouver facilement $\log(1+A)$ ou $\log(1-A)$, lorsqu'on connaît $\log A$:

$$\log A = \log a + r,$$

$$\log(1 \pm A) = \log(1 \pm a) \pm \frac{ar}{1 \pm a} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}Mr}{1 \pm a}\right);$$

et pour faciliter le calcul de cette formule, on fera

$$r' = \frac{r}{1 \pm a}, \quad \log R = la + lr' + \frac{1}{2}r',$$

et on aura

$$\log(1 \pm A) = \log(1 \pm a) \pm R.$$

Par le moyen de $\log c^2$, on connaîtra donc $\log(1-c^2)$, ou $2 \log b$; ensuite il faudra trouver $\log(1+b)$, ce qui se fera par l'application de la même méthode. Enfin connaissant $\log(1+b)$, on aura immédiatement les logarithmes de c^0 et b^0 , par les formules

$$c^0 = \frac{c^2}{(1+b)^2}, \quad b^0 = \frac{2\sqrt{b}}{1+b}.$$

16. Si on ne veut pas pousser l'approximation au-delà de dix décimales, le calcul des premiers modules se fera sans difficulté par les Tables de Vlacq ou de Wega, en faisant les interpolations nécessaires, et ayant égard aux secondes différences. On peut à cet effet suivre deux méthodes différentes.

1°. Etant donné $\log c$ ou $\log \sin \theta$, on cherchera l'angle θ avec tout le degré d'exactitude que la Table comporte, c'est-à-dire en calculant les fractions de seconde jusqu'à la cinquième décimale au moins; θ étant connu, on aura par les interpolations ordinaires, les logarithmes des quantités b , c^0 , b^0 , savoir: $b = \cos \theta$, $c^0 = \tan^2 \frac{1}{2} \theta$, $b^0 = \frac{2\sqrt{bc^0}}{c}$.

Ces calculs pourraient être faits de la même manière, lorsqu'il

s'agira de trouver c° et b° ; mais ils deviendraient plus compliqués, et les interpolations moins exactes à raison de la petitesse du nouvel angle θ . Il sera donc préférable alors de se servir de la méthode de l'art. 15.

2°. Pour éviter les interpolations assez pénibles qu'exige la méthode précédente, on peut opérer comme il suit.

L'angle θ auquel répond $l \sin \theta$, tombe toujours entre deux angles de la Table, qui ne diffèrent entr'eux que de $10''$. Soit α celui des deux qui est multiple de $20''$, et soit

$$l \sin \theta = l \sin \alpha + r;$$

on déduira de là,

$$l \cos \theta = l \cos \alpha - r \operatorname{tang}^2 \alpha \left(1 + \frac{Mr}{\cos^2 \alpha}\right),$$

$$l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta = l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha + \frac{r}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{1}{2} Mr \operatorname{tang}^2 \alpha\right).$$

Ainsi on connaîtra les logarithmes de b et de c° ; ensuite on aura celui de b° par la formule $b^{\circ} = \frac{2\sqrt{(bc^{\circ})}}{c}$.

Si l'on fait $l \cos \theta = l \cos \alpha - R$, $l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta = l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha + S$, le calcul des corrections R et S deviendra fort simple par le moyen suivant. Soit $r' = r \operatorname{tang}^2 \alpha$, on aura

$$\log R = \log r' + r' + r,$$

$$\log S = \log \frac{r}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} r';$$

Au reste il n'est point à craindre que les erreurs se multiplient dans ces calculs, puisqu'on suppose toujours θ ou $\alpha < 45^{\circ}$.

Formules pour le calcul des quatre fonctions F'c, E'c, F'b, E'b.

17. Nous partons toujours de l'hypothèse que l'on veut avoir les logarithmes de ces quatre fonctions, approchés jusqu'à la quatorzième décimale; d'ailleurs on peut toujours supposer $c < \sin 45^{\circ}$. Cela posé, nous commencerons par le cas qui exige les plus longs calculs, celui où le module c est compris entre $\sin 45^{\circ}$ et $\sin 26^{\circ} 34'$; alors l'échelle des modules doit être prolongée jusqu'aux termes

$b^{\circ\circ}$,

b^{ooo} , c^{ooo} , inclusivement. Les autres cas seront susceptibles de diverses simplifications à mesure que le module c deviendra plus petit.

Les valeurs de F^1c , E^1c se trouvent d'abord immédiatement par les formules

$$F^1c = \frac{\pi}{2}.K, \quad K = \sqrt{\left(\frac{1}{b}.b^{oo}b^{ooo}\right)},$$

$$E^1c = LF^1c, \quad L = \frac{b}{b^{oa}} \left(1 - \frac{1}{2} c^{oa}c^{oo} - \frac{1}{4} c^{oa}c^{oo}c^{ooo}\right).$$

Pour simplifier le calcul du coefficient L , j'observe que les deux termes $\frac{1}{2} c^{oa}c^{oo} (1 + \frac{1}{2} c^{ooo})$ peuvent se réduire à un seul; car on a d'une manière suffisamment exacte, $1 + \frac{1}{2} c^{ooo} = \sqrt{(1 + c^{ooo})} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{c^{ooo}}}{c^{ooo}}\right)}$; d'un autre côté, $\frac{2\sqrt{c^{ooo}}}{c^{ooo}} = \frac{b^{ooo}}{\sqrt{b^{oo}}}$. Donc

$$L = \frac{b}{b^{oa}} \left(1 - \frac{1}{2} c^{oa}c^{oo} \cdot \frac{\sqrt{b^{ooo}}}{\sqrt{b^{oo}}}\right).$$

Ainsi faisant $r = \frac{1}{2} c^{oa}c^{oo} \cdot \frac{\sqrt{b^{ooo}}}{\sqrt{b^{oo}}}$, on aura

$$E^1c = \frac{b}{b^{oa}} F^1c (1 - r).$$

Lorsque c est donné sous la forme $\sin \theta$, et que l'angle θ ainsi que $\frac{1}{2} \theta$, se trouve immédiatement dans les Tables, on a plus simplement

$$\frac{b}{b^{oa}} = \cos^4 \frac{1}{2} \theta.$$

Tout se réduit donc à trouver $\log (1 - r)$, ce que l'on fera par la formule $\log (1 - r) = -mr - \frac{1}{2} mr^2 - \frac{1}{3} mr^3$, dont il suffira de calculer trois termes au plus.

Le premier terme mr de cette valeur peut être calculé avec une précision suffisante par des Tables à dix décimales; car il ne peut avoir au plus que dix chiffres significatifs: et quand même il y aurait une erreur d'une ou de deux unités sur le dixième chiffre significatif, qui sera au rang de la quatorzième décimale, cette erreur sera confondue avec celles dont les autres logarithmes sont susceptibles; car en poussant l'approximation jusqu'à la quatorzième déci-

male, on ne peut prétendre que la quatorzième décimale sera toujours exacte.

18. Venons maintenant au calcul des fonctions complémentaires $F'b$, $E'b$. Les formules des art. 68 et 78 de la première Partie donnent, après avoir échangé entr'elles les lettres b et c , et en supposant $\mu = 4$

$$F'b = \frac{K'}{2^{\frac{1}{4}}} \log \frac{4}{c^{\circ\circ\circ\circ}}, \quad K' = \sqrt{\left(\frac{b^{\circ}b^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ}}{b}\right)},$$

$$E'b = L'F'b + \frac{1}{K'}.$$

On voit d'abord qu'on a exactement $K' = K$, et qu'ainsi K' est déjà connu; ensuite pour changer les logarithmes compris dans ces formules en logarithmes vulgaires, soit $h = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \log \frac{4}{c^{\circ\circ\circ\circ}}$; ce logarithme tiré immédiatement de la série des modules, sera un logarithme vulgaire, et on en conclura

$$F'b = KMh.$$

Pour calculer $E'b$, il faut connaître le coefficient L' ; or les formules des articles cités, donnent, après les permutations convenables,

$$L' = c^{\circ} - cb \left[\sqrt{c^{\circ}} + \sqrt{\left(\frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}}{b}\right)} + \sqrt{\left(\frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{bb^{\circ}}\right)} + \text{etc.} \right].$$

Mais on a $1 - b = c\sqrt{c^{\circ}}$, $1 + b = \frac{c}{\sqrt{c^{\circ}}}$, $c^{\circ} - cb\sqrt{c^{\circ}} = c\sqrt{c^{\circ}}$; donc

$$L' = c\sqrt{c^{\circ}} - c\sqrt{(bc^{\circ}c^{\circ\circ})} - c\sqrt{\left(\frac{bc^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{b^{\circ}}\right)} - \text{etc.}$$

Cette suite est fort convergente, mais on peut lui donner une forme plus commode; en effet on a les équations

$$\sqrt{(bc^{\circ})} = \frac{1}{2} b^{\circ}c, \quad \text{d'où résultent } \sqrt{(bc^{\circ}c^{\circ\circ})} = \frac{1}{2} b^{\circ}c\sqrt{c^{\circ\circ}},$$

$$\sqrt{(b^{\circ}c^{\circ\circ})} = \frac{1}{2} b^{\circ\circ}c^{\circ}, \quad \sqrt{\left(\frac{bc^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{b^{\circ}}\right)} = \frac{1}{4} b^{\circ\circ}cc^{\circ}\sqrt{c^{\circ\circ\circ}},$$

$$\sqrt{(b^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ})} = \frac{1}{2} b^{\circ\circ\circ}c^{\circ\circ}, \quad \sqrt{\left(\frac{bc^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}c^{\circ\circ\circ\circ}}{b^{\circ}b^{\circ\circ}}\right)} = \frac{1}{8} b^{\circ\circ\circ}cc^{\circ}c^{\circ\circ}\sqrt{c^{\circ\circ\circ\circ}},$$

etc. etc.

donc

$$L' = c\sqrt{c^{\circ}} - \frac{1}{2} c^{\circ}b^{\circ}\sqrt{c^{\circ\circ}} - \frac{1}{4} c^{\circ}c^{\circ}b^{\circ\circ}\sqrt{c^{\circ\circ\circ}} - \frac{1}{8} c^{\circ}c^{\circ\circ}b^{\circ\circ\circ}\sqrt{c^{\circ\circ\circ\circ}} - \text{etc.}$$

Pour rendre cette expression tout à fait rationnelle, on substituera les valeurs $\sqrt{c^0} = \frac{c}{2}(1+c^0)$, $\sqrt{c^{00}} = \frac{c^0}{2}(1+c^{00})$, etc.; et en observant qu'on a $b^0 = \frac{1-c^{00}}{1+c^{00}}$, $b^{00} = \frac{1-c^{000}}{1+c^{000}}$, etc., il viendra enfin

$$L' = \frac{c^2}{2}(1+c^0) - \frac{1}{4}c^2c^0(1-c^{00}) - \frac{1}{8}c^2c^0c^{00}(1-c^{000}) - \text{etc.}$$

ou

$$L' = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{4}c^2c^0 + \frac{1}{8}c^2c^0c^{00} + \frac{1}{16}c^2c^0c^{00}c^{000} + \text{etc.}$$

Comparant cette expression avec celle du coefficient L qui sert à déterminer E'c, on trouve exactement $L' = 1 - L$.

Ce résultat aurait pu se déduire directement de notre théorème sur les fonctions complémentaires, savoir,

$$\frac{\pi}{2} = F'cE'b + F'bE'c - F'cF'b;$$

car en substituant dans cette équation les valeurs $F'c = \frac{\pi}{2}K$, $E'c = LF'c$, $E'b = L'F'b + \frac{1}{K}$, on trouve immédiatement

$$L' = 1 - L;$$

ainsi on a une nouvelle vérification du théorème dont il s'agit.

19. Il suffit, pour l'approximation que nous voulons obtenir, de prendre

$$L' = \frac{1}{2}c^2(1 + \frac{1}{2}c^0 + \frac{1}{4}c^0c^{00} + \frac{1}{8}c^0c^{00}c^{000});$$

mais ces quatre termes seraient peu commodes pour le calcul logarithmique, et on va voir qu'ils peuvent être réduits à deux.

En effet soit $y = 1 + \frac{1}{2}c^0 + \frac{1}{4}c^0c^{00} + \frac{1}{8}c^0c^{00}c^{000}$, j'observe d'abord qu'on a $1 + c^{00} = \frac{2\sqrt{c^{00}}}{c^0}$; donc $1 + \frac{1}{2}c^0(1 + c^{00}) = 1 + \sqrt{c^{00}}$, et

$$y = 1 + \sqrt{c^{00}} - \frac{1}{4}c^0c^{00}(1 - \frac{1}{2}c^{00}). = 1 + \sqrt{c^{00}} - \frac{1}{4}c^0c^{00} + \frac{1}{8}c^0c^{00}c^{000}$$

La seconde partie de cette valeur se réduit à un seul terme, parce qu'on a avec une exactitude suffisante,

$$1 - \frac{1}{2}c^{000} = \sqrt{1 - c^{000}} = \sqrt{\left(\frac{2b^{00}}{1+b^{00}}\right)} = \sqrt{b^{000}}\sqrt{b^{00}};$$

il en résulte

$$y = 1 + \sqrt{c^{00}} - \frac{1}{4}c^0c^{00}\sqrt{b^{000}}\sqrt{b^{00}}.$$

Mais on a

$$(1 + \sqrt{c^{\circ\circ}})^2 = 1 + c^{\circ\circ} + 2\sqrt{c^{\circ\circ}} = \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}} (1 + c^{\circ}) = \frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}};$$

et cette valeur se réduit ultérieurement à $\frac{b^{\circ}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b^{\circ\circ}}{\sqrt{b^{\circ}}}$; donc si on

fait $1 + \sqrt{c^{\circ\circ}} = \zeta$, on aura $\zeta^4 = \frac{b^{\circ}b^{\circ\circ}}{b} \cdot b^{\circ\circ} = K^2 \cdot \frac{b^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ}}$, et $\zeta = K^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ}} \right)^{\frac{1}{4}}$.

Cela posé, la valeur de γ devient

$$\gamma = \zeta \left(1 - \frac{1}{4} c^{\circ} c^{\circ\circ} \cdot \frac{\sqrt{(b^{\circ\circ\circ} \sqrt{b^{\circ\circ}})}}{\zeta} \right),$$

et le second terme se réduit à $\frac{1}{4} \cdot \frac{c^{\circ} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}} (b^{\circ\circ\circ})^{\frac{3}{4}}$; donc enfin on aura

$$L' = \frac{1}{2} c^2 K^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ}} \right)^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{c^{\circ} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}} (b^{\circ\circ\circ})^{\frac{3}{4}} \right).$$

Par ces transformations non-seulement la valeur de L' est réduite à deux termes; mais le second de ces termes reste toujours très-petit par rapport au premier; j'observe d'ailleurs que le facteur $(b^{\circ\circ\circ})^{\frac{3}{4}}$, très-peu différent de l'unité, peut être omis sans qu'il en résulte une erreur d'une unité décimale du quatorzième ordre sur le log. de L' , et encore moins sur celui de $E'b$.

20. Cela posé, le calcul de $E'b$ se fera par les formules

$$E'b = \frac{1}{K} (1 + A),$$

$$A = \frac{1}{2} c^2 K^{\frac{3}{2}} F'b \cdot \left(\frac{b^{\circ\circ}}{b^{\circ\circ\circ}} \right)^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{c^{\circ} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}} \right).$$

Nous avons fait voir d'ailleurs comment du log. connu de A on déduit $\log (1 + A)$; ces formules jointes à celles que nous avons déjà trouvées, savoir,

$$F'c = \frac{\pi}{2} K, \quad K = \sqrt{\left(\frac{b^{\circ} b^{\circ\circ} b^{\circ\circ\circ}}{b} \right)},$$

$$E'c = \frac{b}{b^{\circ 2}} F'c (1 - r), \quad r = \frac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ} \cdot \frac{\sqrt{b^{\circ\circ\circ}}}{\sqrt[4]{b^{\circ\circ}}},$$

$$F'b = K M h, \quad h = \frac{1}{16} \log \frac{4}{c^{\circ\circ\circ\circ}},$$

sont ce que l'analyse paraît offrir de plus simple pour calculer jusqu'à la quatorzième décimale, les logarithmes des quatre fonctions $F'c$, $E'c$, $F'b$, $E'b$, dans le premier cas de l'art. 12, c'est-à-dire lorsque le module c est compris entre $\sin 45^\circ$ et $\sin 26^\circ 34'$.

21. Ces formules se simplifieront encore lorsqu'on voudra obtenir une moins grande approximation, ou lorsque c sera plus petit que $\sin 26^\circ 34'$, parce qu'alors il y aura moins de termes à calculer dans la série des modules.

Ainsi depuis $c = \sin 26^\circ 34'$ jusqu'à $c = \sin 3^\circ 11'$, ou depuis $c = 0.447$ jusqu'à $c = 0.0558$, on pourra faire $b^{\circ\circ} = 1$, et prendre $c^{\circ\circ}$ pour le dernier terme de la suite des modules, ce qui donnera

$$K = \sqrt{\left(\frac{b^{\circ\circ}}{b}\right)}, \quad r = \frac{\frac{1}{2}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ}}{\sqrt[4]{b^{\circ\circ}}}, \quad h = \frac{1}{8} \log \frac{4}{c^{\circ\circ\circ}},$$

$$A = \frac{1}{2} c^{\circ} K^{\frac{3}{2}} F' b (b^{\circ\circ})^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{\frac{1}{4} c^{\circ} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}\right).$$

Ces formules conviennent au second cas de l'art. 12.

22. Le troisième cas à considérer est celui où c est compris entre $\sin 3^\circ 11'$ et $\sin 2' 40''$, c'est-à-dire entre 0,0558 et 0.000776. Alors on pourra faire $b^{\circ} = 1$, et prendre c° pour le dernier terme de la série des modules; on aura donc pour déterminer $F'c$ et $E'c$, les formules

$$K = \sqrt{\left(\frac{b^{\circ}}{b}\right)}, \quad F'c = \frac{1}{2} \pi K, \quad E'c = \frac{\frac{1}{2} \pi}{b^{\circ} K} \left(1 - \frac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ}\right).$$

Dans la dernière, le facteur $1 - \frac{1}{2} c^{\circ 2} c^{\circ\circ}$ qu'on peut représenter par $(b^{\circ\circ})^4$, ne peut produire au plus que deux unités dans le quatorzième ordre de décimales; car la limite supérieure de c est déterminée par la condition que $\log b^{\circ}$ n'est que d'une demi-unité de cet ordre. Ainsi, peu après cette limite, on pourra négliger tout à fait ce facteur, et faire $E'c = \frac{\frac{1}{2} \pi}{b^{\circ} K}$, ce qui s'accorde avec la formule du n° 83, première Partie; mais elle est réduite ici à une expression encore plus simple.

Dans le même cas, les fonctions $F'b$, $E'b$ se calculent par les

formules

$$F'b = KMh, \quad h = \frac{1}{4} \log \frac{4}{c^{\circ\circ}},$$

$$E'b = \frac{1}{K} (1 + A), \quad A = \frac{1}{2} c^{\circ} K^{\frac{3}{2}} F'b. \left(1 - \frac{\frac{1}{4} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}\right);$$

et on remarquera que le facteur $1 - \frac{\frac{1}{4} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}$ ne peut donner au plus qu'une unité décimale du onzième ordre : ainsi il devra être négligé si on se borne à dix décimales ; alors on aurait simplement $E'b = \frac{1}{K} (1 + \frac{1}{2} c^{\circ} K^{\frac{3}{2}} F'b)$, ce qui s'accorde avec les formules des art. 79 et 82 ; mais cette nouvelle expression est encore la plus simple.

23. Ces formules sont déjà réduites à un tel degré de simplicité, qu'il serait presque inutile de faire mention des deux derniers cas de l'art. 12 ; l'un où l'on peut faire $b^{\circ} = 1$, $K = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $h = \frac{1}{2} l \frac{4}{c^{\circ}} = l \frac{4}{c} + \frac{1}{2} l \frac{1}{b}$; l'autre où l'on peut faire $b = 1$, $K = 1$, $h = \log \frac{4}{c^{\circ}}$.

Il ne reste plus qu'à faire voir dans quelques exemples, l'application des formules précédentes ; nous commencerons par le cas où il faut apporter le plus de précision dans les calculs, mais qui offre plusieurs moyens de vérification ; et pour mieux juger de l'exactitude des formules, nous ne négligerons les décimales qu'au-delà du quinzième ordre.

EXEMPLE I. $c = \sin 45^{\circ}$.

24. On aura $c^{\circ} = \tan^2 22^{\circ} \frac{1}{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$, $b^{\circ} = 2 \sqrt{\frac{c^{\circ}}{c}}$, ce qui donne d'abord les logarithmes suivans,

$$\begin{array}{r} c, b \dots 9.84948 \ 50021 \ 68010 \\ \tan 22^{\circ} \frac{1}{2} \dots 9.61722 \ 43146 \ 62137 \dots b^{\circ} \dots 9.99351 \ 18092 \ 42113 \\ c^{\circ} \dots \dots 9.25444 \ 86293 \ 24274. \end{array}$$

Pour trouver les termes suivans $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$, on calculera par la méthode de l'art. 13, d'abord p , ensuite les différens termes qui composent P , et que nous désignerons ici par 1), 2), 3).

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 25

$\frac{1}{2} c^\circ \dots$	8.93341 86336 60293	$p^a \dots$	5.74665 09161 57
$(\frac{1}{2} c^\circ)^2 \dots$	7.86685 72673 20586	$m \dots$	9.63778 43113 00
$b^\circ \dots$	9.99351 18092 42113	1) ...	5.38443 52274 57
$p \dots$	7.87332 54580 78473	$p^a \dots$	5.74665 0916
		$\frac{3}{2} \dots$	0.17609 1259
		2) ...	1.30717 74
		$p^a \dots$	5.74665 09
		$\frac{20}{9} \dots$	0.34678 7
		3) ...	7.40061 5

D'après les logarithmes trouvés des trois parties de la valeur de P, le premier terme 1) se trouve par des Tables à dix décimales, 0.00002 42345 64925; mais comme on pourrait craindre, dans ce cas, que la quatorzième décimale ne fût pas exacte, et encore moins la quinzième, voici le moyen d'obtenir une plus grande précision.

25. Il s'agit de trouver le nombre A d'après son logarithme 5.38443 52274 57; je trouve dans les Tables qu'en faisant...
 $a = 0.00002\ 423$, on a

$$\begin{aligned}\log a &= 5.38435\ 34141\ 37 \\ \log A &= 5.38443\ 52274\ 57 \\ r &= \frac{8\ 18133\ 20}{}\end{aligned}$$

ce qui donne $\log A = \log a + r$; donc $A = ae^{Mr}$, $A - a = a(e^{Mr} - 1)$
 $= ae^{\frac{1}{2}Mr} (e^{\frac{1}{2}Mr} - e^{-\frac{1}{2}Mr}) = aMr e^{\frac{1}{2}Mr} \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{M^2 r^2}{4} + \frac{1}{120} \cdot \frac{M^4 r^4}{16}\right)$;
et enfin,

$$\log(A - a) = l(aMr) + \frac{1}{2}r + \frac{Mr^2}{24} \left(1 - \frac{M^2 r^2}{120}\right).$$

Voici le calcul de cette formule :

$r \dots$	5.91282 40168
$a \dots$	5.38435 34141
$M \dots$	0.36221 56887
$\frac{1}{2}r \dots$	4.09067
$\frac{1}{24}Mr^2 \dots$	6
$A - a \dots$	1.65943 40269

$$\begin{aligned}A - a &= 0.00000\ 00045\ 64929 \\ a \dots &0.00002\ 423 \\ \hline A &= 0.00002\ 42345\ 64929\end{aligned}$$

On voit que la formule pourra, dans des cas semblables, être réduite aux deux premiers termes, de sorte qu'on aura $\log(A - a) = l(aMr) + \frac{1}{2}r$, et l'usage en sera extrêmement facile; d'ailleurs il suffit de calculer $\log(A - a)$ avec sept décimales, pour en tirer la valeur de A exacte jusqu'à la quinzième décimale.

26. Nous venons de trouver la valeur du premier terme 1) de P ; les termes 2) et 3) s'obtiennent sans difficulté par leurs logarithmes: ainsi on en conclura

$$\begin{array}{rcl}
 1) \dots & 0.00002 & 42345 \ 64929 \\
 2) - & & 20 \ 28511 \\
 3) + & & 252 \\
 \hline
 P = & 0.00002 & 42325 \ 36670 \\
 p \dots & 7.87332 & 54580 \ 78473 \\
 \hline
 c^{\circ} \dots & 7.87330 & 12255 \ 41803.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \frac{1}{2} P \dots & 0.00001 & 21162 \ 68335 \\
 b^{\circ} \dots & 9.99998 & 78837 \ 31665
 \end{array}$$

✓ Connaissant c° et b° , on se servira de la même méthode pour en déduire $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$; mais la quantité P se réduisant à son premier terme mp^2 , le calcul se simplifie beaucoup.

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{2} c^{\circ} \dots & 7.57227 & 12298 \ 77822 \\
 (\frac{1}{2} c^{\circ})^2 \dots & 5.14454 & 24597 \ 55644 \\
 1 : b^{\circ} \dots & 1 & 21162 \ 68335 \\
 \hline
 p \dots & 5.14455 & 45760 \ 23979 \\
 P \dots & & 84507 \\
 \hline
 c^{\circ\circ} \dots & 5.14455 & 45759 \ 39472
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 p^2 \dots & 0.28910 & 915 \\
 m \dots & 9.63778 & 431 \\
 \hline
 P \dots & 9.92689 & 346 \\
 \frac{1}{2} P \dots & 0.00000 & 00000 \ 42254 \\
 b^{\circ\circ} \dots & 9.99999 & 99999 \ 57746
 \end{array}$$

Il ne reste plus qu'à calculer le terme $c^{\circ\circ\circ}$, ce qui se fera simplement par la formule $c^{\circ\circ\circ} = (\frac{1}{2} c^{\circ\circ})^2 \frac{1}{b^{\circ\circ\circ}}$.

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{2} c^{\circ\circ} \dots & 4.84352 & 45802 \ 75491 \\
 & 9.68704 & 91605 \ 50982 \\
 & & 42254 \\
 \hline
 c^{\circ\circ\circ} \dots & 9.68704 & 91605 \ 93236
 \end{array}$$

27. Ayant formé ainsi l'échelle entière des modules, nous calculerons

culerons d'abord K et F^1c , comme il suit :

$\frac{1}{b}$	0.15051	49978	31990
b°	9.99351	18092	42113
$b^{\circ\circ}$	9.99998	78837	31665
$b^{\circ\circ\circ}$	<u>9.99999</u>	<u>99999</u>	<u>57746</u>
K^2	0.14401	46907	63514
K	0.07200	73453	81757
$\frac{1}{2}\pi$	<u>9.19611</u>	<u>98770</u>	<u>30153</u>
F^1c	0.26812	72224	11910

Pour calculer ensuite $E'c$, on commencera par former le logarithme de r qu'il suffit ordinairement d'exprimer avec dix décimales, mais que pour plus de sûreté on peut porter jusqu'à douze; ensuite on en déduira les différens termes de $\log(1-r)$ que nous désignerons à l'ordinaire par 1), 2), 3),

$c^{\circ 2} \dots\dots\dots$	8.46889	72586	485	$r \dots\dots\dots$	6.04117	15175	72
$\frac{1}{2} c^{\circ 0} \dots\dots\dots$	7.57227	12298	778	$m \dots\dots\dots$	<u>9.63778</u>	43113	00
$1 : \sqrt[4]{b^{\circ 0}} \dots\dots\dots$		50290	671	1).....	5.67895	58288	72
$\sqrt{b^{\circ 00}} \dots\dots\dots$	—		211	$\frac{1}{2} r \dots\dots\dots$	<u>5.74014</u>	15	
$r \dots\dots\dots$	<u>6.04117</u>	15175	72	2).....	1.41909	73	
				$\frac{2}{3} r \dots\dots\dots$	<u>5.86508</u>	0	
				3).....	7.28417	7	

La valeur du premier terme 1) se trouve par les Tables à dix décimales, 0.00004 77480 7077 ; pour la déterminer avec plus de certitude, et jusqu'à la quinzième décimale, on fera usage du moyen indiqué art. 25.

Soit $a = 0.00004\ 775$, on aura

$$\log a = 5.67897 \ 33759 \ 20$$

$$\log A = 5.67895 \ 58288 \ 72$$

$$r = 1\,75470\,48$$

$$\log A \equiv \log a - r.$$

$$r \dots\dots\dots 5.24420 \ 40641$$

M 0.36221 56887

$$a \dots\dots\dots 5.67897 \overline{33759}$$

$$\frac{1}{2}r \dots\dots\dots - 87755$$

$$a = A \dots 1.28538 \ 45552$$

$$\log (a - A) = \log (aMr) - \frac{1}{2} r$$

$$a - A = 0.00000 \ 00019 \ 29252$$

$$a = 0.00004\ 775$$

$$\Lambda = \overline{0.00004\ 77480\ 70768}$$

On voit combien la première détermination de A , par les Tables à dix décimales, était approchée, et on en conclura que l'usage de ces Tables sera toujours suffisant dans les cas ordinaires, lorsqu'on ne veut pas obtenir plus de quatorze décimales.

Les deux autres termes 2) et 3) de la valeur de $\log(1-r)$, se trouvent sans difficulté par leurs logarithmes, et on en déduit le résultat suivant pour $\log E'c$.

$$\begin{array}{rcl}
 1) \dots & 0.00004 \ 77480 \ 70768 & F'c \dots 0.26812 \ 72224 \ 11910 \\
 2) \dots & & \frac{b}{b^2} \dots 9.86246 \ 13836 \ 83782 \\
 3) \dots & & 0.13058 \ 86060 \ 95692 \\
 l(1-r) = - & 0.00004 \ 77506 \ 95767 & 4 \ 77506 \ 95767 \\
 & & E'c \dots 0.13054 \ 08553 \ 99925
 \end{array}$$

28. On peut vérifier la valeur trouvée pour $E'c$ par l'équation des fonctions complémentaires qui devient dans ce cas $\frac{1}{2}\pi = 2FE - F^2$, et d'où résulte $E = \frac{1 + KF}{2K} = \frac{1}{2K} (1 + A)$, en faisant $A = KF$:

$$\begin{array}{rcl}
 K \dots & 0.07200 \ 75453 \ 81757 & \\
 F \dots & 0.26812 \ 72224 \ 11910 & \\
 A \dots & 0.34013 \ 45677 \ 93667 &
 \end{array}$$

D'après cette valeur de $\log A$, on trouve aisément une fraction exprimée en nombres peu considérables qui approche beaucoup de A ; cette fraction est $\frac{871}{398} = a$. Prenant son logarithme avec quinze décimales, ainsi que celui de $1 + a = \frac{1269}{398}$, et appliquant la formule de l'art. 15, on trouve ce qui suit :

$$\begin{array}{rcl}
 871 \dots & 2.94001 \ 81550 \ 07663 & 1269 \dots 3.10346 \ 16220 \ 94705 \\
 398 \dots & 2.59988 \ 50720 \ 75688 & 398 \dots 2.59988 \ 50720 \ 75688 \\
 a \dots & 0.34013 \ 50829 \ 53975 & 1+a \dots 0.50357 \ 85500 \ 21017 \\
 A \dots & 45677 \ 93667 & 1) - \quad 3535 \ 65354 \\
 r = - & 5151 \ 40308 & 1+A \dots 0.50357 \ 81964 \ 45663 \\
 \log A = \log a - r & & 2K \dots 0.37303 \ 73410 \ 45738 \\
 & & E'c \dots 0.13054 \ 08553 \ 99925
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 r \dots\dots 3.71192 \ 55333 \\
 1 + a \dots 0.50357 \ 85500 \\
 \hline
 r' \dots\dots 3.20834 \ 69833 \\
 a \dots\dots 0.54013 \ 50829 \\
 \frac{1}{2} r' \dots\dots \text{---} \ 808 \\
 \hline
 (1) \dots\dots 3.54848 \ 19854
 \end{array}$$

On voit que la valeur trouvée pour $\log E'c$ s'accorde jusqu'à la quinzième décimale avec celle que nous avons déjà trouvée, ce qui confirme pleinement tous ces calculs.

Il n'y a pas lieu de calculer dans cet exemple les valeurs des fonctions $F'b$, $E'b$, puisqu'elles sont les mêmes que celles de $F'c$ et $E'c$; mais si on exécute ces calculs par les méthodes indiquées, on obtiendra deux nouvelles vérifications de nos formules.

EXEMPLE II. $c = \sqrt{2} - 1 = \tan \frac{1}{8} \pi$.

29. Cet exemple est compris dans le second cas de l'art. 12; ainsi il ne faut prolonger l'échelle des modules que jusqu'aux termes b° et c° ; et d'abord nous supposons qu'on connaît seulement $\log c = 9.61722 \ 43146 \ 6214$, qui donne

$$\log c^2 = 9.23444 \ 86293 \ 2428.$$

De cette valeur il faut déduire $\log b$; pour cela on trouve d'abord la valeur approchée $c^2 = 0.171573$, laquelle, par les fractions continues, se transforme en $\frac{169}{985}$; soit donc $c^2 = A$ et $\frac{169}{985} = a$, on aura $1 - a = \frac{816}{985}$. Or par la Table à vingt décimales, on trouve les logarithmes de a et de $1 - a$ comme il suit :

$$\begin{array}{r}
 169 \dots 2.22788 \ 67046 \ 15673 \qquad 816 \dots 2.91169 \ 01587 \ 53861 \\
 985 \dots 2.99343 \ 62304 \ 97611 \qquad 985 \dots 2.99343 \ 62304 \ 97611 \\
 \hline
 a \dots 9.23445 \ 04741 \ 16062 \qquad 1 - a \dots 9.91825 \ 59282 \ 5625 \\
 A \dots 9.23444 \ 86293 \ 2428 \\
 \hline
 r = \qquad \qquad \qquad 18447 \ 9178
 \end{array}$$

Ensuite il faut appliquer les formules de l'art. 15, savoir :

$$\log A = \log a - r, \quad r' = \frac{r}{1-a},$$

$$\log(1-A) = \log(1-a) + R, \quad \log R = \log(ar') - \frac{1}{2}r';$$

en voici le calcul :

r	4.26594	75549	$1-a$	9.91825	59282	5625
$1-a$	9.91825	59283	R ...		3820	6987
r'	4.54769	54266	$1-A$	9.91825	45103	2612
a	9.25445	04741	b	9.95912	71551	6306
$-\frac{1}{2}r'$		— 11154				
R	3.58214	27873				

Il est aisé de vérifier cette valeur de $\log b$; car puisque $c = \sqrt{2} - 1$, il en résulte $b^2 = 2\sqrt{2} - 2 = 2c$;

c	9.61722	45146	6214
2	0.30102	99956	6398
b^2	9.91825	45103	2612
b	9.95912	71551	6306

ce qui s'accorde parfaitement avec le résultat précédent.

Maintenant il faut avoir le \log de $1+b$, pour en déduire ceux de c° et b° ; or par la valeur approchée $b = \frac{152}{167}$, on trouvera les logarithmes suivans qui répondent à la valeur exacte de b .

$1+b$...	0.28107	42501	90515	$2\sqrt{b}$...	0.28059	35732	4551
c	9.61722	45146	6214	$1+b$...	0.28107	42501	90515
$\sqrt{c^\circ}$...	9.53615	00844	71625	b°	9.99951	93430	54995
c°	8.67230	01689	4525				

Maintenant le calcul de c° et b° , et ensuite celui de $c^{\circ\circ}$, se feront par la méthode ordinaire comme il suit :

$\frac{1}{2}c^\circ$	8.37127 01732 7927	p^2	5.48604 20070
$(\frac{1}{2}c^\circ)^2$...	6.74254 03465 5854	m	9.63778 43113
$1:b^\circ$	0.00048 06569 45005	mp^2	3.12382 63183
p	6.74302 10035 05545	$\frac{3}{2}mp^2$...	— 1995
P	1329 92184	P	3.12382 61188
c°	6.74302 08705 1156	$\frac{1}{2}P$	0.00000 00664 96092
	0.30102 99956 6398	b°	9.99999 99335 03908
$\frac{1}{2}c^\circ$	6.44199 08748 4738		
	2.88398 17496 9476		
	664 9609		
c°	2.88398 18161 9085		

30. L'échelle des modules étant ainsi formée, on procédera à l'ordinaire pour avoir K et F^1c :

$\frac{1}{b}$	0.04087 28448 3694
b°	9.99951 93430 54995
b°	9.99999 99335 03908
	0.04039 21213 9584
K	0.02019 60606 9792
$\frac{1}{2}\pi$	0.19611 98770 3015
F^1c	0.21631 59377 2807

Pour avoir ensuite E^1c , il faut chercher $\log(1-r)$ d'après la valeur $r = \frac{1}{2}c^\circ c^\circ \sqrt[4]{\frac{1}{b^\circ}}$. Voici le calcul :

c^2	7.34460 03379	$\log(1-r) = -R$
$\frac{1}{2}c^\circ$	6.44199 08748	$\log R = \log mr + \frac{1}{2}mr$
$1:\sqrt[4]{b^\circ}$...	166	$\log mr = 3.42437 55406$
r	3.78659 12293	$\frac{1}{2}mr = 1329$
m	9.63778 43113	$\log R = 3.42437 56735$
mr	3.42437 55406	$R = 0.00000 02656 90284$
$\frac{b}{b^2}$	9.96008 84690 5307	
F^1c	0.21631 59377 2807	
$(1-r)$	— 2656 9028	
E^1c	0.17640 41410 9086	

31. Maintenant le calcul de $F'b$ doit être fait par la formule

$F'b = KMh$, où l'on a $h = \frac{1}{8} \log \frac{4}{c^{\circ\circ}}$; voici ce calcul :

4.....	0.60205	99915	2796	h	9.98441	91861	62678
$c^{\circ\circ}$	2.88398	18161	9085	M	0.56221	56886	99465
$8h =$	7.71807	81751	3711	K	0.02019	60606	9792
$h =$	0.96475	97718	9214	$F'b$	0.36683	09355	6006

On peut vérifier cette valeur de $\log F'b$, par la propriété des fonctions $F'b$, $F'c$, démontrée art. 64, laquelle, en échangeant les lettres b et c de cet article, donne $F'b = \sqrt{2} \cdot F'c$. En effet, si on prend la différence des logarithmes des deux fonctions, on trouve que cette différence répond à $\frac{1}{2} \log 2$.

$$F'b \dots 0.36683 \ 09355 \ 6006$$

$$F'c \dots 0.21631 \ 59377 \ 2807$$

$$\hline 0.15051 \ 49978 \ 3199 = \frac{1}{2} \log 2.$$

Le résultat est donc exact jusque dans la dernière décimale.

32. Il reste à trouver $\log E'b$, et pour cela il faut calculer $\log A$ par la formule $A = \frac{1}{2} c^{\circ} K^{\frac{3}{2}} F'b (b^{\circ\circ})^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c^{\circ} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}\right)$; mais d'abord faisant $r = \frac{\frac{1}{2} c^{\circ} c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}$, nous chercherons $\log (1 - r) = -R$, ce qui se fera par l'équation $\log R = \log (mr) + \frac{1}{2} mr$.

$\frac{1}{2} c^{\circ}$	8.57127	01732	8	$\frac{1}{2} c^{\circ}$	8.95541	86556	6050
$\frac{1}{2} c^{\circ\circ}$	6.44199	08748	5	K	0.02019	60606	9792
	4.81526	10481	3	\sqrt{K}	0.01009	80303	4896
\sqrt{K}	1009	80303	5	$F'b$	0.36683	09355	6006
r	4.80316	30178		$\sqrt[4]{b^{\circ\circ}}$	—	166	2402
m	9.63778	45113			9.33054	36436	4522
mr	4.44094	75291		R	—	27602	5185
$\frac{1}{2} mr$		13801		A	9.33054	08833	9137
$\log R =$	4.44094	87092					

De cette valeur de $\log A$, il faut déduire $\log (1 + A)$; c'est ce qu'on obtiendra aisément au moyen de la valeur approchée $a = \frac{137}{640}$, qui

donne $1 + a = \frac{777}{640}$. Voici le calcul d'où l'on tire ensuite $\log E'b$.

137....	13672	05671	56407	777....	89042	10188	00914
640....	80617	99739	83887	640....	80617	99739	83887
a	9.33054	05931	7252	$1+a$...	0.08424	10448	17027
A		8833	9137	1).....		511	71163
	$r = 2902$	1885		$1+A$...	0.08424	10959	8819
$\log A = \log a + r$				K	2019	60606	9792
				$E'b$	0.06404	50352	9027

r	3.46272	56169
$1+a$...	0.08424	10448
r'	3.37848	45721
a	9.33054	05932
$\frac{1}{2}r'$		1195
1).....	2.70902	52848

EXEMPLE III. $c = \sin \theta$, $\sin 2\theta = \text{tang}^2 15^\circ$.

33. Cet exemple se rapporte au troisième cas de l'art. 12; il a été déjà traité dans l'art. 84, première Partie; mais nous allons le résoudre plus exactement en calculant les quatre fonctions jusqu'à quatorze décimales.

Dans ce cas on ne donne directement ni la valeur de c , ni celle de b ; il faut les déduire de l'équation $\sin 2\theta = \text{tang}^2 15^\circ$ ou $2bc = \text{tang}^2 15^\circ$. Voici la méthode que nous choisirons pour cet objet.

De l'équation $\sin 2\theta = \text{tang}^2 \lambda$, on tire $\cos^2 \theta = \frac{\sqrt{(\cos 2\lambda)}}{\cos^2 \lambda}$. Soit donc $A = \frac{\sqrt{(\cos 30^\circ)}}{\cos^2 15^\circ}$, on aura $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + A)$: connaissant par cette équation $\cos \theta$ ou b , on aura ensuite c par l'équation $c = \frac{\text{tang}^2 15^\circ}{2b}$. Voici le détail des calculs.

$\sin 15^\circ$...	9.41299	62305	6934	$\sqrt{(\cos 30^\circ)}$.	9.96876	53158	47925
$\cos 15^\circ$...	9.98494	37781	0270	$\cos^2 15^\circ$...	9.96988	75562	0540
$\text{tang} 15^\circ$...	9.42805	24524	6664	A	9.99887	77596	42525
$\text{tang}^2 15^\circ$...	8.85610	49049	3328				

Une valeur approchée de A est $a = \frac{387}{388}$; elle servira à calculer $\log(1 + A)$, comme il suit :

387...	58771 09650 18911	775....	88930 17025 06310
388...	58885 17255 94207	388....	58885 17255 94207
a	9.99887 92394 24704	$1+a$...	0.50046 99769 12103
A	77596 42525	1).....	7589 55761
	$r = 14797 \cdot 82179$	$1 + A$.	0.50046 92379 76542
	$\log A = \log a - r.$	2.....	0.50102 99956 63981
r	4.17019 77928	b^2	9.99943 92423 1256
$1 + a$...	0.50046 99769	b	9.99971 96211 5618
r'	3.86972 78159	$2b$	0.50074 96168 2016
a	9.99887 92394	$\tan^2 15^\circ$.	8.85610 49049 3328
$\frac{1}{2}r'$	— 3704	c	8.55535 52881 1312
1).....	4.86860 66849		

Connaissant les logarithmes de c et b , on trouvera par la méthode ordinaire, ceux de c° , b° , puis celui de $c^{\circ\circ}$, ce qui suffit dans le cas présent pour compléter la série des modules. Voici le calcul.

$\frac{1}{2}c$	8.25432 52924 4914	p^2	3.01786 193
$(\frac{1}{2}c)^2$...	6.50865 05848 9828	m	9.63778 431
$1:b$...	28 05788 4382	mp^2	2.65564 624
p	6.50893 09637 4210	$\frac{3}{2}mp^2$...	— 7
$P =$	452 52874	$\log P =$	2.65564 617
c°	6.50893 09184 89226	$\frac{1}{2}P =$	0.00000 00226 26437
	0.50102 99956 63981	b°	9.99999 99773 75563
$\frac{1}{2}c^\circ$	6.20790 09228 25245		
$(\frac{1}{2}c^\circ)^2$..	2.41580 18456 50490		
$1:b^\circ$...	226 26437		
$c^{\circ\circ}$	2.41580 18682 76927		

34. L'échelle des modules étant terminée, on calculera comme il suit les quantités F^1c , E^1c .

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{b^\circ}{b} \dots & 0.00028 & 03562 \quad 17382 \quad \frac{\frac{1}{2}\pi}{K} \dots 0.19597 \quad 96989 \quad 21462 \\
 K \dots & 0.00014 & 01781 \quad 08691 \quad \frac{1}{b^\circ} \dots \quad \quad \quad 226 \quad 26437 \\
 \frac{1}{2}\pi \dots & 0.19611 & 98770 \quad 30153 \quad \log E'c = 0.19597 \quad 97215 \quad 4790 \\
 \log F'c = & 0.19626 & 00551 \quad 38844
 \end{array}$$

Venons maintenant au calcul de $F'b$, il se fera par l'équation $F'b = KMh$, où l'on a $h = \frac{1}{4} \log \frac{4}{c^\circ}$.

$$\begin{array}{rcl}
 \log \frac{4}{c^\circ} = & 8.18625 & 81250 \quad 51035 \quad h \dots 0.31102 \quad 54430 \quad 50353 \\
 h = & 2.04656 & 45307 \quad 6276 \quad M \dots 0.36221 \quad 56886 \quad 99465 \\
 & & & K \dots \quad \quad \quad 14 \quad 01781 \quad 08691 \\
 & & & \log F'b = 0.67338 \quad 13098 \quad 58509 \\
 & & & \log F'c = 0.19626 \quad 00551 \quad 38844 \\
 & & & \log 3 = 0.47712 \quad 12547 \quad 19665
 \end{array}$$

On voit qu'entre les logarithmes calculés de $F'b$ et $F'c$, la différence répond exactement au logarithme de 3, ce qui s'accorde avec la propriété de ces fonctions.

On peut encore faire voir que la valeur trouvée pour $F'c$ satisfait exactement à l'équation $F'c = \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt[4]{27}} F'(\sin 45^\circ)$, donnée art. 155, première Partie.

$$\begin{array}{rcl}
 F'(\sin 45^\circ) \dots & 0.26812 & 72224 \quad 11910 \\
 2 \dots & 0.30102 & 99956 \quad 63981 \\
 \cos 15^\circ \dots & 9.98494 & 57781 \quad 0270 \\
 & 0.55410 & 09961 \quad 78591 \\
 \sqrt[4]{27} \dots & 0.35784 & 09410 \quad 39747 \\
 \log F'c = & 0.19626 & 00551 \quad 38844
 \end{array}$$

valeur qui s'accorde parfaitement avec le résultat du calcul précédent.

Il ne reste plus qu'à calculer le log. de $E'b$; pour cela nous suivrons la formule de l'art. 22.

$$r = \frac{1}{4} \frac{c^{\circ\circ}}{\sqrt{K}}.$$

$$F'b \dots\dots 0.67338 \ 13098 \ 5851$$

$$\frac{1}{2}c^{\circ} \dots\dots 6.80968 \ 05805 \ 6226$$

$$K \dots\dots 14 \ 01781 \ 0869$$

$$\sqrt{K} \dots\dots 7 \ 00890 \ 54345$$

$$mr \dots\dots \text{---} \ 913$$

$$A \dots\dots 7.48327 \ 21575 \ 8289$$

$$l(1-r) = -mr.$$

$$\frac{1}{2}c^{\circ} \dots\dots 6.20790 \ 09$$

$$\frac{1}{2}c^{\circ\circ} \dots\dots 2.11477 \ 19$$

$$m \dots\dots 9.63778 \ 43$$

$$1 : \sqrt{K} \dots\dots \text{---} \ 7 \ 01$$

$$mr \dots\dots 7.96038 \ 70$$

Une valeur approchée de A est $\frac{17}{5587} = a$, $1 + a = \frac{5604}{5587}$.

$$17 \dots 23044 \ 89213 \ 7827$$

$$5587 \dots 74717 \ 86713 \ 6017$$

$$a \dots\dots 7.48327 \ 02500 \ 1810$$

$$A \dots\dots 21575 \ 8289$$

$$r = 19075 \ 6479$$

$$5604 \dots 74849 \ 81266 \ 1374$$

$$5587 \dots 74717 \ 86713 \ 6017$$

$$1+a \dots\dots 0.00131 \ 94552 \ 5357$$

$$R \dots\dots 57 \ 8670$$

$$1+A \dots\dots 0.00131 \ 94610 \ 4027$$

$$K \dots\dots 14 \ 01781 \ 0869$$

$$r \dots\dots 4.28047 \ 92975$$

$$1+a \dots\dots 131 \ 94553$$

$$r' \dots\dots 4.27915 \ 98422$$

$$a \dots\dots 7.48327 \ 02500$$

$$\frac{1}{2}r' \dots\dots 9509$$

$$R \dots\dots 1.76243 \ 10431$$

$$\log E'b = 0.00117 \ 92829 \ 3158$$

Construction et usage de la Table des Fonctions complètes.

35. Au moyen des méthodes précédentes, on a calculé pour toutes les valeurs de θ , de dixième en dixième de degré, les logarithmes des quatre fonctions $F'c$, $E'c$, $F'b$, $E'b$, approchés jusqu'à la quatorzième décimale. On a continué ainsi jusqu'à 15° ; depuis 15° jusqu'à la limite 45° , on s'est borné à calculer ces logarithmes de demi-degré en demi-degré; on a ensuite interpolé les termes trouvés, en insérant quatre moyens entre deux termes consécutifs, de sorte que la Table s'est trouvée construite dans son entier pour tous les dixièmes de degré de l'angle du module.

Quoique les logarithmes calculés directement doivent être en général exacts, au moins jusqu'à la treizième décimale inclusive-ment, on s'est contenté de marquer les différences comme si les fonctions F et E n'étaient calculées qu'avec 12 décimales. L'interpolation de 15° à 45° a été faite dans le même principe.

Les formules dont on s'est servi pour cette interpolation, sont assez connues; cependant nous les rapporterons ici, afin qu'on puisse plus facilement vérifier nos calculs.

36. La Table ayant été calculée pour chaque demi-degré, de 15 à 45 degrés, supposons que pour une valeur déterminée $\theta = \alpha$, le terme A représente $\log F$ ou $\log E$, avec ses différences successives, comme il suit :

$$\alpha \mid A \mid \delta A \mid \delta^2 A \mid \delta^3 A \mid \delta^4 A$$

Pour insérer quatre moyens entre deux termes consécutifs A , $A + \delta A$, qui répondent aux variables α , $\alpha + 1$, en prenant pour unité des variables un demi-degré, je forme d'abord les *différences moyennes* successives, savoir,

$$a' = \frac{2}{10} \delta A, \quad a'' = \frac{4}{100} \delta^2 A, \quad a''' = \frac{8}{1000} \delta^3 A, \quad a^{iv} = \frac{16}{10000} \delta^4 A;$$

désignant ensuite par dA , d^2A , d^3A , d^4A , les nouvelles différences de A qui auront lieu lorsqu'il y aura quatre moyens insérés entre A et $A + \delta A$, on aura les valeurs suivantes de ces différences :

$$\begin{aligned} d^4A &= a^{iv}, \\ d^3A &= (a''' - 4a^{iv}) - 2a^{iv}, \\ d^2A &= a'' - 4(a''' - 4a^{iv}), \\ dA &= a' - a^{iv} - 2(d^2A + d^3A), \end{aligned}$$

Connaissant les différences dA , d^2A , d^3A , d^4A , on formera sans difficulté les quatre termes qui suivent A , et le cinquième qui devra être le même que le terme connu $A + \delta A$, et qui servira ainsi à vérifier les calculs. Ces termes étant trouvés, on les terminera à la douzième décimale, en rejetant les deux autres, et on les insérera dans la Table formée de dixième en dixième de degré; on y joindra en même temps les différences premières, secondes, troi-

sièmes et quatrièmes (s'il y a lieu) de ces nouveaux termes, lesquelles doivent s'accorder suivant une loi convenable, avec les différences précédentes; et si quelqu'anomalie s'y faisait remarquer, on en conclurait que dans le calcul d'interpolation il s'est glissé une erreur qu'il faut rectifier.

37. Je remarquerai que lorsque les différences quatrièmes $\delta^4 A$ sont assez grandes pour que les différences suivantes $\delta^5 A$ aient quelqu'influence dans les interpolations, il conviendra de prendre $\delta^4 A - \frac{7}{10} \delta^5 A$ au lieu de $\delta^4 A$. En effet, les termes A et $A + \delta A$ étant censés répondre aux indices $x = 0$, $x = 1$, si on calcule le terme intermédiaire qui répond à l'indice x , la partie de ce terme due aux différences $\delta^4 A$, $\delta^5 A$, sera

$$\frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\delta^4 A + \frac{x-4}{5} \delta^5 A \right);$$

d'où l'on voit qu'on peut tenir compte des cinquièmes différences, en prenant $\delta^4 A + \frac{x-4}{5} \delta^5 A$ au lieu de $\delta^4 A$. Mais comme $\delta^5 A$ est censé très-petit par rapport à $\delta^4 A$, si l'on donne à x une valeur moyenne $\frac{1}{2}$, le terme $\frac{x-4}{5} \delta^5 A$ se réduira à $-\frac{7}{10} \delta^5 A$; ainsi au lieu de $\delta^4 A$, on pourra prendre $\delta^4 A - \frac{7}{10} \delta^5 A$, ce qui sera suffisamment exact pour les valeurs de x qui répondent aux quatre moyens, savoir, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

Ce moyen a été employé surtout pour les valeurs de $F'c$, depuis 45° jusqu'à 65° ; passé 65° il a fallu tenir compte plus exactement des cinquièmes différences, ce qui a été pratiqué de la manière suivante.

38. On a fait d'abord le calcul entier de l'interpolation, en ayant égard seulement aux quatrièmes différences. Ensuite pour tenir compte des cinquièmes différences, et jusqu'à un certain point des sixièmes, on a ajouté des corrections aux différens moyens insérés, savoir,

Au 1^{er} moyen... + α' ($\delta^5 A - \frac{3}{4} \delta^6 A$), $\log \alpha' = 8.4071529$
 Au 2^e..... + α'' ($\delta^5 A - \frac{3}{4} \delta^6 A$), $\log \alpha'' = 8.4764258$
 Au 3^e..... + α''' ($\delta^5 A - \frac{3}{4} \delta^6 A$), $\log \alpha''' = 8.3584482$
 Au 4^e..... + α^{iv} ($\delta^5 A - \frac{3}{4} \delta^6 A$), $\log \alpha^{iv} = 8.0516926$

Dans ces expressions, la quantité $-\frac{3}{4} \delta^6 A$ est la valeur moyenne de $\frac{x-5}{6} \delta^6 A$, laquelle s'obtient en faisant $x = \frac{1}{2}$. Quant aux coefficients α' , α'' , α''' , α^{iv} , ce sont les valeurs de la quantité $\frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3 \cdot x - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, lorsqu'on y fait successivement $x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

39. Pour donner un exemple de ces interpolations, supposons qu'il s'agit d'insérer quatre moyens entre les deux valeurs de $\log F^1$ qui répondent aux angles $\theta = 57^\circ 5$ et $\theta = 58^\circ 0$.

La Table des valeurs de $\log F^1$, calculées de demi-degré en demi-degré, donne les résultats suivans pour le cas de $\theta = 57^\circ 5$:

θ .	Log F^1	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
57°5	0.320 640 298 695	2 541 165 315	39 775 335	853 935	38 660	2 398	202

D'après ces données, les différences moyennes jusqu'au quatrième ordre, seront

$a' = 508\ 233\ 063.00$, $a'' = 1591\ 013.40$, $a''' = 6831.48$, $a^{iv} = 61.8656$;
 on en tire par les formules précédentes,

$dA = 505\ 090\ 725.90$, $d^2 A = 1564\ 677.33$, $d^3 A = 6460.29$, $d^4 A = 61.87$.

Au moyen de ces différences, on calculera les termes intermédiaires comme il suit :

θ .	A.	dA .	$d^2 A$.	$d^3 A$.	$d^4 A$.
57.5	0.320 640 298 695.00	505 090 725.90	1 564 677.33	6 460.29	61.87
57.6	0.321 145 389 420.90	506 655 403.23	1 571 137.62	6 522.16	61.87
57.7	0.321 652 044 824.13	508 226 540.85	1 577 659.78	6 584.03	
57.8	0.322 160 271 364.98	509 804 200.63	1 584 243.81		
57.9	0.322 670 075 565.61	511 388 444.44			
58.0	0.323 181 464 010.05				

Pour calculer ensuite la correction due aux cinquièmes et sixièmes différences, on aura $\delta^5 A - \frac{3}{4} \delta^6 A = 2246 \frac{1}{8}$, ce qui donnera les corrections à appliquer aux dernières figures des moyens insérés, comme il suit :

1 ^{er} ...	420.90	2 ^e ...	824.13	3 ^e ...	564.98	4 ^e ...	565.61
Cor. +	57.37	+ 67.29		+ 51.33		+ 25.30	
	<u>478.27</u>	<u>891.42</u>		<u>416.31</u>		<u>590.91</u>	

Les moyens ainsi corrigés sont, en supprimant les deux décimales, tels qu'on les voit dans la Table générale construite pour chaque dixième de degré.

40. Si on voulait aller plus loin et étendre la Table à tous les centièmes de degré, ce qui en rendrait les différences plus petites et l'usage beaucoup plus facile, il faudrait commencer par insérer un moyen entre deux termes consécutifs de la Table actuelle. On aurait ainsi une nouvelle Table calculée pour tous les demi-dixièmes de degré; il faudrait ensuite diviser chaque intervalle en cinq parties égales par quatre moyens, ce qui se ferait par les formules que nous avons rapportées. Ces interpolations cependant ne pourraient être pratiquées avec succès que jusqu'à 80 ou 85 degrés au plus; elles pourraient être prolongées plus loin pour $\log E'$ que pour $\log F'$ qui augmente rapidement vers la fin de la Table. Mais comme la Table sera toujours de peu d'usage dans cette extrémité, et qu'il est facile d'y suppléer par le calcul direct, on pourra laisser subsister la Table actuelle, calculée pour chaque dixième de degré, dans la petite partie qui ne se prête pas facilement aux interpolations. L'inconvénient que nous remarquons ici dans la Table des log. des fonctions $F'b$, $E'b$, a lieu également, ou même à un plus haut degré, dans la simple Table des logarithmes des nombres, vers le commencement de cette Table, et jusqu'à une assez grande distance. Il a lieu également, et par la même raison, dans la Table des logarithmes-sinus, pour les petits arcs; et dans celle des logarithmes-tangentes, il se fait sentir tant pour les petits arcs que pour ceux qui diffèrent peu de 90°. Dans tous ces cas, les interpolations ne peuvent être faites avec sûreté, et il faut recourir à des moyens particuliers pour y suppléer.

41. Pour avoir le milieu entre deux termes consécutifs A, A_1 d'une suite dont les différences deviennent progressivement plus petites qu'une quantité donnée, il est bon d'avoir recours aux termes qui précèdent et qui suivent les deux termes proposés. Supposons donc que la suite dont il s'agit soit représentée comme on voit ici :

$$\dots A(-3), A(-2), A(-1), A, A_1, A_2, A_3, \text{etc.};$$

et soit le moyen cherché $A(\frac{1}{2})$, on aura

$$A(\frac{1}{2}) = \frac{A + A_1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2 A(-1) + \delta^2 A}{8} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\delta^4 A(-2) + \delta^4 A(-1)}{32} \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\delta^6 A(-3) + \delta^6 A(-2)}{128} + \text{etc.}$$

Cette formule suit une loi très-simple dont voici la démonstration.

Un terme quelconque $A(x)$ peut en général être représenté par $A(1 + \delta)^x$, pourvu qu'après le développement de cette puissance, chaque terme $A\delta^n$ soit remplacé par $\delta^n A$. Cela posé, on aura, suivant cette notation,

$$A(\frac{1}{2}) = A(1 + \delta)^{\frac{1}{2}}, \\ A + A_1 = A + A(1 + \delta) = A(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}} [(1 + \delta)^{\frac{1}{2}} + (1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}], \\ \delta^2 A(-1) + \delta^2 A = A\delta^2(1 + \delta)^{-1} + A\delta^2 = A\delta^2(1 + \delta)^{-\frac{1}{2}} [(1 + \delta)^{\frac{1}{2}} + (1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}], \\ \delta^4 A(-2) + \delta^4 A(-1) = A\delta^4(1 + \delta)^{-\frac{3}{2}} [(1 + \delta)^{\frac{1}{2}} + (1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}], \\ \text{etc.}$$

Si donc l'équation supposée a lieu, c'est-à-dire, si en général $A(\frac{1}{2})$ est de la forme

$$A(\frac{1}{2}) = p(A + A_1) + p'[\delta^2 A(-1) + \delta^2 A] \\ + p''[\delta^4 A(-2) + \delta^4 A(-1)] \\ + \text{etc.},$$

$p, p', p'', \text{etc.}$ étant des coefficients constans; il faudra, en substituant les valeurs précédentes, qu'on ait l'équation identique

$$\frac{1}{(1 + \delta)^{\frac{1}{2}} + (1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}} = p + p' \cdot \frac{\delta^2}{1 + \delta} + p'' \cdot \frac{\delta^4}{(1 + \delta)^2} + p''' \cdot \frac{\delta^6}{(1 + \delta)^3} + \text{etc.}$$

Soit $\frac{\delta^2}{1 + \delta} = z$, si on élève au quarré le premier membre de

cette équation, il deviendra $\frac{1+\delta}{4+4\delta+\delta^2} = \frac{1}{4+z}$; donc on doit avoir

$$\frac{1}{\sqrt{(4+z)}} = p + p'z + p''z^2 + p'''z^3 + \text{etc.};$$

or cette équation est satisfaite généralement au moyen des valeurs suivantes,

$$p = \frac{1}{2}, \quad p' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad p'' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad p''' = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7, \text{ etc.}$$

Ces coefficients donneront donc aussi la loi générale de l'expression de $A\left(\frac{1}{2}\right)$.

Au reste cette expression sera toujours si convergente, qu'il suffira de prendre les deux premiers termes, ou tout au plus les trois premiers.

42. Veut-on, par exemple, calculer la valeur de $\log F$ qui répond à l'angle du module $\theta = 61^\circ 05$? On prendra dans la Table les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{rcl} A & = & 0.339 \ 295 \ 030 \ 747 \\ A_1 & = & 0.339 \ 859 \ 146 \ 462 \\ s & = & 0.679 \ 154 \ 177 \ 209 \qquad \frac{1}{2}s = 0.339 \ 577 \ 088 \ 604.5 \\ \delta^2 A(-1) & = & \qquad \qquad 1 \ 821 \ 030 \\ \delta^2 A & = & \qquad \qquad 1 \ 829 \ 864 \\ s' & = & \frac{5 \ 650 \ 894}{16} \qquad \frac{1}{16}s' = - \qquad \qquad 228 \ 180.9 \\ \delta^4 A(-2) & = & \qquad \qquad 86 \\ \delta^4 A(-1) & = & \qquad \qquad 85 \\ s'' & = & \frac{171}{256} \qquad \frac{3}{256}s'' = + \qquad \qquad 2.0 \end{array}$$

Milieu cherché..... $A\left(\frac{1}{2}\right) = 0.339 \ 576 \ 860 \ 425.6$

43. Soit encore proposé pour exemple de trouver $\log F$ pour l'angle $\theta = 77^\circ 25$; on fera le calcul d'après les éléments pris dans la Table, comme il suit ;

A...

$$A \dots\dots 0.464 \ 973 \ 191 \ 062.35$$

$$A_1 \dots\dots 0.466 \ 078 \ 604 \ 921.92$$

$$s = 0.931 \ 051 \ 795 \ 984.27 \quad \frac{1}{2} s = 0.465 \ 525 \ 897 \ 992.13$$

$$\mathcal{J}^2 A(-1) \dots \quad 6 \ 555 \ 790$$

$$\mathcal{J}^2 A \dots\dots \quad 6 \ 643 \ 169$$

$$s' \dots \quad 13 \ 198 \ 969 \quad \frac{2}{16} s' \dots \quad - \ 824 \ 934.94$$

$$\mathcal{J}^4 A(-2) \dots \quad 1 \ 894$$

$$\mathcal{J}^4 A(-1) \dots \quad 1 \ 957$$

$$s'' \dots \quad 3 \ 851 \quad \frac{3}{256} s'' \dots \quad + \ 43.13$$

$$\text{Milieu cherché} \dots \quad A\left(\frac{1}{2}\right) = 0.465 \ 525 \ 073 \ 100.32$$

44. Ayant expliqué la construction de la Table des fonctions complètes, et les moyens de l'étendre jusqu'aux centièmes de degré, ce qui serait un travail fort utile sans être bien considérable, il nous reste à montrer les usages de cette Table, c'est-à-dire à faire voir comment, pour une valeur donnée de l'angle θ , non comprise dans la Table, on trouvera les logarithmes des fonctions F' et E' , approchés jusqu'à la douzième décimale; et réciproquement, comment du logarithme donné d'une de ces fonctions, on déduirait l'angle du module θ , et le module lui-même c .

Et d'abord, si au lieu de donner l'angle θ , on donne le module c ou son complément b , il faudra en déduire l'angle correspondant θ avec toute la précision nécessaire, pour que les quantités négligées n'influent pas sur la douzième décimale de $\log F$ ou $\log E$. Cet objet mérite un examen particulier.

Comme nous supposons toujours $c < b$, il sera plus exact de déterminer l'angle θ par le moyen de son sinus c que par le moyen de son cosinus b ; cela est vrai surtout si l'angle θ est d'un petit nombre de degrés, parce qu'alors une petite erreur sur $\cos \theta$ en produit une assez grande sur θ . Ainsi en général si on donne à la fois $\log c$ et $\log b$, il faudra déterminer l'angle θ par le moyen de $\log c$.

Si l'on veut déterminer à dix décimales seulement les fonctions F' , E' , en négligeant les deux de plus que donne la Table, il suffira

de chercher l'angle θ par les Tables de Vlacq ou de Wega, et en ayant égard aux secondes différences. Ce calcul n'a pas besoin d'autre explication ; seulement après avoir trouvé l'angle θ en degrés, minutes et secondes, il faudra tout réduire en dixièmes de degré, et parties décimales du dixième de degré, puisque le dixième de degré doit servir d'unité dans les calculs d'interpolation.

45. Mais si on veut exprimer les logarithmes avec douze décimales, comme sont ceux de notre Table, alors l'angle θ ne peut plus se trouver avec une précision suffisante par des Tables à dix décimales, telles que celles de Vlacq ou de Wega.

Dans ce cas, il faudra employer les Tables de la *Trigonometria Britannica*, qui sont calculées pour chaque centième de degré avec quatorze décimales. Soit a l'angle de cette Table le plus approché de l'angle cherché θ , et soit

$$l \sin \theta = l \sin a + r.$$

De là il faut tirer la valeur de $\theta - a$. Or en regardant θ et r comme seules variables, on a $\frac{d\theta}{dr} = M \tan \theta$, $\frac{dd\theta}{dr^2} = \frac{M}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dr} = \frac{M^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta}$, $\frac{d^3\theta}{dr^3} = \frac{M^2 (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta)}{\cos^4 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dr} = \frac{M^3 (1 + 2 \sin^2 \theta)}{\cos^4 \theta} \tan \theta$; faisant ensuite dans ces coefficients $\theta = a$, on aura par la formule de Taylor,

$$\theta = a + Mr \tan a \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Mr}{\cos^2 a} + \frac{1 + 2 \sin^2 a}{2 \cdot 3} \cdot \frac{M^2 r^2}{\cos^4 a} + \text{etc.} \right).$$

Et pour évaluer θ en degrés, soit $\theta = a + x$, et R° le nombre de degrés compris dans le rayon, on aura

$$R^\circ x = R^\circ Mr \tan a \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Mr}{\cos^2 a} + \frac{1 + 2 \sin^2 a}{2 \cdot 3} \cdot \frac{M^2 r^2}{\cos^4 a} + \text{etc.} \right).$$

Cette formule se réduira le plus souvent à ses deux premiers termes, et alors le calcul en sera très-facile. Quelquefois la différence r sera assez grande pour qu'il faille tenir compte du troisième terme; mais pour avoir besoin du quatrième, il faudrait que a fût très-petit, et alors il y a un autre moyen de déduire l'arc de son sinus.

46. Il conviendra dans ce cas d'employer la formule

$$\log \theta = \log \sin \theta + \frac{m}{6} \sin^2 \theta + \frac{11m}{180} \sin^4 \theta + \frac{191m}{5670} \sin^6 \theta + \text{etc.},$$

ou, en convenant que les nombres renfermés en parenthèses sont les logarithmes des coefficients,

$$\begin{aligned} \log \theta = \log \sin \theta &+ \sin^2 \theta [8.85963 \ 30609] \\ &+ \sin^4 \theta [8.42390 \ 450] \\ &+ \sin^6 \theta [8.16523 \ 46] + \text{etc.}, \end{aligned}$$

et pour que θ soit exprimé en degrés, il faudra ajouter à ce logarithme la constante $R^\circ = 1.75812 \ 26324$, qui est le logarithme de $\frac{180}{\pi}$.

Il faut maintenant montrer par quelques exemples, l'usage de ces formules.

47. *Exemple I.* Etant donné le module $c = \sin \theta = \sqrt{2} - 1$, dont le logarithme $= 9.61722 \ 43146 \ 6214$, on demande l'angle correspondant θ exprimé en degrés et parties décimales de degré.

Par la *Trigon. Britan.*, on trouve l'angle approché $a = 24^\circ 47'$, qui donne

$$\begin{aligned} l \sin a &= 9.61722 \ 76371 \ 2662 \\ l \sin \theta &= \underline{43146 \ 6214} \\ r &= - \quad \quad \quad 33224 \ 6448 \end{aligned}$$

Il faudra ensuite calculer les différens termes de la valeur de x , d'après la formule de l'art. 45. Voici ce calcul :

$r \dots$	4.52146 03467	
$M \dots$	0.36221 56887	
$Mr \dots$	4.88367 60354	4.88367 60
$R^\circ \dots$	1.75812 26324	$\cos^2 a \dots$ 9.91825 29
$\text{tang } a \dots$	9.65810 11701	4.96542 31
$1) \dots$	6.29989 98379	2) ... 0.30103 00
		4.66459 31
		1) ... 6.29989 98
		2) ... 0.96429 29

On voit par la petitesse du second terme 2) de la valeur de x , qu'il est inutile d'avoir égard au troisième; ainsi des deux premiers on conclura la valeur de θ comme il suit:

$$\begin{array}{r} a \dots 24^\circ 47000 \ 00000 \ 000 \\ 1) - \quad 0.00019 \ 94802 \ 197 \\ 2) + \quad \quad \quad \quad 9 \ 217 \\ \hline \theta = 24.46980 \ 05207 \ 020 \end{array}$$

Cette valeur de θ est plus exacte qu'il ne faut pour que l'interpolation de la Table donne douze décimales exactes.

On aurait trouvé la même valeur de θ par la simple interpolation de la *Trigon. Britan.*, en ayant égard aux secondes différences.

48. Connaissant la valeur de θ , si l'on veut avoir la valeur correspondante de $\log F^1$, on prendra dans notre Table les données suivantes qui répondent à l'angle $a = 24^\circ 4$.

a	A	$\delta A.$	$\delta^2 A.$	$\delta^3 A.$	$\delta^4 A.$
24.4	0.216 198 561 343	168 272 307	745 715	768	5

et on aura à calculer la formule suivante dans laquelle.....

$$x = 0.69800 \ 52070 \ 2,$$

$$A(x) = A + x \left(\delta A - \frac{1-x}{2} (\delta^2 A - \frac{2-x}{3} (\delta^3 A - \frac{3-x}{4} \delta^4 A) \right)$$

Voici ce calcul où nous suivons la même notation que dans l'art. 81, quatrième Partie.

$$\frac{3-x}{4} \delta^4 A = 2.9$$

$$\delta^3 A x = 768 - 2.9 = 765.1, \quad \frac{2-x}{3} = 0.434$$

$$\frac{2-x}{3} \delta^3 A x = 332.0$$

$$\delta^2 A x = 745 \ 583,$$

$$\frac{1-x}{2} = 0.150 \ 997 \ 4$$

$$\frac{1-x}{2} \delta^2 A x = 112 \ 550.9$$

$$\delta A x = 168 \ 159 \ 756.1$$

$$x \delta A x = \quad \quad \quad 117 \ 376 \ 385.4$$

$$A = 0.216 \ 198 \ 561 \ 343$$

$$\log F^1 = 0.216 \ 315 \ 937 \ 728.4$$

résultat qui s'accorde parfaitement avec celui que nous avons trouvé ci-dessus, n° 30.

49. *Ex. II.* Etant donné $\log c$ ou $\log \sin \theta = 8.55535\ 52881\ 1312$, on demande l'angle θ exprimé en degrés et parties décimales de degré.

On peut encore trouver cet angle d'une manière suffisamment approchée par la Table de la *Trig. Brit.*; on a d'abord $a = 2^\circ 06$,

$$\begin{aligned}\log \sin a &= 8.55565\ 10170\ 2887 \\ \log \sin \theta &= 8.55535\ 52881\ 1312 \\ r &= - \quad 29\ 57289\ 1575\end{aligned}$$

On fera ensuite le calcul de la formule de l'art. 45, comme il suit :

$$\begin{aligned}r &\dots 6.47089\ 37910 \\ M &\dots 0.36221\ 56887 \\ \hline Mr &\dots 6.83310\ 94797 \dots 6.83310\ 948 \\ \text{tang } a &8.55593\ 17782 \quad \cos^2 a \quad 9.99943\ 848 \\ R &\dots 1.75812\ 26324 \quad \frac{Mr}{\cos^2 a} \cdot 6.83367\ 100 \quad q = \frac{1+2\sin^2 a}{3} = 0.3342 \\ (1) &\dots 7.14716\ 38903 \quad 0.30103\ 000 \quad q \dots 9.52400\ 6 \\ a &\dots 6.53264\ 100 \quad a \dots 6.53264\ 100 \quad \frac{Mr}{\cos^2 a} \dots 6.83367\ 1 \\ (2) &\dots 3.67986\ 489 \quad b \dots 6.35767\ 7 \\ b &\dots 6.35767\ 7 \\ (3) &\dots 0.03748\ 2 \quad a + (2) \dots 2^\circ 06000\ 04784\ 150 \\ &\quad (1) - \quad 140\ 33431\ 862 \\ &\quad (3) - \quad 1\ 090 \\ &\quad \theta = 2.05859\ 71351\ 198\end{aligned}$$

D'après cette valeur de θ , nous chercherons par interpolation la valeur de $\log F'$; pour cela nous prendrons dans la Table les nombres suivans correspondans à $2^\circ 0$.

$$\begin{aligned}A &= 0.196\ 252\ 187\ 490.54, & \delta A &= 13\ 563\ 720 \\ \delta^2 A &= & 662\ 025, & \delta^3 A &= 54 \\ \delta^4 A &= & 2\end{aligned}$$

Cela posé il faut faire $x = 0.58597\ 13512$, et on aura

$$\frac{3-x}{4} \delta^4 A = 1.2$$

$$\delta^3 A x = 52.8, \quad \frac{2-x}{3} = 0.471\ 3, \quad \frac{2-x}{3} \delta^3 A x = 24.9$$

$$\delta^2 A x = 662\ 000.1, \quad \frac{1-x}{2} = 0.207\ 014.32,$$

$$\frac{1-x}{2} \delta^2 A x = 137\ 043.5$$

$$\delta A x = 13\ 426\ 676.5$$

$$x \delta A x = 7\ 867\ 547.77$$

$$A = 0.196\ 252\ 187\ 490.54$$

$$\log F'c = 0.196\ 260\ 055\ 138.31$$

Cette valeur s'accorde dans les douze premières décimales avec celle que nous avons trouvée directement, n° 34. De là on voit que l'interpolation, même pour des angles assez petits, donne des résultats suffisamment exacts.

En général, dès qu'on aura déterminé l'angle θ avec une précision suffisante, soit par la formule de l'art. 45, soit par celle de l'art. 46, l'interpolation de la Table des fonctions complètes ne souffrira de difficulté que vers la fin de la Table, lorsque l'angle du module est très-près de l'angle droit. On peut y suppléer alors par les formules directes dont le calcul est d'autant plus facile que l'angle du module est moins différent de l'angle droit. Mais si on veut résoudre le cas dont il s'agit par des interpolations qui ne soient sujettes à aucune difficulté, on y parviendra par le moyen que nous allons exposer.

50. Il s'agit en général de trouver les logarithmes des fonctions $F'b$, $E'b$, lorsque b diffère peu de l'unité ou lorsque son complément c est le sinus d'un angle d'un petit nombre de degrés. Dans ce cas on trouvera aisément, par les interpolations, les fonctions complémentaires $F'c$, $E'c$, et c'est par le moyen de $F'c$ qu'il faut déterminer $F'b$ et $E'b$.

Pour cela j'observe d'abord que dans le cas dont nous nous occupons, on pourrait supposer $b^\circ = 1$; mais nous nous contenterons

de supposer $b^{ooo} = 1$, afin que la solution s'applique à un plus grand nombre de cas ; alors les formules générales donnent (art. 21),

$$K = \sqrt{\left(\frac{b^o b^{oo}}{b}\right)}, \quad F^1 c = \frac{1}{2} \pi K, \quad F^1 b = \frac{KM}{8} \log \frac{4}{c^{ooo}}.$$

Il faut donc chercher si l'on peut exprimer $F^1 b$ par les seules données $b, c, F^1 c$, sans avoir recours aux auxiliaires b^o, b^{oo}, c^{ooo} .

D'abord K est connu par la valeur $K = \frac{F^1 c}{\frac{1}{2} \pi}$. Soit ensuite $c^o = x$, $c^{oo} = y$, des équations $bK^2 = b^o b^{oo}$, $cb^o = 2\sqrt{(bc^o)}$, $c^o b^{oo} = 2\sqrt{(b^o c^{oo})}$, $c^{oo} = 2\sqrt{(b^{oo} c^{ooo})}$, on déduira

$$b^o = \frac{2\sqrt{bx}}{c}, \quad b^{oo} = \frac{bK^2}{b^o} = \frac{1}{2} cK^2 \sqrt{\left(\frac{b}{x}\right)},$$

$$c^o b^{oo} = \frac{1}{2} K^2 c \sqrt{bx} = 2\sqrt{b^o y}.$$

Cette dernière étant quarrée donne $K^4 c^2 bx = 16b^o y$; quarrant de nouveau et substituant la valeur de b^o , on aura $K^8 c^4 b^2 x^2 = y^2 \cdot \frac{4bx}{c^2}$; donc $y^2 = \frac{K^8 c^6}{4^5} bx$. Cette équation ne suffit pas pour déterminer x et y ; mais on a d'ailleurs $b^{oo} = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{K^2 c}{2} \sqrt{\frac{b}{x}}$; de là on tire

$$x = \frac{\frac{1}{4} bK^4 c^2}{1 - y^2} = \frac{1}{4} bK^4 c^2 (b^{oo})^{-2},$$

$$y = \frac{K^6 c^4 b}{2^6} (b^{oo})^{-1}.$$

Soit $K^2 b = \alpha^4$, cette dernière équation donnera $\frac{4}{y} = \left(\frac{4}{cK\alpha}\right)^4 b^{oo}$; mais $\frac{4}{c^{ooo}} = \left(\frac{4}{c^{oo}}\right)^2 b^{oo} = \left(\frac{4}{y}\right)^2 b^{oo} = \left(\frac{4}{cK\alpha}\right)^8 (b^{oo})^3$; donc

$$F^1 b = MK \log \left[\frac{4}{cK\alpha} (b^{oo})^{\frac{3}{8}} \right].$$

Soit $\mathcal{E} = \left(\frac{1}{b^{oo}}\right)^{\frac{3}{8}}$, et on aura enfin

$$F^1 b = MK \log \left(\frac{4}{cK\alpha^2} \right) \cdot \begin{cases} \alpha = \sqrt[4]{(K^2 b)}, \\ \log \mathcal{E} = \frac{3}{8} \log \frac{1}{b^{oo}} = \frac{3}{4} M \left(\log \frac{1}{\alpha} \right)^2. \end{cases}$$

Ainsi on voit que dans le calcul de $\log F^1 b$, il n'entre que les

quantités b , c , K , dont on a les logarithmes, de sorte qu'on évite ainsi l'interpolation directe pour $F'b$, laquelle est ramenée à l'interpolation de $F'c$ qui n'a point de difficulté.

51. Pour juger de l'exactitude de cette formule, nous prendrons $c = \sin 15^\circ$, et nous donnerons à $\log K$ la valeur exacte jusqu'à quatorze décimales, qu'on trouve par le calcul direct, et que d'ailleurs la Table donne immédiatement. On aura donc les données

$$\begin{aligned} c &\dots 9.41299 \ 62305 \ 6934 \\ b &\dots 9.98494 \ 37781 \ 0270 \\ K &\dots 0.00749 \ 54886 \ 8247 \end{aligned}$$

Au moyen de ces données, le calcul de $h = \frac{1}{8} \log \frac{4}{c^{\infty}}$ se fera comme il suit :

$$\begin{array}{rcl} 4 \dots & 0.60205 \ 99913 \ 2796 & \sqrt{b} \dots 9.99247 \ 18890 \ 5135 \\ c \dots & 9.41299 \ 62305 \ 6934 & K \dots \quad \quad 749 \ 54886 \ 8247 \\ \hline \frac{4}{c} \dots & 1.18906 \ 37607 \ 5862 & a^2 \dots 9.99996 \ 73777 \ 3382 \\ K \dots & 0.00749 \ 54886 \ 8247 & a \dots 9.99998 \ 36888 \ 6691 \\ \hline \frac{4}{cK} \dots & 1.18156 \ 82720 \ 7615 & \log \frac{1}{a} = 0.00001 \ 63111 \ 3509 = p \\ & & \log \epsilon = \frac{3}{4} Mp^2 \\ a \dots & 9.99998 \ 36888 \ 6691 & p \dots 5.21248 \ 413 \\ \hline \frac{4}{cKa} \dots & 1.18158 \ 45832 \ 0924 & p^2 \dots 0.42496 \ 826 \\ \epsilon \dots & \quad \quad \quad 4 \ 5946 & \frac{3}{4} M \dots 0.23727 \ 695 \\ \hline h \dots & 1.18158 \ 45827 \ 4978 & l\epsilon \dots 0.66224 \ 52 \end{array}$$

Cette valeur de h s'accorde exactement avec celle que donnerait $\frac{1}{8} \log \frac{4}{c^{\infty}}$, calculée par la méthode directe, jusqu'à la quatorzième décimale. Ainsi en la substituant dans la formule $F'b = KMh$, on aura de même une valeur de $\log F'b$ exacte, jusqu'à la quatorzième décimale, et qui satisfera à l'équation $F'b = \sqrt{3} F'c$, exprimant une propriété particulière de ces fonctions.

52. Si notre formule donne des résultats aussi exacts que la méthode directe lorsque l'angle du module est de 15° , à plus forte raison

raison aura-t-elle cet avantage lorsque l'angle du module sera moindre; en général le degré d'approximation avec lequel $F'b$ sera déterminé, dépendra de celui avec lequel on connaît la quantité K ; et comme K peut toujours, par l'interpolation des fonctions $F'c$, être déterminé jusqu'à la douzième décimale, il s'ensuit que h et par conséquent $lF'b$ sera déterminé avec la même exactitude.

Connaissant $F'c$, $E'c$ par l'interpolation directe, $F'b$ par le calcul précédent, il restera à déterminer $E'b$, ce qu'on pourra toujours faire par l'équation des complémens $\frac{\pi}{2} = F'c E'b + F'b E'c - F'b F'c$. Ainsi on a les moyens de suppléer à l'interpolation qui ne peut se pratiquer que difficilement dans les dernières colonnes de la Table.

Il est remarquable que la valeur $h = \log \frac{4}{cK\alpha^2}$ offre successivement les différentes opérations à faire suivant les différens cas indiqués dans l'art. 12.

Ainsi dans le cinquième cas, si c est tellement petit qu'on puisse négliger $1 - b$ ou $\log b$, on aura simplement $h = \log \frac{4}{c}$; dans le quatrième cas, où $1 - b^2$ seulement est négligeable, on aura $h = \log \frac{4}{cK}$; dans le troisième cas, où l'on ne peut négliger que $1 - b^2$, il faut un facteur de plus dans la valeur de h , et on a $h = \log \frac{4}{cK\alpha}$; enfin si on tombe dans le second cas, où $1 - b^2$ seulement peut être négligé, il faudra encore ajouter le facteur ϵ , et on aura $h = \log \frac{4}{cK\alpha^2}$.

53. Il nous resterait à faire voir comment on peut trouver l'angle θ qui répond à une valeur donnée de $\log F'c$ ou de $\log E'c$; mais les calculs de cette sorte étant entièrement semblables à ceux dont nous avons donné le développement dans les art. 83 et suiv. de la quatrième Partie, nous pensons qu'il est superflu d'entrer dans de nouveaux détails à ce sujet.

Nous ferons observer en finissant que la Table des fonctions complètes offre 900 valeurs de quarts d'ellipses; et un pareil

nombre de valeurs de la fonction analogue F' , dont 420 au moins ont été calculées directement jusqu'à quatorze décimales, et les autres jusqu'à douze. Ces transcendantes sont donc maintenant connues plus exactement que ne l'était la circonférence du cercle avant Ludolph van Ceulen.

§ II. Méthodes générales pour former une Table des valeurs de l'intégrale $U = \int u \phi$.

54. Nous supposons que u est une fonction donnée de la variable ϕ , et que cette fonction est telle qu'en faisant varier ϕ d'une quantité constante α , les différences successives de la fonction u diminuent continuellement et finissent par être entièrement négligeables. On peut toujours prendre α assez petit pour que cette supposition soit admissible, quelle que soit la fonction u , pourvu qu'elle reste toujours finie dans toute l'étendue des valeurs de ϕ que l'on considère; et la différence α pourra être fixée dans chaque cas particulier, suivant le degré d'approximation avec lequel on veut exprimer les fonctions U .

55. Nous désignerons par $U, U', U'',$ etc. les fonctions qui répondent aux variables croissantes $\phi, \phi + \alpha, \phi + 2\alpha,$ etc.; et semblablement nous désignerons par $U, U^{\circ}, U^{\circ\circ},$ etc. les fonctions qui répondent aux variables décroissantes $\phi, \phi - \alpha, \phi - 2\alpha,$ etc. Cela posé, la Table qu'il s'agit de construire pour la fonction U et ses différences successives, pourra être représentée, dans l'une quelconque de ses parties, comme il suit :

Variable.	Fonction.	Diff. I.	II.	III.	IV.
...
$\phi - 3\alpha$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^3 U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^4 U^{\circ\circ\circ}$
$\phi - 2\alpha$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ}$	$\delta^3 U^{\circ\circ}$	$\delta^4 U^{\circ\circ}$
$\phi - \alpha$	U°	δU°	$\delta^2 U^{\circ}$	$\delta^3 U^{\circ}$	$\delta^4 U^{\circ}$
ϕ	U	δU	$\delta^2 U$	$\delta^3 U$	$\delta^4 U$
$\phi + \alpha$	U'	$\delta U'$	$\delta^2 U'$	$\delta^3 U'$	$\delta^4 U'$
$\phi + 2\alpha$	U''	$\delta U''$	$\delta^2 U''$	$\delta^3 U''$	$\delta^4 U''$
$\phi + 3\alpha$	U'''	$\delta U'''$	$\delta^2 U'''$	$\delta^3 U'''$	$\delta^4 U'''$
...

La première colonne contient les valeurs de φ , formant une progression arithmétique dont la différence est α ; la seconde colonne est celle des valeurs correspondantes de la fonction U . On a placé sur la même ligne que φ et U , les différences successives δU , $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc.; et par cette disposition, chaque ligne sert à former la ligne inférieure, au moyen de la loi connue $U' = U + \delta U$, $\delta U' = \delta U + \delta^2 U$, $\delta^2 U' = \delta^2 U + \delta^3 U$, etc.

Il s'agit maintenant de faire voir comment, étant donnée la fonction u , on peut calculer les différences successives qui servent à former la Table des valeurs de U . Pour cela nous ferons usage d'un algorithme qui a l'avantage de conduire rapidement aux résultats que nous voulons exposer, et qui a surtout celui d'en faire connaître la loi de la manière la plus simple et la plus générale. Cette notation, au reste, qui ne s'applique qu'aux sommes et aux différences, considérées dans leurs combinaisons linéaires seulement, est fondée sur les mêmes principes que celle qui a été indiquée par Lagrange dans les Mémoires de Berlin, ann. 1772, et qui a été adoptée par d'autres auteurs.

56. On a immédiatement, par la formule de Taylor,

$$U' = U + \alpha \cdot \frac{dU}{d\varphi} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 U}{d\varphi^3} + \text{etc.};$$

et puisque les coefficients de cette formule sont les mêmes que ceux de l'exponentielle

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \text{etc.},$$

il s'ensuit qu'on peut mettre U' sous la forme

$$U' = U e^{\alpha d},$$

pourvu qu'après avoir développé le second membre suivant les puissances de αd , on convienne que chaque terme $U \alpha^m d^m$ sera remplacé par $\alpha^m \cdot \frac{d^m U}{d\varphi^m}$.

Dans cette hypothèse, on aura successivement

$$U' = U e^{\alpha d}, \quad U'' = U' e^{\alpha d}, \quad U''' = U'' e^{\alpha d}, \quad \text{etc.};$$

de là résultent les différences premières,

$$\delta U = U (e^{\alpha d} - 1),$$

$$\delta U' = U' (e^{\alpha d} - 1),$$

$$\delta U'' = U'' (e^{\alpha d} - 1),$$

etc. ;

celles-ci donnent les différences secondes,

$$\delta^2 U = \delta U (e^{\alpha d} - 1) = U (e^{\alpha d} - 1)^2,$$

$$\delta^2 U' = \delta U' (e^{\alpha d} - 1) = U' (e^{\alpha d} - 1)^2,$$

$$\delta^2 U'' = \delta U'' (e^{\alpha d} - 1) = U'' (e^{\alpha d} - 1)^2,$$

etc. ;

et en général on aura

$$\delta^n U = U (e^{\alpha d} - 1)^n.$$

Au moyen de cette formule, la différence finie d'un ordre quelconque de la fonction U peut s'exprimer par les coefficients différentiels de cette même fonction. En effet si on suppose

$$(e^x - 1)^n = x^n (1 + A^1 x + A^{11} x^2 + A^{111} x^3 + \text{etc.}),$$

on aura en même temps

$$\delta^n U = \alpha^n \cdot \frac{d^n U}{d\varphi^n} + A^1 \alpha^{n+1} \cdot \frac{d^{n+1} U}{d\varphi^{n+1}} + A^{11} \alpha^{n+2} \cdot \frac{d^{n+2} U}{d\varphi^{n+2}} + \text{etc.}$$

57. Réciproquement on peut exprimer les coefficients différentiels $\frac{dU}{d\varphi}$, $\frac{d^2 U}{d\varphi^2}$, $\frac{d^3 U}{d\varphi^3}$, etc. d'une fonction U , par le moyen des différences finies de cette fonction, prises en donnant à la variable φ l'accroissement constant α .

Pour cela je réduis l'équation symbolique $\delta U = U (e^{\alpha d} - 1)$ à la forme

$$\delta = e^{\alpha d} - 1;$$

j'en tire

$$\alpha d = \log (1 + \delta),$$

et $\alpha U d$ ou

$$\alpha \cdot \frac{dU}{d\varphi} = U \log (1 + \delta).$$

Cette nouvelle équation suppose qu'après avoir développé le second membre suivant les puissances de δ , chaque terme $U \delta^m$ sera rem-

placé par la différence $\delta^n U$; on obtiendra ainsi

$$\alpha \frac{dU}{d\phi} = \delta U - \frac{1}{2} \delta^2 U + \frac{1}{3} \delta^3 U - \frac{1}{4} \delta^4 U + \text{etc.}$$

C'est la formule connue qui sert à exprimer le coefficient différentiel d'une fonction par les différences successives de cette fonction. Ainsi α étant assez petit pour que la suite des différences δU , $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. soit très-convergente, on déterminera le coefficient $\frac{dU}{d\phi}$ avec toute l'exactitude qu'on peut désirer.

58. Si dans l'équation symbolique $\alpha \frac{dU}{d\phi} = U \log(1 + \delta)$, on met $\frac{dU}{d\phi}$ à la place de U , on aura

$$\alpha \frac{ddU}{d\phi^2} = \frac{dU}{d\phi} l(1 + \delta),$$

d'où résulte

$$\alpha^2 \frac{ddU}{d\phi^2} = U l^2(1 + \delta).$$

On aurait de même $\alpha^3 \frac{d^3U}{d\phi^3} = U l^3(1 + \delta)$, et en général,

$$\alpha^n \frac{d^n U}{d\phi^n} = U l^n(1 + \delta);$$

de sorte qu'un coefficient différentiel quelconque $\frac{d^n U}{d\phi^n}$ peut s'exprimer facilement par les différences finies de la fonction U , en supposant connu le développement de $l^n(1 + x)$, qui désigne la puissance n de $l(1 + x)$.

En effet si l'on a $l^n(1 + x)$ ou $x^n(1 - N^1 x + N^{11} x^2 - N^{111} x^3 + \text{etc.})$, on pourra en conclure

$$\alpha^n \frac{d^n U}{d\phi^n} = \delta^n U - N^1 \delta^{n+1} U + N^{11} \delta^{n+2} U - \text{etc.}$$

59. Supposons maintenant qu'on ait $U = \int u d\phi$ ou $\frac{dU}{d\phi} = u$, la valeur de αu exprimée par les différences successives δU , $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc., sera

$$\alpha u = \delta U - \frac{1}{2} \delta^2 U + \frac{1}{3} \delta^3 U - \text{etc.}$$

Dans le cas où l'on veut construire une Table des valeurs de U , la quantité u est connue pour chaque valeur de ϕ , et en faisant varier ϕ de α , on connaîtra les différences successives de u . D'après ces différences, il sera possible de déterminer en général la valeur de δU .

En effet, soit $au = p$ et $\frac{x}{l(1+x)}$ ou

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \text{etc.}} = 1 + k'x + k''x^2 + k'''x^3 + \text{etc.},$$

l'équation précédente donnera

$$\delta U = p + k'\delta p + k''\delta^2 p + k'''\delta^3 p + \text{etc.}$$

Ainsi δU se déduit des quantités données p , δp , $\delta^2 p$, etc.; par une suite dont la loi est connue.

Cette même suite donnerait les différences ultérieures $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. par les formules

$$\delta^2 U = \delta p + k'\delta^2 p + k''\delta^3 p + \text{etc.},$$

$$\delta^3 U = \delta^2 p + k'\delta^3 p + \text{etc.}$$

Mais ces suites, pour déterminer δU , $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc., peuvent être rendues plus convergentes par un moyen très-simple.

60. Soit v ce que devient la fonction u , lorsqu'au lieu de ϕ on met $x + \frac{1}{2}\alpha$; on aura suivant la notation précédente,

$$v = u(1 + \delta)^{\frac{1}{2}},$$

pourvu qu'après avoir fait le développement du second membre suivant les puissances de δ , on remplace chaque terme $u\delta^m$ par $\frac{\delta^m u}{d\phi^m}$.

De là résulte $av = au(1 + \delta)^{\frac{1}{2}}$, et parce que $au = U l(1 + \delta)$, on aura

$$av = U(1 + \delta)^{\frac{1}{2}} l(1 + \delta).$$

Mais en effectuant le développement jusqu'aux x^6 , on a

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} l(1+x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{71}{1920}x^5 + \frac{31}{960}x^6 - \text{etc.};$$

donc

$$av = \delta U - \frac{1}{24}\delta^3 U + \frac{1}{24}\delta^4 U - \frac{71}{1920}\delta^5 U + \frac{31}{960}\delta^6 U - \text{etc.}$$

$$v = f\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \\ = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} f(x) \\ = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} f(x)$$

Conservons le premier terme δU de ce développement, mais substituons dans les termes suivans la valeur $U = U^0 + \delta U^0$, nous aurons

$$\alpha v = \delta U - \frac{1}{24} \delta^3 U^0 + \frac{3}{640} \delta^5 U^0 - \frac{3}{640} \delta^6 U^0 + \text{etc.}$$

Dans cette suite, conservons les deux premiers termes $\delta U - \frac{1}{24} \delta^3 U^0$, et substituons dans les suivans $U^{00} + \delta U^{00}$ à la place de U^0 , nous aurons de nouveau

$$\alpha v = \delta U - \frac{1}{24} \delta^3 U^0 + \frac{3}{640} \delta^5 U^{00} - \text{etc.}$$

Cette suite prend ainsi une forme très-convergente, mais il reste à s'assurer de la loi que paraissent indiquer les premiers termes, et à déterminer d'une manière générale celle de leurs coefficients. Il faut donc faire voir qu'au moyen des coefficients n' , n'' , n''' , etc. dont la loi sera déterminée, on aura généralement

$$\alpha v = \delta U - n' \delta^3 U^0 + n'' \delta^5 U^{00} - n''' \delta^7 U^{000} + \text{etc.}$$

61. Reprenons pour cet effet l'équation symbolique $\alpha \frac{dU}{d\phi} = U l(1 + \delta)$ ou $\alpha u = U l(1 + \delta)$, on en tire

$$\delta U = \frac{\alpha u \delta}{l(1 + \delta)}, \quad \delta^2 U = \frac{\alpha u \delta^2}{l(1 + \delta)}, \quad \delta^3 U = \frac{\alpha u \delta^3}{l(1 + \delta)}, \quad \text{etc.}$$

Mais d'un autre côté on a

$$U^0 = \frac{U}{1 + \delta}, \quad U^{00} = \frac{U}{(1 + \delta)^2}, \quad U^{000} = \frac{U}{(1 + \delta)^3}, \quad \text{etc.};$$

donc

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{\alpha u \delta}{l(1 + \delta)}, \\ \delta^3 U^0 &= \frac{\alpha u \delta^3}{(1 + \delta) l(1 + \delta)}, \\ \delta^5 U^{00} &= \frac{\alpha u \delta^5}{(1 + \delta)^2 l(1 + \delta)}, \\ \delta^7 U^{000} &= \frac{\alpha u \delta^7}{(1 + \delta)^3 l(1 + \delta)}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

De là on voit que la suite $\delta U - n' \delta^3 U^0 + n'' \delta^5 U^{00} - \text{etc.}$ est

représentée par

$$\frac{au\delta}{l(1+\delta)} - n' \cdot \frac{au\delta^3}{(1+\delta)l(1+\delta)} + n'' \cdot \frac{au\delta^5}{(1+\delta)^2 l(1+\delta)} - n''' \cdot \frac{au\delta^7}{(1+\delta)^3 l(1+\delta)} + \text{etc.}$$

Si donc on veut que cette suite soit équivalente à av qui est représenté par $au(1+\delta)^{\frac{1}{2}}$, il faudra qu'on ait l'équation identique

$$l(1+\delta) = \frac{\delta}{(1+\delta)^{\frac{1}{2}}} - n' \cdot \frac{\delta^3}{(1+\delta)^{\frac{3}{2}}} + n'' \cdot \frac{\delta^5}{(1+\delta)^{\frac{5}{2}}} - n''' \cdot \frac{\delta^7}{(1+\delta)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.}$$

Soit $\frac{\delta^2}{1+\delta} = z^2$, le second membre devient $z - n'z^3 + n''z^5 - \text{etc.}$, et le premier se réduit à $2l[\frac{1}{2}z + \sqrt{(1 + \frac{1}{4}z^2)}]$. Or on sait que

$$\log[x + \sqrt{(1+xx)}] = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

et qu'ainsi la quantité $2 \log[\frac{1}{2}z + \sqrt{(1 + \frac{1}{4}z^2)}]$ se développe en cette suite,

$$z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^5}{5 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^7}{7 \cdot 2^6} + \text{etc.};$$

donc l'équation supposée a effectivement lieu en donnant aux coefficients n' , n'' , n''' , etc. les valeurs

$$n' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^2}, \quad n'' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^4}, \quad n''' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^6}, \quad \text{etc.}$$

donc on a en général,

$$av = \delta U - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^3 U}{3 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\delta^5 U}{5 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\delta^7 U}{7 \cdot 2^6} + \text{etc.},$$

série qui procède suivant une loi évidente, et dans laquelle chaque coefficient est moindre que le quart du précédent.

62. Si on fait $av = P$, et qu'on désigne par P° , P^∞ , etc. ce que devient la fonction P lorsqu'au lieu de ϕ on met $\phi - \alpha$, $\phi - 2\alpha$, etc., on déduira de l'équation précédente une valeur de δU de la forme

$$\delta U = P + m' \delta^2 P^\circ + m'' \delta^4 P^\infty + m''' \delta^6 P^{\infty\infty} + \text{etc.},$$

et les coefficients m' , m'' , m''' , etc. se déduiront des coefficients n' , n'' , n''' , etc., au moyen du développement de la fraction

$$\frac{1}{1 - n'x + n''x^2 - n'''x^3 + \text{etc.}} = 1 + m'x + m''x^2 + m'''x^3 + \text{etc.};$$

de

de sorte qu'on aura

$$m' = n' = \frac{1}{24},$$

$$m'' = m'n' - n'' = -\frac{17}{5760},$$

$$m''' = m'n' - m'n'' + n''' = \frac{367}{967680}$$

etc.

Ainsi la valeur de δU s'exprime par la fonction P , au moyen de l'équation générale

$$\delta U = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^0 - \frac{17}{5760} \delta^4 P^0 + \frac{367}{967680} \delta^6 P^0 - \text{etc.},$$

laquelle pourrait être continuée, suivant la même loi, aussi loin qu'on voudra.

63. L'équation par laquelle la fonction αv se déduit de U , peut être représentée ainsi,

$$\alpha v = 2U l \left[\frac{1}{2} \delta + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \delta^2} \right],$$

pourvu qu'après avoir développé le second membre suivant les puissances de δ , on change $U\delta$, $U\delta^3$, $U\delta^5$, etc., respectivement, en δU , $\delta^3 U^0$, $\delta^5 U^0$, etc.

Au moyen de cette équation, on en peut former d'autres non moins remarquables.

Désignons par $U(\varphi + \frac{1}{2}\alpha)$ ce que devient la fonction U ou $U(\varphi)$, lorsqu'au lieu de φ on met $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$; alors on aura $v = \frac{dU(\varphi + \frac{1}{2}\alpha)}{d\varphi}$, et l'équation précédente donne

$$\alpha \frac{dU(\varphi + \frac{1}{2}\alpha)}{d\varphi} = 2U l \left[\frac{1}{2} \delta + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \delta^2} \right].$$

Dans celle-ci mettons encore $\varphi + \frac{1}{2}\alpha$ au lieu de φ , nous aurons

$$\alpha \frac{dU(\varphi + \alpha)}{d\varphi} = 2U(\varphi + \frac{1}{2}\alpha) l \left[\frac{1}{2} \delta + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \delta^2} \right];$$

différentiant de part et d'autre par rapport à φ , et observant que $U(\varphi + \alpha)$ n'est autre chose que U' , on aura

$$\alpha \frac{dU'}{d\varphi^2} = 2 \cdot \frac{dU(\varphi + \frac{1}{2}\alpha)}{d\varphi} l \left[\frac{1}{2} \delta + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \delta^2} \right],$$

ou en substituant dans le second membre la valeur de $\frac{dU(\phi + \frac{1}{2}\alpha)}{d\phi}$,

$$\alpha^2 \frac{ddU'}{d\phi^2} = 4U l^2 [\frac{1}{2} \delta + \sqrt{(1 + \frac{1}{4} \delta^2)}].$$

Mettant dans celle-ci $\phi - \alpha$ au lieu de ϕ , on a enfin

$$\alpha^2 \frac{ddU}{d\phi^2} \text{ ou } \alpha^2 \frac{du}{d\phi} = 4U^0 l^2 [\frac{1}{2} \delta + \sqrt{(1 + \frac{1}{4} \delta^2)}].$$

Supposons donc qu'on ait $4l^2 [\frac{1}{2} \delta + \sqrt{(1 + \frac{1}{4} \delta^2)}]$, ou

$$\begin{aligned} & \left(\delta - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^3}{3 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\delta^5}{5 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\delta^7}{7 \cdot 2^6} \right) \\ &= \delta^2 - N' \delta^4 + N'' \delta^6 - N''' \delta^8 + \text{etc.}; \end{aligned}$$

et la vraie valeur de $\alpha^2 \frac{du}{d\phi}$, déduite de notre équation symbolique, sera

$$\alpha^2 \frac{du}{d\phi} = \delta^2 U^0 - N' \delta^4 U^{00} + N'' \delta^6 U^{000} - N''' \delta^8 U^{0000} + \text{etc.}$$

64. Réciproquement on tirera de cette équation la valeur de $\delta^2 U^0$ exprimée au moyen de la fonction donnée $\alpha^2 \frac{du}{d\phi}$ que nous désignerons par Q; cette valeur sera de la forme

$$\delta^2 U^0 = Q + M' \delta^2 Q^0 + M'' \delta^4 Q^{00} + M''' \delta^6 Q^{000} + \text{etc.},$$

dans laquelle les coefficients M' , M'' , M''' , etc. se déduisent des coefficients N' , N'' , N''' , etc., au moyen de l'équation

$$\frac{1}{1 - N'x + N''x^2 - N'''x^3 + \text{etc.}} = 1 + M'x + M''x^2 + M'''x^3 + \text{etc.}$$

On voit aussi que ces mêmes coefficients pourraient se former par le carré de la suite déjà connue, au moyen de l'équation

$$(1 + m'x + m''x^2 + m'''x^3 + \text{etc.})^2 = 1 + M'x + M''x^2 + M'''x^3 + \text{etc.}$$

On aura de cette manière,

$$M' = \frac{1}{12}, \quad M'' = -\frac{1}{240}, \quad M''' = \frac{31}{60480}, \quad \text{etc.};$$

ce qui donne enfin,

$$\delta^2 U^0 = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^0 - \frac{1}{240} \delta^4 Q^{00} + \frac{31}{60480} \delta^6 Q^{000} - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 f_{\phi-\alpha} = \alpha^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f}{\partial \phi^2} - \frac{1}{240} \frac{\Delta^4 f}{\partial \phi^4} + \frac{31}{60480} \frac{\Delta^6 f}{\partial \phi^6} - \dots \right]$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_x &= \alpha^2 \left(f_{x+\alpha} + \frac{1}{12} \Delta^2 f_x - \frac{1}{240} \Delta^4 f_{x-\alpha} + \dots \right) \\ &= \alpha^2 \left(f_x + \frac{1}{12} (\Delta^2 f_x - \frac{1}{20} \Delta^4 f_x) - \dots \right) \end{aligned}$$

65. L'analyse précédente nous a conduits à deux formules très-remarquables; l'une pour calculer la valeur de δU par le moyen de la quantité connue $P = \alpha v$, où v est ce que devient u , en mettant $\phi + \frac{1}{2}\alpha$ au lieu de ϕ ; l'autre pour calculer la valeur de $\delta^2 U^0$ par le moyen de la quantité connue $Q = \alpha^2 \frac{du}{d\phi}$.

La première formule est

$$\delta U = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^0 - \frac{17}{5760} \delta^4 P^{00} + \frac{367}{945 \cdot 2^{10}} \delta^6 P^{000} - \text{etc.},$$

et la loi générale de ses coefficients est la même que celle de la suite

$$1 + \frac{1}{24} x - \frac{17}{5760} x^2 + \frac{367}{945 \cdot 2^{10}} x^3 - \text{etc.},$$

qui vient du développement de la fonction

$$T = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{5 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{7 \cdot 2^6} + \text{etc.}};$$

la seconde formule est

$$\delta^2 U^0 = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^0 - \frac{1}{240} \delta^4 Q^{00} + \frac{31}{60480} \delta^6 Q^{000} - \text{etc.},$$

et la loi générale de ses coefficients est la même que celle de la suite

$$1 + \frac{1}{12} x - \frac{1}{240} x^2 + \frac{31}{60480} x^3 - \text{etc.},$$

qui est le carré de la suite précédente $1 + \frac{1}{24} x - \frac{17}{5760} x^2 + \text{etc.}$, ou qui vient du développement de la fonction T^2 .

66. Les deux formules dont nous venons de parler fournissent deux méthodes différentes pour construire une Table des valeurs de l'intégrale $U = \int u d\phi$, correspondantes aux valeurs de ϕ , formant la progression 0, α , 2α , 3α , etc.

Suivant la première formule, il faut calculer les valeurs successives de la fonction donnée $P = \alpha v$, v étant ce que devient u lorsqu'au lieu de ϕ on met $\phi + \frac{1}{2}\alpha$. Par cette substitution, P est toujours regardé comme une fonction donnée de ϕ , qu'il faudra calculer pour chaque valeur de ϕ comprise dans la Table. Ainsi pour les

$$\delta^2 P^0 = \delta P^0 - \delta P^0 = P^1 - 2P^0 + P^0$$

60 EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL.

valeurs successives $\phi, \phi + \alpha, \phi + 2\alpha$, etc., on aura les valeurs correspondantes P, P', P'' , etc., et ces valeurs étant portées dans la Table, chacune sur la même ligne horizontale que la valeur de ϕ à laquelle elle correspond, on en déduira leurs différences premières, secondes, troisièmes et quatrièmes, dont on fera autant de colonnes séparées, comme on le voit dans le tableau suivant :

$\phi - 2\alpha$	P^{00}	δP^{00}	$\delta^2 P^{00}$	$\delta^3 P^{00}$	$(\delta^4 P^{00})$
$\phi - \alpha$	P^0	δP^0	$(\delta^2 P^0)$	$\delta^3 P^0$	$\delta^4 P^0$
ϕ	$(= P)$	δP	$\delta^2 P$	$\delta^3 P$	$\delta^4 P$
$\phi + \alpha$	P'	$\delta P'$	$\delta^2 P'$	$\delta^3 P'$	
$\phi + 2\alpha$	P''	$\delta P''$	$\delta^2 P''$		
$\phi + 3\alpha$	P'''	$\delta P'''$			
$\phi + 4\alpha$	P^{iv}				

Handwritten notes: $\frac{1}{113}$, $\frac{1}{113} + \frac{1}{113} = \frac{2}{113}$, $\frac{1}{1720}$, $\frac{1}{1720} + \frac{1}{1720} = \frac{2}{1720}$, $\frac{1}{5760} = \frac{1}{339 \frac{2}{17}}$

Chaque colonne se forme de la précédente par soustraction, et renferme un terme de moins, de sorte qu'il faut que la colonne des P ait été prolongée jusqu'aux P^{iv} , pour que la différence $\delta^4 P$ puisse être connue et placée sur la ligne des ϕ et P .

Lorsqu'on aura formé pour chaque valeur de la variable ϕ , les quantités $P, \delta P, \delta^2 P, \delta^3 P, \delta^4 P$, on en conclura pour la même variable ϕ , la valeur de la différence δU , laquelle sera

$$\delta U = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^0 - \frac{17}{5760} \delta^4 P^{00} + \text{etc.}$$

67. Il faudra faire attention aux indices qui affectent les différents termes de cette formule, et en vertu desquels le $\delta^2 P^0$ doit être pris dans la ligne immédiatement au-dessus de celle où est P , le $\delta^4 P^{00}$ une ligne encore au-dessus, et ainsi de suite.

En général l'intervalle α doit être pris assez petit pour que la suite précédente soit très-convergente et qu'on n'ait besoin que de ses deux premiers termes $P + \frac{1}{24} \delta^2 P^0$; le troisième $-\frac{17}{5760} \delta^4 P^{00}$ servira seulement à diriger l'approximation pour savoir précisément sur combien de décimales on doit compter, et il faudra par conséquent que ce terme soit moindre qu'une demi-unité du dernier ordre de décimales auquel on veut s'arrêter dans la valeur de δU .

Il pourra arriver cependant que dans quelques parties de la Table

$$\delta U = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^0 - \frac{1}{1720} \cdot \left(1 + \frac{1}{1720}\right) \cdot \delta^4 P^{00}$$

qu'on veut construire, le terme dont il s'agit soit d'une ou de plusieurs unités décimales du dernier ordre; alors il faudra en tenir compte, et juger de ce qu'on néglige par le terme suivant de la série qui est $+\frac{367}{945 \times 2^{10}} \delta^6 P^{\infty}$, ce qui obligerait de prolonger la colonne des différences jusqu'au sixième rang.

68. Ayant fixé d'avance le nombre des décimales avec lequel on veut exprimer les différences δU , on calculera $\frac{1}{24} \delta^2 P^0$ en se bornant au nombre de décimales fixé, et négligeant le reste de la division par 24; mais pour plus d'exactitude, il sera bon de prendre toujours l'entier le plus approché du quotient, et de tenir compte du resté dans l'opération suivante. Supposons, par exemple, que $\delta^2 P^0$ divisé par 24, donne le quotient q et le reste r ; alors dans l'opération suivante, pour former $\delta U'$, on divisera $\delta^2 P + r$ par 24, ce qui donnera le quotient q' et le reste r' , et ainsi de suite. Cette manière d'opérer, dont nous avons fait l'épreuve, donne des résultats plus exacts et empêche les erreurs de se multiplier.

69. Cette première méthode suppose que la quantité P est calculée pour chaque valeur de ϕ , avec une grande précision, et même avec une ou deux décimales de plus qu'on n'en veut avoir dans la valeur de U ; or la quantité P , peu différente de la différence première δU , est souvent d'une grandeur telle qu'il faudrait la calculer par des Tables de logarithmes à dix décimales, ce qui rendrait les opérations fort longues. Si l'on se propose, par exemple, de calculer les fonctions elliptiques E et F avec dix décimales, et pour des amplitudes croissantes de demi-degré en demi-degré, les différences δF , δE devront être calculées avec douze décimales, et elles contiendront le plus souvent dix chiffres significatifs, ce qui exigera l'emploi de logarithmes qui aient au moins dix décimales.

70. On pourra ordinairement obtenir des résultats aussi exacts et avec moins de peine, par le moyen de la fonction $Q = \alpha^2 \frac{du}{d\phi}$ qui sert à déterminer les différences secondes $\delta^2 U$. C'est l'objet de la seconde méthode que nous avons à exposer.

Il faudra alors faire usage de la formule

$$\delta^2 U^0 = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^0 - \frac{1}{240} \delta^4 Q^{00} + \frac{31}{60480} \delta^6 Q^{000} - \text{etc.},$$

et on prendra α assez petit pour que la suite se réduise sensiblement aux deux premiers termes, ce qui aura lieu si le troisième $\frac{1}{240} \delta^4 Q^{00}$ est partout moindre qu'une demi-unité du dernier ordre de décimales auquel on s'arrête dans le calcul des quantités $\delta^2 U$.

On voit qu'en attribuant une valeur déterminée à φ , et prenant la quantité Q sur la même ligne, il faudra prendre $\delta^2 Q^0$ sur la ligne supérieure pour former la somme $Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^0$; cette somme représentant $\delta^2 U^0$, devra être portée également sur la ligne supérieure qui répond à la variable $\varphi - \alpha$.

La colonne des $\delta^2 U$ étant ainsi formée, il restera à avoir la valeur de δU correspondante à $\varphi = 0$, et c'est ce qu'on obtiendra immédiatement par la première formule. Au moyen de cette valeur et de la colonne des différences secondes, on formera la colonne des différences premières δU , et de celle-ci on conclura de même par addition, les valeurs successives de U .

71. Cette seconde méthode sera en général d'une pratique plus facile que la première, parce que la fonction Q est beaucoup plus petite que P et n'a pas besoin d'être déterminée avec un aussi grand nombre de chiffres significatifs, ce qui permettra d'employer pour ces calculs des Tables de logarithmes moins étendues.

Cependant comme les erreurs des différences secondes s'accroissent suivant la progression des nombres triangulaires, dans les résultats qu'on en déduit pour les fonctions principales, il faudra en général exprimer les quantités Q avec une décimale de plus que les quantités P ; il faudra aussi, dans le cours de l'opération, calculer directement à des intervalles déterminés, la différence première δU , afin de vérifier et de pouvoir corriger les résultats produits par les différences secondes.

Nous donnerons ci-après quelques autres préceptes pour tirer de

ces méthodes le plus grand degré d'approximation qu'elles peuvent offrir. Nous n'ajouterons ici que le tableau de l'opération qu'il faut exécuter pour ajouter un terme à la colonne des U.

72. Voici, dans la première méthode, le tableau figuré de l'état où le calcul est resté, après avoir trouvé la valeur de la fonction U qui répond à la variable ϕ .

Variable.	Fonction.	Diff. I.	Auxiliaire.	Diff. I.	II.
$\phi - 3\alpha$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$P^{\circ\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ\circ}$
$\phi - 2\alpha$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$P^{\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ}$
$\phi - \alpha$	U°	δU°	P°	δP°	$\delta^2 P^{\circ}$
ϕ	U	δU	P	δP	
$\phi + \alpha$	U'		P'		

Dans ce dernier état, les colonnes sont terminées, comme les barres l'indiquent, par les termes ϕ , U, δU° , P, δP° , $\delta^2 P^{\circ}$. Pour aller plus loin, il faut calculer l'auxiliaire P' ou $\alpha\alpha'$ qui répond à la variable $\phi + \alpha$; connaissant P' , on formera dans les colonnes suivantes les termes δP , $\delta^2 P^{\circ}$; d'où l'on tirera $\delta U = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^{\circ}$, et ensuite $U' = U + \delta U$, ce qui ajoutera un terme à toutes les colonnes.

73. Nous avons supposé que le troisième terme $-\frac{17}{5760} \delta^4 P^{\circ\circ}$ est négligeable dans la valeur de δU ; s'il fallait en tenir compte, la colonne des P et les colonnes suivantes devraient être avancées d'un terme de plus, pour qu'on pût connaître la différence $\delta^4 P^{\circ\circ\circ}$ qui entre dans la valeur de δU° . Voici donc quel serait alors le dernier état du calcul, après avoir déterminé δU° et U.

Variable.	Fonction.	Diff. I.	Auxiliaire.	Diff. I.	II.	III.	IV.
$\phi - 3\alpha$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$P^{\circ\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ\circ}$	$\delta^3 P^{\circ\circ\circ}$	$\delta^4 P^{\circ\circ\circ}$
$\phi - 2\alpha$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$P^{\circ\circ}$	$\delta P^{\circ\circ}$	$\delta^2 P^{\circ\circ}$	$\delta^3 P^{\circ\circ}$	$\delta^4 P^{\circ\circ}$
$\phi - \alpha$	U°	δU°	P°	δP°	$\delta^2 P^{\circ}$	$\delta^3 P^{\circ}$	
ϕ	U	δU	P	δP	$\delta^2 P$		
$\phi + \alpha$	U'		P'	$\delta P'$			
$\phi + 2\alpha$			P''				

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL.

Pour ajouter un terme au-dessous des barres qui marquent le dernier état des choses, il faut commencer par calculer l'auxiliaire $P'' = \alpha v''$ qui répond à la variable $\phi + 2\alpha$; connaissant P'' , on formera les différences $\delta P'$, $\delta^2 P$, $\delta^3 P^\circ$, $\delta^4 P^\circ$, au moyen desquelles on connaîtra $\delta U = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^\circ - \frac{17}{5760} \delta^4 P^\circ$, et ensuite $U' = U + \delta U$.

74. La marche de l'opération est à peu près semblable dans la seconde méthode. Supposons d'abord qu'on s'est assuré que les $\delta^4 Q$ sont négligeables et qu'ainsi on a, avec une exactitude suffisante, $\delta^2 U^\circ = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^\circ$; on pourra représenter comme il suit l'état des choses, lorsque le calcul a été conduit jusqu'au terme $\delta^2 U^\circ$ qui fait connaître δU° et ensuite U .

Variable.	Fonction.	Diff. I.	II.	Auxiliaire.	Diff. I.	II.
$\phi - 3\alpha$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ\circ}$	$Q^{\circ\circ\circ}$	$\delta Q^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 Q^{\circ\circ\circ}$
$\phi - 2\alpha$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ}$	$Q^{\circ\circ}$	$\delta Q^{\circ\circ}$	$\delta^2 Q^{\circ\circ}$
$\phi - \alpha$	U°	δU°	$\delta^2 U^\circ$	Q°	δQ°	$\delta^2 Q^\circ$
ϕ	U	δU		Q	δQ	
$\phi + \alpha$	U'			Q'		

Pour aller plus loin, il faut calculer l'auxiliaire Q' égale à ce que devient la fonction $\alpha^2 \frac{du}{d\phi}$ en y substituant $\phi + \alpha$ au lieu de ϕ ; connaissant Q' , on connaîtra δQ , $\delta^2 Q^\circ$ et $\delta^2 U^\circ$; enfin au moyen de $\delta^2 U^\circ$, on connaîtra δU et U' , ce qui ajoutera un nouveau terme à toutes les colonnes.

75. S'il fallait avoir égard aux quatrièmes différences, on ajouterait un terme de plus à la colonne des quantités Q et aux colonnes suivantes. Voici alors quel serait le dernier état des choses, lorsqu'on est parvenu à déterminer U au moyen de la valeur.....

$$\delta^2 U^\circ = Q^\circ + \frac{1}{12} \delta^2 Q^\circ - \frac{1}{240} \delta^4 Q^\circ.$$

$$\sim \delta^2 U^\circ = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^\circ - \frac{1}{240} \delta^4 Q^\circ + \dots = (U' - 2U + U'') + \dots$$

Variable.

$$U' = 2U - U'' + Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^\circ$$

$$\sim \Delta^4 Q^\circ$$

$$R_1 \quad 2U' - 12 \cdot 2U' + 2 + 12(2^\circ - 2^\circ) \Big/ (2^\circ - 2^\circ + 2^\circ)$$

Variable.	Fonction.	Diff. I.	II.	Auxiliaire.	Diff. I.	II.	III.	IV.
$\varphi - 3a$	$U^{\circ\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ\circ}$	$Q^{\circ\circ\circ}$	$\delta Q^{\circ\circ\circ}$	$\delta^2 Q^{\circ\circ\circ}$	$\delta^3 Q^{\circ\circ\circ}$	$\delta^4 Q^{\circ\circ\circ}$
$\varphi - 2a$	$U^{\circ\circ}$	$\delta U^{\circ\circ}$	$\delta^2 U^{\circ\circ}$	$Q^{\circ\circ}$	$\delta Q^{\circ\circ}$	$\delta^2 Q^{\circ\circ}$	$\delta^3 Q^{\circ\circ}$	
$\varphi - a$	U°	δU°		Q°	δQ°	$\delta^2 Q^{\circ}$		
φ	U			Q	δQ			
$\varphi + a$				Q'				

Pour aller plus loin, on calculera l'auxiliaire Q'' qui répond à la variable $\varphi + 2a$; on en déduira les différences successives $\delta Q'$, $\delta^2 Q$, $\delta^3 Q^{\circ}$, $\delta^4 Q^{\circ\circ}$, au moyen desquelles on connaîtra $\delta^2 U^{\circ} = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^{\circ} - \frac{1}{240} \delta^4 Q^{\circ\circ}$, ensuite δU et U' , ce qui ajoutera un terme à toutes les colonnes.

Dans cette méthode, on ne néglige que les différences $\delta^6 Q$; lesquelles sont de l'ordre a^8 , puisque Q est de l'ordre a^2 ; on pourra donc fixer *a priori* le nombre de décimales qu'on devra admettre dans l'expression des fonctions U ; mais nous avons déjà fait observer que les erreurs sur les différences secondes se multiplient comme les nombres triangulaires; ainsi il faudra se procurer, à des intervalles déterminés, des valeurs exactes de la fonction principale U ou de sa différence première δU , afin de connaître et de corriger les petites erreurs qui auraient pu s'accumuler par le progrès des opérations.

§ III. Application des méthodes précédentes aux fonctions elliptiques E et F.

76. Les méthodes précédentes s'appliquent immédiatement aux fonctions E et F, puisque ces fonctions sont exprimées par les intégrales $E = \int \Delta d\varphi$, $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, où l'on a $\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}$; on construira donc, par leur moyen, les Tables particulières qui conviennent à une valeur déterminée du module c , ou de l'angle θ dont ce module est le sinus. Mais il faudra former un système de Tables semblables, qui correspondent à une suite de valeurs de l'angle θ , aussi peu différentes entr'elles qu'il sera possible, afin qu'on

puisse assigner, dans chaque cas particulier, les valeurs de E et de F qui répondent à des valeurs données des angles θ et φ .

77. Pour expliquer plus clairement l'usage de nos formules, nous les appliquerons à la fonction E, dans le cas de $c = \sin 45^\circ$, qui tient le milieu entre les limites $c = 0$, $c = \sin 90^\circ$. Nous supposons en même temps qu'on fait $\alpha =$ à un demi-degré $= \frac{\pi}{360}$, c'est-à-dire que la Table des fonctions $E = \int \Delta d\varphi$ doit être construite pour toutes les valeurs de φ , de demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 90° .

Des deux méthodes que nous avons données pour construire une semblable Table, nous choisirons celle qui sert à calculer les différences secondes de la fonction E par le moyen d'une auxiliaire

$$Q = \alpha^2 \frac{d\Delta}{d\varphi} = -\frac{1}{2} c^2 \alpha^2 \frac{\sin 2\varphi}{\Delta}, \text{ d'où l'on déduit}$$

$$\delta^2 E^\circ = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^\circ.$$

Cette valeur suppose que le terme suivant de la série, contenant $\delta^4 Q^\circ$, est négligeable; or c'est ce qui a lieu dans le cas présent, et ce qui aura toujours lieu à l'égard de la fonction E, à moins que les quantités c et $\sin \varphi$ ne soient toutes deux très-rapprochées de l'unité.

Pour calculer les valeurs successives de Q, soit $\mathcal{E} = \frac{1}{2} c^2 \alpha^2$, et soit λ un angle déterminé par la valeur $\sin \lambda = c \sin \varphi$, on aura $\Delta = \cos \lambda$, et en omettant le signe de Q,

$$Q = \frac{\mathcal{E} \sin 2\varphi}{\cos \lambda};$$

dans l'exemple proposé, on aura $\mathcal{E} = \frac{1}{4} \alpha^2 = \left(\frac{\pi}{720}\right)^2$, et

$$\log \mathcal{E} = 5.27963 \ 47486.$$

78. Nous nous proposons de calculer jusqu'à douze décimales les valeurs de E; alors les quantités Q auront huit chiffres significatifs au plus, de sorte qu'elles pourront être calculées par les Tables de logarithmes à dix décimales, qu'on réduira à huit, et même quelquefois par les Tables à sept décimales seulement. L'opération prin-

principale, pour avoir $\log Q$, est de déduire $\log \cos \lambda$ de la valeur connue de $\log \sin \lambda$; il suffira le plus souvent, pour cet objet, de tenir compte des premières différences données par les Tables, dans l'hypothèse de huit décimales seulement. Soit A la différence qui répond à $l \sin a$, et B la différence qui répond à $l \cos a$, a étant l'angle de la Table, immédiatement plus petit que λ ; si l'on fait $l \sin \lambda = l \sin a + r$, on aura $l \cos \lambda = l \cos a - \frac{Br}{A}$.

Cette formule sera suffisante presque dans tous les cas, et le calcul n'en sera pas bien compliqué, parce que les différences B et A , ainsi que r , peuvent être prises en bornant les logarithmes à huit décimales.

Cependant si on voulait calculer $l \cos \lambda$ de manière que le résultat fût exact jusqu'à la dixième ou la douzième décimale, voici le moyen qu'on pourrait employer.

Soit a l'angle de la Table qui approche le plus de l'angle λ , et supposons qu'on ait à la fois

$$l \sin \lambda = l \sin a \pm r, \quad l \cos \lambda = l \cos a \mp R;$$

il s'agit de trouver la différence R par le moyen de la différence donnée r ; pour cela on aura la formule

$$R = r \operatorname{tang}^2 a \left(1 \pm \frac{Mr}{\cos^2 a} \right),$$

ou

$$\log R = \log (r \operatorname{tang}^2 a) \pm (r + r \operatorname{tang}^2 a).$$

79. Les règles précédentes pour calculer $\log Q$, s'appliquent à toutes les valeurs de φ dans l'exemple proposé, parce qu'on aura toujours $\operatorname{tang} a < 1$; mais si c et $\sin \varphi$ étaient tous deux très-proches de l'unité, $\operatorname{tang} a$ pourrait devenir très-grand, et il faudrait employer un autre moyen pour calculer la valeur de Δ qui fait connaître celle de l'auxiliaire Q .

Alors Δ devra être mis sous la forme $\Delta = \sqrt{b^2 + c^2 \cos^2 \varphi}$, et si on prend un angle μ tel qu'on ait

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{c \cos \varphi}{b} = \operatorname{tang} \theta \cos \varphi,$$

il en résultera $\Delta = \frac{b}{\cos \mu}$, et de là $Q = \gamma \sin 2\varphi \cos \mu$, en faisant

$\gamma = \frac{\frac{1}{2} c^2 a^2}{b}$; dans l'exemple proposé, on aura

$$\log \gamma = 5.43014 \ 97464.$$

Il s'agit donc, pour avoir Q , de déduire $\log \cos \mu$ de la valeur connue de $\log \tan \mu$; c'est ce qu'on peut faire, comme ci-dessus, avec une exactitude presque toujours suffisante, par le moyen des différences premières qui répondent à $\log \cos \mu$ et $\log \tan \mu$. Si on veut obtenir une plus grande précision, soit a l'angle de la Table le plus approché de μ ; si l'on fait à la fois

$$l \tan \mu = l \tan a \pm r, \quad l \cos \mu = l \cos a \mp R,$$

on déduira la différence R de la différence connue r , par la formule

$$R = r \sin^2 a (1 \pm Mr \cos^2 a),$$

ou

$$\log R = \log (r \sin^2 a) \pm r \mp r \sin^2 a.$$

Cette manière de calculer $l \cos \mu$ qui fait connaître Δ et Q , n'est sujette à aucune exception; elle peut être employée dans toute l'étendue des Tables qu'on veut construire, quels que soient les angles θ et ϕ ; en effet, on voit que l'angle μ qui est θ lorsque $\phi = 0$, diminue continuellement à mesure que ϕ augmente, et finit par être nul lorsque $\phi = 90^\circ$.

80. Par la formule $Q = \gamma \sin 2\phi \cos \mu$, on voit que l'auxiliaire Q est nulle aux deux limites de la Table, savoir, lorsque $\phi = 0$ et lorsque $\phi = 90^\circ$; il y a donc entre ces deux points une valeur de Q qui est un *maximum*; ce *maximum* se détermine par l'équation $\tan \phi = \sqrt{\frac{1}{\cos \theta}} = \sqrt{\frac{1}{b}}$ (c'est le point remarquable où l'on a $F\phi = \frac{1}{2} F^1$); alors $Q = \frac{\gamma \cos \theta}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta}$. Dans le cas de $\theta = 45^\circ$ que nous avons pris pour exemple, on trouve le *maximum* $Q = 0.00002 \ 2305094$, il répond à l'amplitude $\phi = 49^\circ \ 56'$ à peu près.

Pour la fonction F on a l'auxiliaire $Q = \gamma' \sin 2\phi \cos^3 \mu$, en faisant pour abréger $\gamma' = \frac{\gamma}{b^2}$; elle s'évanouit encore aux limites $\phi = 0$, $\phi = 90^\circ$, et son *maximum* a lieu lorsque $\tan^2 \phi = \tan^2 \theta + \sqrt{(1 + \tan^2 \theta + \tan^4 \theta)}$. Dans le cas de $\theta = 45^\circ$, on a

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 69

$\text{tang}^2 \varphi = 1 + \sqrt{3}$, ou à peu près $\varphi = 58^\circ 50'$, ce qui donne le *maximum* $Q = 0.00003\ 34082\ 54$.

81. Voici deux exemples du calcul de l'auxiliaire Q relative à la fonction E , que nous résoudrons chacun par les deux méthodes que nous avons exposées.

Soit 1°. $\varphi = 53^\circ 30'$; suivant la première méthode, on fera le calcul comme il suit, en supposant toujours $c = \sin 45^\circ$.

$$\begin{array}{rcl}
 c \dots & 9.84948 & 50022 \\
 \sin \varphi \dots & 9.74188 & 94971 \\
 \hline
 \sin \lambda \dots & 9.59137 & 44993 \\
 \sin a \dots & 9.59138 & 16478 \\
 \hline
 r = & & -71485 \\
 \hline
 r \dots & 4.85421 & 49 \\
 \text{tang}^2 a \dots & 9.25453 & 25 \\
 \hline
 l(r \text{ tang}^2 a) = & 4.10874 & 74 \\
 \hline
 r \dots = & & 71.5 \\
 r \text{ tang}^2 a \dots = & & 12.8 \\
 \hline
 \log R = & 4.10873 & 96
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 l \sin \lambda = l \sin a - r & & \\
 \cos a \dots & 9.96411 & 53965 \\
 R + & & 12845 \\
 \hline
 \cos \lambda \dots & 9.96411 & 66810 \\
 \mathcal{C} \dots & 5.27963 & 47486 \\
 \hline
 \frac{\mathcal{C}}{\cos \lambda} \dots & 5.31551 & 80676 \\
 \hline
 \sin 2\varphi \dots & 9.96402 & 60827 \\
 \log Q = & 5.27954 & 41503 \\
 Q = & 0.00001 & 90346\ 18
 \end{array}$$

Par les formules de la seconde méthode, on procédera ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
 \text{tang} \mu \dots & 9.92110 & 65899 \\
 \text{tang} a \dots & 9.92111 & 81813 \\
 \hline
 r = - & & 1\ 15914 \\
 \hline
 r \dots & 5.06413 & 6 \\
 \sin^2 a \dots & 9.61296 & 4 \\
 \hline
 l(r \sin^2 a) = & 4.67710 & 0 \\
 r - r \sin^2 a \dots & & 7 \\
 \hline
 \log R = & 4.67709 & 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \cos a \dots & 9.88536 & 35668 \\
 R + & & 47544 \\
 \hline
 \cos \mu \dots & 9.88536 & 83212 \\
 \gamma \dots & 5.43014 & 97464 \\
 \hline
 \sin 2\varphi \dots & 9.96402 & 60827 \\
 \log Q = & 5.27954 & 41503 \\
 Q = & 0.00001 & 90346\ 18
 \end{array}$$

Supposons 2°. $\varphi = 70^\circ$; le calcul fait par la première méthode

donnera les résultats suivans :

$ \begin{array}{r} c \dots 9.84948 \ 50022 \\ \sin \phi \dots 9.97298 \ 58164 \\ \sin \lambda \dots 9.82247 \ 08186 \\ \sin a \dots 9.82247 \ 52805 \\ \hline r = \dots 44619 \\ \\ r \dots 4.649520 \\ \tan^2 a \dots 9.897943 \\ \hline l(r \tan^2 a) = 4.547463 \\ r \dots - \quad 4.5 \\ r \tan^2 a \dots - \quad 3.5 \\ \hline \log R = 4.547455 \end{array} $	$ \begin{array}{r} l \sin \lambda = l \sin a - r \\ \cos a \dots 9.87350 \ 37413 \\ R \dots \quad 35274 \\ \hline \cos \lambda \dots 9.87350 \ 72687 \\ \ell \dots 5.27963 \ 47486 \\ \hline \quad 5.40612 \ 74799 \\ \sin 2\phi \dots 9.80806 \ 74967 \\ \log Q = 5.21419 \ 49766 \\ Q = 0.00001 \ 63755 \ 15 \end{array} $
---	--

Par la seconde méthode on trouvera ce qui suit :

$ \begin{array}{r} \tan \mu \dots 9.53405 \ 16846 \\ \tan a \dots 9.53402 \ 28281 \\ \hline r = \quad 2 \ 88565 \\ \\ r \dots 5.46024 \ 36 \\ \sin^2 a \dots 9.02000 \ 72 \\ \hline l(r \sin^2 a) = 4.48025 \ 08 \\ r - r \sin^2 a \dots \quad 2 \ 59 \\ \hline \log R = 4.48027 \ 67 \end{array} $	$ \begin{array}{r} l \tan \mu = l \tan a + r \\ \cos a \dots 9.97598 \ 07553 \\ R \dots \quad 30219 \\ \hline \cos \mu - 9.97597 \ 77334 \\ \gamma \dots 5.43014 \ 97464 \\ \sin 2\phi \dots 9.80806 \ 74967 \\ \log Q = 5.21419 \ 49765 \\ Q = 0.00001 \ 63755 \ 15 \end{array} $
--	--

On voit que ces deux méthodes s'accordent parfaitement. Les calculs ont été faits avec la même précision que si on voulait avoir la valeur de Q exacte jusqu'à la quatorzième décimale ; on pourra donc les faire avec deux décimales de moins , lorsqu'on ne voudra avoir que douze décimales exactes.

82. Il est facile, par les moyens indiqués , de former la colonne des auxiliaires Q et celles de leurs différences premières et secondes ,

lesquelles serviront à former la colonne des différences secondes $\delta^2 E$, d'après la formule

$$\delta^2 E^0 = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^0.$$

Mais pour avoir les différences premières δE , et ensuite les fonctions E elles-mêmes, il faut connaître le premier terme δE_0 qui répond à $\varphi = 0$; et ce premier terme est la même chose que $E\alpha$, puisqu'on a $E_0 = 0$.

Or la quantité $\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}$ étant développée en série, on en tire $\int \Delta d\varphi$ ou

$$E(\varphi) = \varphi - \frac{1}{2} c^2 \int d\varphi \sin^2 \varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} c^4 \int d\varphi \sin^4 \varphi - \text{etc.}$$

Soit $\sin \varphi = x$, on aura

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi = \int x^2 dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi = \int x^4 dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^9}{9} + \text{etc.}$$

Ces suites sont très-convergentes lorsque x est très-petit; si on fait donc $\varphi = \alpha = \frac{\pi}{360}$, on aura les valeurs suivantes, exactes jusqu'à la quinzième décimale :

$$E(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2} c^2 (3.34541 \ 42464) - \frac{1}{8} c^4 (\overline{9}.00525 \ 11),$$

$$F(\alpha) = \alpha + \frac{1}{2} c^2 (3.34541 \ 42464) + \frac{3}{8} c^4 (\overline{9}.00525 \ 11).$$

Les nombres en parenthèses désignent les logarithmes des coefficients, et la caractéristique $\overline{9}$, qu'on voit dans le troisième terme, indique une fraction décimale dont le premier chiffre significatif est au onzième rang. On a d'ailleurs

$$\alpha = 0.00872 \ 66462 \ 59971 \ 65.$$

83. Connaissant ainsi $E\alpha$ qui est la même chose que δE_0 , on pourra, comme nous l'avons dit, construire la Table dans son entier au moyen de la formule $\delta^2 E^0 = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^0$. Mais pour empêcher autant qu'il est possible, les erreurs dues au terme $\frac{1}{12} \delta^2 Q^0$ de s'accumuler, nous avons tenu compte des restes que donne la division de $\delta^2 Q^0$ par 12.

Pour cela nous avons joint à la colonne des secondes différences $\delta^2 Q$,

une autre colonne contenant deux nombres que nous désignons par q et r , et dont voici l'usage. Soit r° le terme qui précède r , et supposons qu'en divisant $\delta^2 Q + r^\circ$ par 12, le quotient soit q et le reste r , on fera constamment $\delta^2 E = Q' + q$, ou dans la ligne précédente, $\delta^2 E^\circ = Q + q^\circ$ (*).

84. Nous joignons ici la série entière des calculs faits d'après ces principes, pour obtenir, dans le cas de $c = \sin 45^\circ$, les valeurs de la fonction E , correspondantes à tous les degrés et demi-degrés de l'amplitude φ .

On peut observer que pour les mêmes valeurs de c et de φ , l'auxiliaire qui est Q pour la fonction E , devient $\frac{Q}{\Delta^2}$ pour la fonction F ; d'ailleurs Δ est toujours donné par l'opération même qui sert à trouver Q , puisqu'on a dans la première méthode $\Delta = \cos \lambda$, et dans la seconde $\Delta = \frac{b}{\cos \mu}$. Ainsi en construisant la Table des fonctions E pour un module donné, on peut construire simultanément la Table des fonctions F qui se rapporte au même module.

Comme le mode de procéder est le même dans l'une et l'autre Table, nous n'avons pas cru devoir joindre ici la Table particulière qui concerne la fonction F , d'autant que cette Table et celle des fonctions E , ont besoin d'une dernière rectification qui leur donne toute l'exactitude dont elles sont susceptibles.

(*) Peut-être serait-il encore plus exact d'ajouter à $\delta^2 Q$, non pas le reste précédent, mais la somme de tous les restes précédents. Soit cette somme $= s^\circ$, on prendrait pour q le quotient $\delta^2 Q + 2s^\circ$ divisé par 12, et pour s le reste, ayant soin de prendre s , positif ou négatif, < 6 , ou tout au plus $= 6$.

$$c = \sin 45^\circ$$

12 + 1/2 820

ϕ .	E.	δE .	$\delta^2 E$.	Q .	δQ .	$\delta^2 Q$.	q .	r .
0° 00'	0.00000 00000 00	872 65908 79	3322 70	0000 00	3322 75	62	5 + 2	
0.30	0.00872 65908 79	872 62586 09	6644 77	3322 75	3322 13	128	11 - 2	
1.00	0.01745 28494 88	872 55941 32	9965 57	6644 88	3320 95	189	16 - 5	
1.30	0.02617 84436 20	872 45975 75	13284 48	9965 73	3318 96	253	21 - 4	
2.00	0.03490 30411 95	872 32691 27	16600 86	13284 69	3316 43	316	26 0	
2.30	0.04362 63103 22	872 16090 41	19914 07	16601 12	3313 27	380	32 - 4	
3.00	0.05234 79193 63	871 96176 34	23223 49	19914 39	3309 47	444	37 - 4	
3.30	0.06106 73369 97	871 72952 85	26528 47	23223 86	3305 03	507	42 - 1	
4.00	0.06978 48322 82	871 46424 38	29828 38	26528 89	3299 96	569	47 + 4	
4.30	0.07849 94747 20	871 16596 00	33122 59	29828 85	3294 27	633	53 + 1	
5.00	0.08721 11343 20	870 83473 41	36410 48	33123 12	3287 94	698	58 + 3	
5.30	0.09591 94816 61	870 47062 93	39691 38	36411 06	3280 96	760	64 - 5	
6.00	0.10462 41879 54	870 07371 55	42964 70	39692 02	3273 36	825	68 + 4	
6.30	0.11332 49251 09	869 64406 85	46229 75	42965 38	3265 11	888	74 + 4	
7.00	0.12202 13657 94	869 18177 10	49485 92	46230 49	3256 23	952	80 - 4	
7.30	0.13071 31835 04	868 68691 18	52732 59	49486 72	3246 71	1015	84 + 3	
8.00	0.13940 00526 22	868 15958 59	55969 09	52733 43	3236 56	1081	90 + 4	
8.30	0.14808 16484 81	867 59989 50	59194 78	55969 99	3225 75	1143	96 - 5	
9.00	0.15675 76474 31	867 00794 72	62409 06	59195 74	3214 32	1208	100 + 3	
9.30	0.16542 77269 03	866 38385 66	65611 24	62410 06	3202 24	1273	106 + 4	
10.00	0.17409 15654 69	865 72774 42	65800 69	65612 30	3189 51	1336	112 - 4	
10.30	0.18274 88429 11	865 03973 73	71976 80	68801 81	3176 15	1401	116 + 5	
11.00	0.19139 92402 84	864 31996 93	75138 87	71977 96	3162 14	1466	123 - 5	
11.30	0.20004 24399 77	863 56858 06	78286 31	75140 10	3147 48	1531	127 + 2	
12.00	0.20867 81257 83	862 78571 75	81418 42	78287 58	3132 17	1595	133 + 1	
12.30	0.21730 59829 58	861 97153 33	84534 59	81419 75	3116 22	1660	138 + 5	
13.00	0.22592 56982 91	861 12618 74	87634 15	84535 97	3099 62	1725	144 + 2	
13.30	0.23453 69601 65	860 24984 59	90716 47	87635 59	3082 37	1791	149 + 5	
14.00	0.24313 94586 24	859 34268 12	93780 87	90717 96	3064 46	1856	155 + 1	
14.30	0.25173 28854 36	858 40487 25	96826 72	93782 42	3045 90	1921	160 + 2	
15.00	0.26031 69341 61	857 43660 53	99853 35	96828 32	3026 69	1988	166 - 2	
15.30	0.26889 13002 14	856 43807 18	1 02860 11	99855 01	3006 81	2052	171 - 2	
16.00	0.27745 56809 32	855 40947 07	1 05846 34	1 02861 82	2986 29	2120	177 - 6	
16.30	0.28600 97756 39	854 35100 73	1 08811 38	1 05848 11	2965 09	2185	182 - 5	
17.00	0.29455 32857 12	853 26289 35	1 11754 57	1 08813 20	2943 24	2251	187 + 2	
17.30	0.30308 59146 47	852 14534 78	1 14675 24	1 11756 44	2920 73	2318	193 + 4	
18.00	0.31160 73681 25	850 99859 54	1 17572 73	1 14677 17	2897 55	2385	199 + 1	
18.30	0.32011 73540 79	849 82286 81	1 20446 38	1 17574 72	2873 70	2451	204 + 4	
19.00	0.32861 55827 60	848 61840 43	1 23295 51	1 20448 42	2849 19	2518	210 + 2	
19.30	0.33710 17668 03	847 38544 92	1 26119 46	1 23297 61	2824 01	2587	216 - 3	
20.00	0.34557 56212 95	846 12425 46	1 28917 55	1 26121 62	2798 14	2653	221 - 2	
20.30	0.35403 68638 41	844 83507 91	1 31689 10	1 28919 76	2771 61	2720	227 - 6	
21.00	0.36248 52146 32	843 51818 81	1 34433 46	1 31691 37	2744 41	2789	232 - 1	
21.30	0.37092 03965 13	842 17385 35	1 37149 92	1 34435 78	2716 52	2857	238 0	
22.00	0.37934 21350 48	840 80235 43	1 39837 81	1 37152 30	2687 95	2924	244 - 4	
22.30	0.38775 01585 91	839 40397 62	1 42496 47	1 39840 25	2658 71	2994	249 + 2	

φ.	E.	ΔE.	Δ ² E.	Q.	ΔQ.	Δ ² Q.	q, r.
22°30'	0.38775 01585 91	839 40397 62	1 42496 47	1 39840 25	2658 71	2994	249 + 2
23.00	0.39614 41983 53	837 97901 15	1 45125 18	1 42498 96	2628 77	3061	255 + 3
23.30	0.40452 39884 68	836 52775 97	1 47723 28	1 45127 73	2598 16	3131	261 + 2
24.00	0.41288 92660 65	835 05052 69	1 50290 07	1 47725 89	2566 85	3199	267 - 3
24.30	0.42123 97713 34	833 54762 62	1 52824 88	1 50292 74	2534 86	3269	272 + 2
25.00	0.42957 52475 96	832 01937 74	1 55326 99	1 52827 60	2502 17	3339	278 + 5
25.30	0.43789 54413 70	830 46610 75	1 57795 71	1 55329 77	2468 78	3407	284 + 4
26.00	0.44620 01024 45	828 88815 04	1 60230 36	1 57798 55	2434 71	3478	299 + 2
26.30	0.45448 89839 49	827 28584 68	1 62630 23	1 60233 26	2390 93	3548	296 - 2
27.00	0.46276 18424 17	825 65954 45	1 64994 63	1 62633 19	2364 45	3618	301 + 4
27.30	0.47101 84378 62	824 00959 82	1 67322 83	1 64997 64	2328 27	3688	308 - 4
28.00	0.47925 85338 44	822 33636 99	1 69614 17	1 67325 91	2291 39	3759	313 - 1
28.30	0.48748 18975 43	820 64022 82	1 71867 97	1 69617 30	2253 80	3831	319 + 2
29.00	0.49568 82998 25	818 92154 91	1 74083 34	1 71871 10	2215 49	3900	325 + 2
29.30	0.50387 75153 16	817 18071 57	1 76259 77	1 74086 59	2176 49	3972	331 + 2
30.00	0.51204 93224 73	815 41811 80	1 78396 48	1 76263 08	2136 77	4044	337 + 2
30.30	0.52020 35036 53	813 63415 32	1 80492 75	1 78399 85	2096 33	4115	343 + 1
31.00	0.52833 98451 85	811 82922 57	1 82547 87	1 80496 18	2055 18	4187	349 + 0
31.30	0.53645 81374 42	810 00374 70	1 84561 12	1 82551 36	2013 31	4259	355 - 1
32.00	0.54455 81749 12	808 15813 58	1 86531 78	1 84564 67	1970 72	4331	361 - 2
32.30	0.55263 97562 70	806 29281 80	1 88459 13	1 86535 39	1927 41	4403	367 - 3
33.00	0.56070 26844 50	804 40822 67	1 90342 45	1 88462 80	1883 38	4476	373 - 3
33.30	0.56874 67667 17	802 50480 22	1 92181 01	1 90346 18	1838 62	4548	379 - 3
34.00	0.57577 18147 39	800 58299 21	1 93974 09	1 92184 80	1793 14	4620	385 - 3
34.30	0.58477 76446 60	798 64325 12	1 95720 97	1 93977 94	1746 94	4694	391 - 1
35.00	0.59276 40771 72	796 68604 15	1 97420 91	1 95724 88	1700 00	4766	397 + 1
35.30	0.60073 09375 87	794 71183 24	1 99073 19	1 97424 88	1652 34	4839	403 + 4
36.00	0.60867 80559 11	792 72110 05	2 00677 07	1 99077 22	1603 95	4912	410 - 4
36.30	0.61660 62669 16	790 71432 98	2 02231 85	2 00681 17	1554 83	4984	415 + 0
37.00	0.62451 24102 14	788 69201 13	2 03736 77	2 02236 00	1504 99	5059	422 - 5
37.30	0.63239 93303 27	786 65464 36	2 05191 12	2 03740 99	1454 40	5131	427 + 2
38.00	0.64026 58767 63	784 60273 24	2 06594 14	2 05195 39	1403 09	5204	434 - 2
38.30	0.64811 19040 87	782 53679 10	2 07945 13	2 06598 48	1351 05	5277	440 - 5
39.00	0.65593 72719 97	780 45733 97	2 09243 36	2 07949 53	1298 28	5350	445 + 5
39.30	0.66374 18453 94	778 36490 61	2 10488 07	2 09247 81	1244 78	5422	452 + 3
40.00	0.67152 54944 55	776 26002 54	2 11678 57	2 10492 59	1190 56	5496	458 + 3
40.30	0.67928 80947 09	774 14323 97	2 12814 11	2 11683 15	1135 60	5567	464 + 2
41.00	0.68702 95271 05	772 01509 86	2 13893 98	2 12818 75	1079 93	5641	470 + 3
41.30	0.69474 96780 92	769 87615 88	2 14917 44	2 13898 68	1023 52	5712	476 + 3
42.00	0.70244 84396 80	767 72698 44	2 15883 78	2 14922 20	966 40	5785	482 + 4
42.30	0.71012 57095 24	765 56814 66	2 16792 27	2 15888 60	908 55	5855	488 + 3
43.00	0.71778 13909 90	763 40022 39	2 17642 21	2 16797 15	850 00	5927	494 + 2
43.30	0.72541 53932 29	761 22380 18	2 18432 88	2 17647 15	790 73	5999	500 + 1
44.00	0.73302 76312 47	759 03947 30	2 19163 56	2 18437 88	730 74	6067	506 - 4
44.30	0.74061 80259 77	756 84783 74	2 19833 58	2 19168 62	670 07	6140	511 + 4
45.00	0.74818 65043 51	754 64950 16	2 20442 18	2 19838 69	608 67	6207	518 - 5

ϕ .	E.	δE .	$\delta^2 E$.	Q.	δQ .	$\delta^2 Q$.	q , r .
45° 00'	0.74818 65043 51	754 64950 16	2 20442 18	2 19838 69	-608 67	6207	518 -5
45.30	0.75573 29993 67	752 44507 98	2 20988 73	2 20447 36	546 60	6278	523 -3
46.00	0.76325 74501 65	750 23519 25	2 21472 49	2 20993 96	483 82	6345	529 -6
46.30	0.77075 98020 90	748 02045 76	2 21892 81	2 21477 78	420 37	6413	534 -1
47.00	0.77824 00067 66	745 80153 95	2 22248 99	2 21898 15	356 24	6481	540 +0
47.30	0.78569 80221 61	743 57904 96	2 22540 37	2 22254 39	291 43	6545	545 +5
48.00	0.79313 38126 57	741 35364 59	2 22766 28	2 22545 82	225 98	6613	552 -6
48.30	0.80054 73491 16	739 12598 31	2 22926 09	2 22771 80	159 85	6675	556 -3
49.00	0.80793 86089 47	736 89672 22	2 23019 14	2 22931 65	93 10	6741	561 +6
49.30	0.81530 75761 69	734 66653 08	2 23044 77	2 23024 75	+ 25 69	6800	567 +2
50.00	0.82265 42414 77	732 43608 31	2 23002 41	2 23050 44	- 42 31	6864	572 +2
50.30	0.82997 86023 08	730 20605 90	2 22891 41	2 23008 13	110 95	6924	577 +2
51.00	0.83728 06628 98	727 97714 49	2 22711 17	2 22897 18	180 19	6981	582 -1
51.30	0.84456 04343 47	725 75003 32	2 22461 12	2 22716 99	250 00	7039	587 -6
52.00	0.85181 79346 79	723 52542 20	2 22140 69	2 22466 99	320 39	7095	591 -3
52.30	0.85905 51888 99	721 30401 51	2 21749 30	2 22146 60	391 34	7150	596 -5
53.00	0.86626 62290 50	719 08652 21	2 21286 42	2 21755 26	462 84	7201	600 -4
53.30	0.87345 70942 71	716 87365 79	2 20751 53	2 21292 42	534 85	7254	604 +2
54.00	0.88062 58308 50	714 66614 26	2 20144 09	2 20757 57	607 39	7301	609 -5
54.30	0.88777 24922 76	712 46470 17	2 19463 66	2 20150 18	680 40	7350	612 +1
55.00	0.89489 71392 93	710 27006 51	2 18709 72	2 19469 78	753 90	7393	616 +2
55.30	0.90199 98399 44	708 08296 79	2 17881 85	2 18715 88	827 83	7437	620 -1
56.00	0.90908 06696 23	705 90414 94	2 16979 62	2 17888 05	902 20	7477	623 0
56.30	0.91613 97111 17	703 73435 32	2 16002 62	2 16985 85	976 97	7516	626 +4
57.00	0.92317 70546 49	701 57432 70	2 14950 45	2 16008 88	1052 13	7551	630 -5
57.30	0.93019 27979 19	699 42482 25	2 13822 79	2 14956 75	1127 64	7584	632 -5
58.00	0.93718 70461 44	697 28659 46	2 12619 29	2 13829 11	1203 48	7613	634 0
58.30	0.94415 99120 90	695 16040 17	2 11339 65	2 12625 63	1279 61	7643	637 -1
59.00	0.95111 15161 07	693 04700 52	2 09983 59	2 11346 02	1356 04	7665	639 -4
59.30	0.95804 19861 59	690 94716 93	2 08550 89	2 09989 98	1432 69	7687	640 +3
60.00	0.96495 14578 52	688 86166 04	2 07041 31	2 08557 29	1509 56	7705	642 +4
60.30	0.97184 00744 56	686 79124 73	2 05454 68	2 07047 73	1586 61	7719	644 -5
61.00	0.97870 79869 29	684 73670 05	2 03790 88	2 05461 12	1663 80	7730	644 -3
61.30	0.98555 53539 34	682 69879 17	2 02049 78	2 03797 32	1741 10	7737	644 +6
62.00	0.99238 23418 51	680 67829 39	2 00231 30	2 02056 22	1818 47	7740	645 +6
62.30	0.99918 91247 90	678 67598 09	1 98335 42	2 00237 75	1895 87	7741	646 -5
63.00	1.00597 58845 99	676 69262 67	1 96362 16	2 98341 88	1973 28	7736	644 +3
63.30	1.01274 28108 66	674 72900 51	1 94511 52	1 96368 60	2050 64	7727	644 +2
64.00	1.01949 01009 17	672 78588 99	1 92183 62	1 94317 96	2127 91	7712	643 -2
64.30	1.02621 79598 16	670 86405 37	1 89978 61	1 92190 05	2205 03	7696	641 +2
65.00	1.03292 66003 53	668 96420 76	1 87696 63	1 89985 02	2281 99	7674	640 -4
65.30	1.03961 62430 29	667 08730 13	1 85337 93	1 87703 03	2358 73	7646	637 -2
66.00	1.04628 71160 42	665 23392 20	1 82902 77	1 85344 30	2435 19	7614	634 +4
66.30	1.05293 94552 62	663 40489 43	1 80391 46	1 82909 11	2511 33	7577	632 -3
67.00	1.05957 35042 05	661 60097 97	1 77804 40	1 80397 78	2587 10	7536	628 -3
67.30	1.06618 95140 02	659 82293 57	1 75141 98	1 77810 68	2662 46	7487	624 -4

ϕ .	E.	δE .	$\delta^2 E$.	Q.	δQ .	$\delta^2 Q$.	q, r .
67°30'	1.06618 95140 02	659 82293 57	1 75141 98	1 77810 68	2662 46	7487	624 — 4
68.00	1.07278 77433 59	658 07151 59	1 72404 70	1 75148 22	2737 33	7436	619 + 4
68.30	1.07936 64585 18	656 34746 89	1 69593 05	1 72410 89	2811 69	7377	615 + 1
69.00	1.08593 19332 07	654 65153 84	1 66707 65	1 69599 20	2885 46	7313	609 + 6
69.30	1.09247 84485 91	652 98446 19	1 63749 11	1 66713 74	2958 59	7243	604 + 1
70.00	1.09900 82932 10	651 34697 08	1 60718 15	1 63755 15	3031 02	7170	598 — 5
70.30	1.10552 17629 18	649 73978 93	1 57615 51	1 60724 13	3102 72	7087	590 + 2
71.00	1.11201 91608 11	648 16363 42	1 54441 99	1 57621 41	3173 59	7000	583 + 6
71.30	1.11850 07971 53	646 61921 43	1 51198 47	1 54447 82	3243 59	6909	576 + 3
72.00	1.12496 69892 96	645 10722 96	1 47885 87	1 51204 23	3312 68	6809	568 — 4
72.30	1.13141 80615 92	643 62837 09	1 44505 20	1 47891 55	3380 77	6704	558 + 4
73.00	1.13785 43453 01	642 18331 89	1 41057 47	1 44510 78	3447 81	6593	550 — 3
73.30	1.14427 61784 90	640 77274 42	1 37543 84	1 41062 97	3513 74	6475	539 + 4
74.00	1.15068 39059 32	639 39730 58	1 33965 44	1 37549 23	3578 49	6353	530 — 3
74.30	1.15707 78789 90	638 05765 14	1 30323 54	1 33970 74	3642 02	6223	518 + 4
75.00	1.16345 84555 04	636 75441 60	1 26619 40	1 30328 72	3704 25	6086	507 + 6
75.30	1.16982 59996 64	635 48822 20	1 22854 40	1 26624 47	3765 11	5946	496 0
76.00	1.17618 08818 84	634 25967 80	1 19029 96	1 22859 36	3824 57	5798	483 + 2
76.30	1.18252 34786 64	633 06937 84	1 15147 54	1 19034 79	3882 55	5643	470 + 5
77.00	1.18885 41724 48	631 91790 30	1 11208 69	1 15152 24	3938 98	5483	457 + 4
77.30	1.19517 33514 78	630 80581 61	1 07215 01	1 11213 26	3993 81	5318	444 — 6
78.00	1.20148 14096 39	629 73366 60	1 03168 18	1 07219 45	4046 99	5145	428 + 3
78.30	1.20777 87462 99	628 70198 42	99069 88	1 03172 46	4098 44	4969	414 + 4
79.00	1.21406 57661 41	627 71128 54	94921 90	99074 02	4148 13	4786	399 + 2
79.30	1.22034 28789 95	626 76206 64	90726 07	94925 89	4195 99	4597	383 + 3
80.00	1.22661 04996 59	625 85480 57	86484 27	90729 90	4241 96	4403	367 + 2
80.30	1.23286 90477 16	624 98996 30	82198 44	86487 94	4285 99	4204	351 — 6
81.00	1.23911 89473 46	624 16797 86	77870 59	82201 95	4328 03	4001	333 — 1
81.30	1.24536 06271 32	623 38927 27	73502 72	77873 92	4368 04	3791	316 — 2
82.00	1.25159 45198 59	622 65424 55	69096 95	73505 88	4405 95	3579	298 + 1
82.30	1.25782 10623 14	621 96327 60	64655 39	69099 93	4441 74	3360	280 + 1
83.00	1.26404 06950 74	621 31672 21	60180 23	64658 19	4475 34	3139	262 — 4
83.30	1.27025 38622 95	620 71491 98	55673 70	60182 85	4506 73	2913	242 + 5
84.00	1.27646 10114 93	620 15818 28	51138 02	55676 12	4535 86	2684	224 + 1
84.30	1.28266 25933 21	619 64680 26	46575 52	51140 26	4562 20	2450	204 + 3
85.00	1.28885 90613 47	619 18104 74	41988 51	46577 56	4587 70	2215	185 — 2
85.30	1.29505 08718 21	618 76116 23	37379 36	41990 36	4609 35	1976	165 — 6
86.00	1.30123 84834 44	618 38736 87	32750 46	37381 01	4629 11	1735	144 + 1
86.30	1.30742 23571 31	618 05986 41	28104 20	32751 90	4646 46	1491	124 + 4
87.00	1.31360 29557 72	617 77882 21	23443 03	28105 44	4661 37	1245	104 + 1
87.30	1.31978 07439 93	617 54439 18	18769 42	23444 07	4673 82	999	83 + 4
88.00	1.32595 61879 11	617 35669 76	14085 81	18770 25	4683 81	750	63 — 2
88.30	1.33212 97548 87	617 21583 95	9394 71	14086 44	4691 31	500	42 — 6
89.00	1.33830 19132 82	617 12189 24	4698 62	9395 13	4696 31	251	20 + 5
89.30	1.34447 31322 06	617 07490 62		4698 82	4698 82		
90.00	1.35064 38812 68			0000 00			

85. Nous avons déjà dit que pour remédier à l'accumulation des erreurs qui peut résulter de la méthode précédente, il était nécessaire de calculer par les formules rigoureuses, les valeurs de la fonction qui correspondent à quelques-unes des valeurs de la variable ϕ . On aurait pu, pour cet objet, se borner aux quatre valeurs qui terminent les quatre parties de la Table, savoir, $\phi = 22^\circ \frac{1}{2}$, $\phi = 45^\circ$, $\phi = 67^\circ \frac{1}{2}$, $\phi = 90^\circ$; mais nous y en avons joint trois autres, et voici les erreurs en plus qui se sont trouvées dans les résultats de notre Table.

Variable ϕ	$22^\circ \frac{1}{2}$,	26,	45,	$49^\circ \frac{1}{2}$,	$67^\circ \frac{1}{2}$,	$70^\circ \frac{1}{2}$,	90° .
Erreur sur E (ϕ)...	+62,	+93,	+173,	+185,	+222,	+227,	+220.

Il s'agit maintenant de corriger les erreurs de tous les termes de la Table, d'après les erreurs connues de ces sept termes; et le principe auquel il faut s'attacher dans cette opération délicate, est d'altérer le moins qu'il est possible les différences premières de la fonction, parce que ces différences, telles qu'elles sont portées dans la Table, sont nécessairement très-approchées des différences exactes.

On pourrait aisément construire des formules algébriques qui embrasseraient une certaine étendue de termes, dans l'interpolation des erreurs; mais l'usage de ces formules serait pénible et souvent peu exact. Il nous a paru plus simple de faire l'interpolation à vue, en s'écartant le moins qu'il est possible de l'ordre linéaire indiqué successivement par les côtés du polygone, dont les angles sont les extrémités des ordonnées qui représentent les erreurs connues. L'inégalité dans la distribution des erreurs sur un même côté, n'aura pour objet que de rendre moins inégales les différences en passant d'un côté à l'autre; et les anomalies à cet égard ne pourront jamais être bien considérables, parce que la méthode suivie pour la construction de la Table, est de nature à ne permettre aux erreurs de se multiplier que par des degrés presque insensibles.

86. C'est par ces procédés qu'on a rectifié la Table des fonctions E, et en y joignant celle des fonctions F, composée et rectifiée semblablement, on a formé la Table II ci-après, qui servira à trouver

jusqu'à douze décimales, les valeurs des fonctions F et E pour toute valeur de l'amplitude ϕ , lorsque l'angle du module est de 45° . Elle servirait aussi à faire l'opération inverse, c'est-à-dire à trouver l'amplitude, lorsque l'une des fonctions est donnée.

On voit assez par les opérations dont nous avons donné le détail, qu'on ne peut répondre de l'exactitude de la douzième décimale, et que même la onzième pourrait, dans quelques cas, être en erreur d'une ou de deux unités; mais au moins on pourra toujours compter sur l'exactitude de la dixième décimale, et l'emploi des deux autres dans les calculs d'interpolation, garantira les résultats de toute erreur sur la dixième décimale. Si on n'a besoin que de sept décimales exactes dans le résultat, il suffira d'en admettre huit dans les calculs d'interpolation, ce qui les simplifiera beaucoup.

87. Maintenant pour avoir un système complet de Tables elliptiques, il ne s'agit que de construire, par les mêmes méthodes, des Tables particulières analogues à la Table II, qui répondront à tous les angles du module de demi-degré en demi-degré. On pourrait, après les calculs faits, réduire toutes les fonctions à dix décimales, et alors chaque Table particulière analogue à la Table II, n'occuperait que trois pages petit *in-folio*, ce qui ferait pour les 181 Tables, un volume de grosseur médiocre. J'ose espérer que cette entreprise dont l'utilité se fera sentir de plus en plus, sera mise un jour à exécution par quelqu'un de ces hommes laborieux qui apparaissent de temps en temps dans la carrière des sciences, pour laisser des monumens durables de leur patience et de leur zèle.

Dans le recueil dont nous venons de parler, la première Table particulière, celle qui répond à l'angle du module $\theta = 0$, se construira immédiatement, puisqu'alors on aura $F = E = \phi$, et qu'ainsi il ne s'agira que de mettre à côté de chaque amplitude ϕ , la longueur absolue de cet arc exprimée avec douze ou un plus grand nombre de décimales; il ne sera pas même nécessaire d'y joindre les différences premières, puisqu'elles sont constantes.

La dernière des Tables particulières est celle qui répond au module $c = 1$, ou à un angle du module égal à 90° ; elle se construira encore d'une manière très-facile, au moyen des Tables connues,

puisqu'alors on a $E(\varphi) = \sin \varphi$ et $F(\varphi) = \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$. Les Tables III et IV ci-après sont destinées à représenter ces fonctions.

88. La Table III offre les sinus naturels et leurs logarithmes pour chaque quart de degré du quadrant, savoir, les sinus naturels exprimés avec quinze décimales, et leurs logarithmes avec quatorze seulement. Ils sont tirés les uns et les autres de la *Trigon. Britan.* de BRIGGS, publiée après la mort de cet auteur, par GELLIBRAND, seul ouvrage où l'on trouve un aussi grand nombre de décimales; car le *Thesaurus Mathematicus* de PITISCUS, ne donne les sinus naturels qu'avec quatorze décimales. Nous avons cru que cette Table serait utile, ne fût-ce que pour mettre le lecteur à portée de vérifier par lui-même, et sans le secours d'un livre qui devient chaque jour plus rare, les calculs que nous avons développés dans différens endroits de cet ouvrage, et surtout ceux qui se rapportent à la Table des fonctions complètes.

La Table IV donne les logarithmes hyperboliques de $\tan(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, pour toutes les valeurs de φ , de demi-degré en demi-degré; ces logarithmes sont en même temps les valeurs de la fonction $F\varphi$, lorsque le module est égal à l'unité.

Connaissant, par la Table III, les logarithmes vulgaires de $\tan(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, il a suffi de multiplier ceux-ci par le module $M = 2.3025$, etc., pour avoir les logarithmes contenus dans la Table IV.

Enfin nous avons cru faire plaisir aux calculateurs en ajoutant à ce petit recueil, la Table V extraite des grandes Tables du cadastre, où l'on trouvera les logarithmes à dix-neuf décimales pour tous les nombres impairs de 1163 à 1501, et pour tous les nombres premiers de 1500 à 10000.

89. La Table IV, dans laquelle nous avons inséré les différences successives de la fonction, autant que le format a pu le permettre, fait voir que ces différences décroissent d'une manière très-lente, lorsque l'amplitude φ approche de 90° . Alors l'interpolation de la Table devient très-difficile, ou ne donne qu'une approximation insuffisante.

22 { 581 - 750

Pareille difficulté se rencontrera, mais à un moindre degré, dans les Tables particulières dressées pour des modules dont les angles se rapprocheront de l'angle droit; il y aura alors une partie plus ou moins étendue de chaque Table, celle qui répond aux plus grandes valeurs de ϕ , dans laquelle les interpolations seront plus difficiles ou moins exactes; mais cet inconvénient ne se fera guère sentir qu'à compter de l'angle du module $\theta = 70^\circ$, et seulement pour des valeurs ϕ non moindres que 70 ou 75° . On remarquera au reste que les simples Tables de logarithmes des nombres et des sinus, sont sujettes à un pareil inconvénient, vers leur commencement, et que celles des logarithmes des tangentes le sont au commencement et à la fin, lorsque l'angle approche de 90° .

Il serait superflu de parler ici de la double interpolation que l'on aurait à faire selon les diverses valeurs des angles θ et ϕ , lorsque le système de Tables dont nous avons parlé sera exécuté, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on aura une Table à double entrée contenant les valeurs des fonctions E et F , pour toutes les valeurs des angles θ et ϕ , de demi-degré en demi-degré. Mais il y a d'autres questions qui concernent la construction de la Table elle-même, et qui méritent d'être discutées.

90. On peut d'abord observer que l'interpolation est en général plus facile à l'égard des fonctions E qu'à l'égard des fonctions F ; et si on se rappelle que toute fonction F peut s'exprimer exactement par la fonction E et une autre fonction de même nature, on en conclura qu'à la rigueur on pourrait se contenter de construire la Table des fonctions E , laquelle présentera toujours plus de facilités et moins de cas d'exception, dans les calculs d'interpolation. Cette observation réduirait presque à moitié le calcul des Tables elliptiques, et ce calcul deviendra surtout d'une exécution assez facile, si on ne voulait avoir les fonctions E qu'avec sept décimales exactes.

Mais d'un autre côté, les fonctions F étant plus simples analytiquement que les fonctions E , il y a quelque inconvénient à déduire la fonction la plus simple F ou $F(c, \phi)$ de deux fonctions plus composées $E(c, \phi)$, $E(c', \phi')$. Cet inconvénient n'est pas simplement idéal, il se fait sentir encore par la complication qu'il entraîne

dans les calculs, puisque la détermination de la fonction $E(c^\circ, \varphi^\circ)$ suppose qu'on a calculé de nouveaux élémens c°, φ° , qu'on peut bien déduire trigonométriquement des élémens donnés c, φ , mais qui rendent le calcul plus long et plus difficileux.

91. Il faut observer de plus que quand on détermine la fonction F , soit au moyen des deux fonctions $E(c, \varphi), E(c^\circ, \varphi^\circ)$, soit au moyen des deux fonctions $E(c, \varphi), E(c', \varphi')$, ce qui se fait par l'une ou l'autre des formules

$$bF(c, \varphi) = \frac{1}{2}(1+b)E(c^\circ, \varphi^\circ) - E(c, \varphi) + \frac{1}{2}(1-b)\sin\varphi^\circ,$$

$$\frac{1}{2}b^2F(c, \varphi) = E(c, \varphi) - (1+c)E(c', \varphi') + c\sin\varphi;$$

les erreurs sur les fonctions E se trouvent notablement augmentées dans l'expression de F , à cause de la petitesse du diviseur b dans une formule, ou $\frac{1}{2}b^2$ dans l'autre; de sorte qu'on ne pourra se flatter d'obtenir la fonction F avec la même précision que les Tables donnent les fonctions E .

Enfin dès qu'une fois on aura déduit des données c, φ , les nouveaux élémens c°, φ° ou c', φ' , il n'en coûtera guère davantage pour continuer les suites $c, c', c'', \text{etc.}$, et $\varphi, \varphi', \varphi'', \text{etc.}$, jusqu'au troisième terme environ, comme cela est nécessaire pour obtenir directement une valeur aussi approchée qu'on voudra de la fonction $F(c, \varphi)$, en la déduisant des formules,

$$F(c, \varphi) = K \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi'), \quad K = \sqrt{\left(\frac{c'c''c'''}{c}\right)},$$

où Φ' désigne la limite des angles $\varphi, \varphi', \varphi'', \text{etc.}$; et dans ce cas, on n'aura aucun besoin de la Table des fonctions E .

92. Il résulte de cette discussion que, quoique la fonction F puisse s'exprimer rigoureusement par deux des fonctions E ; cependant cette propriété ne fournit pas des moyens de calcul assez simples pour être employée utilement dans les approximations. Il en est de même de l'usage qu'on voudrait faire de la formule $F = E - c \frac{dE}{dc}$, ou $F = E - \tan\theta \frac{dE}{d\theta}$, en faisant $c = \sin\theta$.

Car pour faire l'application de cette formule, il faudrait d'abord être en possession d'une Table complète des fonctions E , calculée

pour toutes les valeurs de θ et de φ , de demi-degré en demi-degré; de plus en appelant α la longueur d'un demi-degré, ou faisant $\alpha = \frac{\pi}{360}$, le coefficient différentiel $\frac{dE}{d\theta}$ devrait être tiré de la formule

$$\alpha \frac{dE}{d\theta} = \delta E - \frac{1}{2} \delta^2 E + \frac{1}{3} \delta^3 E - \frac{1}{4} \delta^4 E + \text{etc.},$$

où les différences successives δE , $\delta^2 E$, $\delta^3 E$, etc. sont relatives à la variable θ seule. Mais on voit qu'à cause de la petitesse de α , la valeur de $\frac{dE}{d\theta}$ ne serait déterminée en général qu'avec deux décimales de moins que la fonction E , et la précision diminuerait encore sur la valeur de E , à mesure que $\tan \theta$ augmenterait; ainsi ce moyen d'approximation que nous avons proposé autrefois, ne saurait être adopté.

93. Ayant écarté plusieurs des moyens qui se présentent naturellement pour construire des Tables propres à faire trouver aisément, dans tous les cas, les valeurs des fonctions elliptiques E et F , l'idée peut venir encore de remplacer une de ces fonctions par une autre qui serait plus facile à réduire en Tables. Telle est, par exemple, la fonction $G = \int \frac{d\varphi \cos^2 \varphi}{\Delta}$, dont la valeur complète, lorsque $\varphi = \frac{1}{2} \pi$, sera $\frac{1}{4} \pi$ ou 1, selon qu'on fait $c = 0$ ou $c = 1$; de sorte que dans les cas intermédiaires cette fonction éprouvera peu de variations, et sera très-propre à être réduite en Tables.

Et puisque la fonction F peut être déduite des fonctions E et G , au moyen de l'équation

$$F = \frac{E - c^2 G}{b^2} = \frac{E - G}{b^2} + G,$$

il semble au premier coup d'œil que la fonction G pourrait être substituée avec avantage à la fonction F , au moins dans la partie des Tables de celle-ci qui se prête difficilement aux interpolations, c'est-à-dire lorsque les angles θ et φ sont tous deux plus grands que 70° ou 75° .

Mais en examinant la chose avec plus d'attention, on reconnaît que la difficulté n'est qu'éluée, et qu'on n'obtiendra pas une plus

grande approximation par ce moyen, parce que si on a, par exemple, $b^2 = \frac{1}{100}$, l'erreur de $E - G$ se trouvera centuplée dans la valeur de F . Il vaudrait donc tout autant, à mesure que θ et φ augmentent au-delà d'une certaine limite, diminuer le nombre des décimales qui entrent dans l'expression de F , afin que l'interpolation fût toujours également praticable, mais donnât pour résultat un moindre nombre de chiffres décimaux.

Pour donner un exemple de l'usage de nos méthodes, lorsque l'angle du module est peu éloigné de 90° , nous joignons ici une Table des fonctions E et F , construite d'après ces méthodes pour le module $c = \sin 89^\circ$. Cette table n'est pas calculée avec autant de précision que la Table II, et on ne peut guère compter sur l'exactitude de la dixième décimale; mais elle pourra être utile, surtout en fournissant des exemples qui serviront à apprécier diverses formules que nous donnerons ci-après pour les cas où le module est très-peu différent de l'unité.

$$c = \sin 89^\circ.$$

ϕ .	E.	δE .	F.	δF .
0° 00'	0.00000 00000	872 65355	0.00000 00000	872 67570
0.30	0.00872 65355	872 58711	0.00872 67570	872 74214
1.00	0.01745 24066	872 45424	0.01745 41784	872 87506
1.30	0.02617 69490	872 25495	0.02618 29290	873 07449
2.00	0.03489 94985	871 98926	0.03491 36739	873 34051
2.30	0.04361 93911	871 65719	0.04364 70790	873 67323
3.00	0.05233 59630	871 25876	0.05238 38113	874 07278
3.30	0.06104 85506	870 79399	0.06112 45391	874 53931
4.00	0.06975 64905	870 26294	0.06986 99322	875 07298
4.30	0.07845 91199	869 66562	0.07862 06620	875 67402
5.00	0.08715 57761	869 00210	0.08737 74022	876 34264
5.30	0.09584 57971	868 27242	0.09614 08286	877 07911
6.00	0.10452 85213	867 47664	0.10491 16197	877 88372
6.30	0.11320 32877	866 61481	0.11369 04569	878 75676
7.00	0.12186 94358	865 68701	0.12247 80245	879 69857
7.30	0.13052 63059	864 69331	0.13127 50102	880 70951
8.00	0.13917 32390	863 63378	0.14008 21053	881 79002
8.30	0.14780 95768	862 50851	0.14890 00055	882 94047
9.00	0.15643 46619	861 31757	0.15772 94102	884 16132
9.30	0.16504 78376	860 06106	0.16657 10234	885 45306
10.00	0.17364 84482	858 73906	0.17542 55540	886 81620
10.30	0.18223 58388	857 35170	0.18429 37160	888 25125
11.00	0.19080 93558	855 89906	0.19317 62285	889 75882
11.30	0.19936 83464	854 38127	0.20207 38167	891 33948
12.00	0.20791 21591	852 79843	0.21098 72115	892 99388
12.30	0.21644 01434	851 15068	0.21991 71503	894 72265
13.00	0.22495 16502	849 43813	0.22886 43768	896 52653
13.30	0.23344 60315	847 66091	0.23782 96421	898 40622
14.00	0.24192 26406	845 81916	0.24681 37043	900 36251
14.30	0.25038 08322	843 91302	0.25581 73294	902 39618
15.00	0.25881 99624	841 94263	0.26484 12912	904 50807
15.30	0.26723 93887	839 90816	0.27388 63719	906 69905
16.00	0.27653 84703	837 80973	0.28295 33624	908 97007
16.30	0.28401 65676	835 64753	0.29204 30631	911 32202
17.00	0.29237 30429	833 42171	0.30115 62833	913 75590
17.30	0.30070 72600	831 13246	0.31029 38423	916 27278
18.00	0.30901 85846	828 77992	0.31945 65701	918 87369
18.30	0.31730 63838	826 36430	0.32864 53070	921 55979
19.00	0.32557 00268	823 88579	0.33786 09049	924 33218
19.30	0.33380 88847	821 34453	0.34710 42267	927 19212
20.00	0.34202 23300	818 74076	0.35637 61479	930 14082
20.30	0.35020 97376	816 07467	0.36567 75561	933 17961
21.00	0.35837 04843	813 34645	0.37500 93522	936 30985
21.30	0.36650 39488	810 55631	0.38437 24507	939 53289
22.00	0.37460 95119	807 70449	0.39376 77796	942 85024
22.30	0.38268 65568	804 79117	0.40319 62820	946 26337

$$c = \sin 89^\circ.$$

$$c = \sin 89^\circ.$$

ϕ .	E.	δE .	F.	δF .
22° 30'	0.38268 65568	804 79117	0.40319 62820	946 26337
23.00	0.39073 44685	801 81658	0.41265 89157	949 77388
23.30	0.39875 26343	798 78097	0.42215 66545	953 58338
24.00	0.40674 04440	795 68454	0.43169 04883	957 09353
24.30	0.41469 72894	792 52755	0.44126 14236	960 90613
25.00	0.42262 25649	789 31025	0.45087 04849	964 82293
25.30	0.43051 56674	786 03285	0.46051 87142	968 84586
26.00	0.43837 59959	782 69561	0.47020 71728	972 97685
26.30	0.44620 29520	779 29882	0.47993 69413	977 21792
27.00	0.45399 59402	775 84270	0.48970 91205	981 57119
27.30	0.46175 43672	772 32751	0.49952 48324	986 03878
28.00	0.46947 76423	768 75355	0.50938 52202	990 62298
28.30	0.47716 51778	765 12107	0.51929 14500	995 32612
29.00	0.48481 63885	761 43035	0.52924 47112	1000 15065
29.30	0.49243 06920	757 68169	0.53924 62177	1005 09904
30.00	0.50000 75089	753 87534	0.54929 72081	1010 17390
30.30	0.50754 62623	750 01162	0.55939 89471	1015 37794
31.00	0.51504 63785	746 09082	0.56955 27265	1020 71398
31.30	0.52250 72867	742 11323	0.57975 98663	1026 18491
32.00	0.52992 84190	738 07916	0.59002 17154	1031 79377
32.30	0.53730 92106	733 98891	0.60033 96531	1037 54367
33.00	0.54464 90997	729 84280	0.61071 50898	1043 43788
33.30	0.55194 75277	725 64115	0.62114 94686	1049 47976
34.00	0.55920 39392	721 38427	0.63164 42662	1055 67284
34.30	0.56641 77819	717 07249	0.64220 09946	1062 02074
35.00	0.57358 85068	712 70614	0.65282 12020	1068 52728
35.30	0.58071 55682	708 28555	0.66350 64748	1075 19635
36.00	0.58779 84237	703 81107	0.67425 84383	1082 03207
36.30	0.59483 65344	699 28302	0.68507 87590	1089 03864
37.00	0.60182 93646	694 70176	0.69596 91454	1096 22055
37.30	0.60877 63822	690 06763	0.70693 13509	1103 58233
38.00	0.61567 70585	685 38099	0.71796 71742	1111 12879
38.30	0.62253 08684	680 64221	0.72907 84621	1118 86489
39.00	0.62933 72905	675 85162	0.74026 71110	1126 79581
39.30	0.63609 58067	671 00962	0.75153 50691	1134 92694
40.00	0.64280 59029	666 11655	0.76288 43385	1143 26389
40.30	0.64946 70684	661 17281	0.77431 69774	1151 81253
41.00	0.65607 87965	656 17876	0.78583 51027	1160 57894
41.30	0.66264 05841	651 13479	0.79744 08921	1169 56949
42.00	0.66915 19320	646 04128	0.80913 65870	1178 79081
42.30	0.67561 23448	640 89863	0.82092 44951	1188 24981
43.00	0.68202 13311	635 70722	0.83280 69932	1197 95371
43.30	0.68837 84033	630 46745	0.84478 65303	1207 91007
44.00	0.69468 30778	625 17973	0.85686 56310	1218 12675
44.30	0.70093 48751	619 84445	0.86904 68985	1228 61200
45.00	0.70713 33196	614 46202	0.88133 30185	1239 37437

$$c = \sin 89^\circ.$$

ϕ .	E.	δE .	F.	δF .
45.00	0.70713 33196	614 46202	0.88133 30185	1239 37437
45.30	0.71327 79398	609 03284	0.89372 67622	1250 42292
46.00	0.71936 82682	603 55735	0.90623 09914	1261 76709
46.30	0.72540 38417	598 03596	0.91884 86623	1273 41673
47.00	0.73138 42013	592 46908	0.93158 28296	1285 38214
47.30	0.73730 88921	586 85714	0.94443 66510	1297 67420
48.00	0.74317 74635	581 20061	0.95741 33930	1310 30421
48.30	0.74898 94696	575 49988	0.97051 64351	1325 28410
49.00	0.75474 44684	569 75538	0.98374 92761	1336 62638
49.30	0.76044 20222	563 96756	0.99711 55399	1350 34413
50.00	0.76608 16978	558 13689	1.01061 89812	1364 45120
50.30	0.77166 30667	552 26375	1.02426 34932	1378 96205
51.00	0.77718 57042	546 34868	1.03805 31137	1393 89197
51.30	0.78264 91910	540 39206	1.05199 20334	1409 25702
52.00	0.78805 31116	534 39436	1.06608 46036	1425 07411
52.30	0.79339 70552	528 35608	1.08033 53447	1441 36109
53.00	0.79868 06160	522 27765	1.09474 89556	1458 13673
53.30	0.80390 33925	516 15953	1.10933 03229	1475 42088
54.00	0.80906 49878	510 00220	1.12408 45317	1493 23450
54.30	0.81416 50098	503 80614	1.13901 68767	1511 59973
55.00	0.81920 30712	497 57182	1.15413 28740	1530 54000
55.30	0.82417 87894	491 29972	1.16943 82740	1550 08012
56.00	0.82909 17866	484 99030	1.18493 90752	1570 24664
56.30	0.83394 16896	478 64409	1.20064 15396	1591 06683
57.00	0.83872 81305	472 26153	1.21655 22079	1612 57085
57.30	0.84345 07458	465 84314	1.23267 79164	1634 78989
58.00	0.84810 91772	459 38942	1.24902 58153	1657 75732
58.30	0.85270 30714	452 90085	1.26560 33885	1681 50866
59.00	0.85723 20799	446 37792	1.28241 84751	1706 08175
59.30	0.86169 58591	439 82115	1.29947 92926	1731 51689
60.00	0.86609 40706	433 23106	1.31679 44615	1757 85714
60.30	0.87042 63812	426 60812	1.33437 30329	1785 14864
61.00	0.87469 24624	419 95289	1.35222 45193	1813 44047
61.30	0.87889 19913	413 26584	1.37035 89240	1842 78534
62.00	0.88302 46497	406 54753	1.38878 67774	1873 23957
62.30	0.88709 01250	399 79844	1.40751 91741	1904 86413
63.00	0.89108 81094	393 01914	1.42656 78154	1937 72378
63.30	0.89501 83008	386 21010	1.44594 50532	1971 88876
64.00	0.89888 04018	379 37192	1.46566 39408	2007 43454
64.30	0.90267 41210	372 50507	1.48573 82862	2044 44250
65.00	0.90639 91717	365 61011	1.50518 27122	2083 00102
65.30	0.91005 52728	358 68758	1.52501 27224	2123 20506
66.00	0.91364 21486	351 73804	1.54824 47730	2165 15800
66.30	0.91715 95290	344 76201	1.56989 63530	2208 97199
67.00	0.92060 71491	337 76006	1.59198 60729	2254 76900
67.30	0.92398 47497	330 73274	1.61453 37629	2302 68190

$$c = \sin 89^\circ.$$

ϕ .	E.	δE .	F.	δF .
67° 30'	0.92398 47497	330 73274	1.61453 37629	2302 68190
68.00	0.92729 20771	323 68061	1.63756 05819	2352 85574
68.30	0.93052 88832	316 60422	1.66108 91393	2405 44915
69.00	0.93369 49254	309 50415	1.68514 36308	2460 63601
69.30	0.93678 99669	302 38096	1.70974 99909	2518 60725
70.00	0.93981 37765	295 25523	1.73493 60634	2579 57303
70.30	0.94276 61288	288 06754	1.76073 17937	2643 76526
71.00	0.94564 68042	280 87848	1.78716 94463	2711 44038
71.30	0.94845 55890	273 66864	1.81428 38501	2782 88278
72.00	0.95119 22754	266 43860	1.84211 26779	2858 40869
72.30	0.95385 66614	259 18899	1.87069 67648	2938 37069
73.00	0.95644 85513	251 92041	1.90008 04717	3023 16314
73.30	0.95896 77554	244 63350	1.93031 21031	3113 22858
74.00	0.96141 40904	237 32888	1.96144 43889	3209 06516
74.30	0.96378 73792	230 00718	1.99353 50405	3311 23577
75.00	0.96608 74510	222 66908	2.02664 73982	3420 37885
75.30	0.96831 41418	215 31525	2.06085 11867	3537 22160
76.00	0.97046 72943	207 94636	2.09622 34027	3662 59553
76.30	0.97254 67579	200 56314	2.13284 93580	3797 45621
77.00	0.97455 23893	193 16631	2.17082 39201	3942 90699
77.30	0.97648 40524	185 75665	2.21025 29900	4100 22856
78.00	0.97834 16189	178 33495	2.25125 52756	4270 91650
78.30	0.98012 49684	170 90205	2.29396 44406	4456 72749
79.00	0.98183 39889	163 45881	2.33853 17155	4659 73850
79.30	0.98346 85770	156 00623	2.38512 91005	4882 42409
80.00	0.98502 86393	148 54533	2.43395 33414	5130 68336
80.30	0.98651 40926	141 07723	2.48526 01750	5396 39364
81.00	0.98792 48649	133 60320	2.53922 41114	5701 52840
81.30	0.98926 08969	126 12467	2.59623 93954	6039 79315
82.00	0.99052 21436	118 64327	2.65663 73269	6420 89541
82.30	0.99170 85763	111 16093	2.72084 62810	6853 40807
83.00	0.99282 01856	103 67999	2.78938 03617	7348 32271
83.30	0.99385 69855	96 20334	2.86286 35888	7919 96350
84.00	0.99481 90189	88 73459	2.94206 32238	8587 32820
84.30	0.99570 63648	81 27854	3.02793 65058	9376 11725
85.00	0.99651 91502	73 84167	3.12169 76783	10321 89670
85.30	0.99725 75669	66 43310	3.22491 66453	11472 71955
86.00	0.99792 18979	59 06623	3.33964 38408	12912 11482
86.30	0.99851 25602	51 76169	3.46876 49890	14736 71952
87.00	0.99903 01771	44 55317	3.61613 21842	17129 72923
87.30	0.99947 57088	37 49945	3.78742 94765	20366 68374
88.00	0.99985 07033	30 71019	3.99109 63139	24893 29037
88.30	1.00015 78052	24 41794	4.24002 92176	31343 99016
89.00	1.00040 19846	19 11666	4.55746 91192	40020 07521
89.30	1.00059 31512	15 84265	4.95366 98713	48123 99583
90.00	1.00075 15777		5.43490 98296	

§ IV. Autre méthode pour construire les Tables des fonctions F et E.

94. On peut construire ces Tables par une autre méthode qui n'exige que des calculs trigonométriques très-simples : voici en quoi consiste cette méthode.

Supposons qu'après avoir pris un module c à volonté, on veuille trouver l'amplitude ϕ qui répond à une fonction F égale à $\frac{1}{200}$ de la fonction complète F^1 ; cette amplitude se déterminera par la méthode de l'art. 67, première Partie, si l'on a $c^2 < \frac{1}{2}$, ou si c^2 étant $> \frac{1}{2}$, n'est pas trop rapproché de l'unité; et par la méthode de l'art. 71, si $1 - c^2$ est très-petit.

Soit dans l'un et l'autre cas, α ou α_1 , la valeur de l'amplitude qui donne $F(\alpha) = \frac{1}{200} F^1$, nous appellerons successivement $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les amplitudes qui donnent $F(\alpha_2) = 2F\alpha, F(\alpha_3) = 3F\alpha, F(\alpha_4) = 4F\alpha$, etc. jusqu'à $F(\alpha_{200}) = 200F(\alpha) = F^1$.

Cela posé, la Table que nous voulons construire contiendra, dans la première colonne, les nombres 1, 2, 3...200, qui représentent les fonctions F croissant par intervalles égaux, depuis la fonction $F(\alpha) = \frac{1}{200} F^1$ jusqu'à la fonction complète F^1 ; dans la seconde colonne seront les valeurs correspondantes de l'amplitude, savoir, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jusqu'à α_{200} ou $\frac{1}{2}\pi$. Cette Table sera en quelque sorte l'inverse de celle que nous avons construite par la première méthode, et dans laquelle les amplitudes croissent par intervalles égaux; mais la théorie des fonctions F fournit des formules très-élégantes pour construire la Table dans ce nouveau système.

95. Désignons par ϕ un terme quelconque α_n de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, etc., ensorte qu'on ait $F\phi = nF\alpha$; nous ferons par analogie $F(\phi') = (n+1)F\alpha, F\phi'' = (n+2)F\alpha$, et dans le sens inverse, $F(\phi^0) = (n-1)F\alpha, F\phi^{00} = (n-2)F\alpha$, etc. Cela posé, soit $\Delta(\alpha)$ ou $\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \alpha} = a$, l'équation générale de l'art. 22, première Partie, deviendra

$$\text{tang} \left(\frac{1}{2} \phi' + \frac{1}{2} \phi^0 \right) = a \text{ tang } \phi.$$

Mais on a $\phi' - 2\phi + \phi'' = \delta^2\phi$; cette équation peut donc se mettre sous la forme

$$\tan(\phi + \tfrac{1}{2}\delta^2\phi) = a \tan \phi; \quad = T(\phi - \omega)$$

on déduit de là,

$$\tan \tfrac{1}{2}\delta^2\phi = \frac{(a-1)\tan \phi}{1+a\tan^2 \phi}.$$

Soit $a = \frac{1-k}{1+k}$ ou $k = \frac{1-a}{1+a}$, cette équation deviendra

$$\tan \tfrac{1}{2}\delta^2\phi = -\frac{k \sin 2\phi}{1+k \cos 2\phi}, \quad = -T\omega$$

et on en déduit ultérieurement,

$$\sin \tfrac{1}{2}\delta^2\phi = -k \sin(2\phi + \tfrac{1}{2}\delta^2\phi).$$

Cette équation fait voir que $\tfrac{1}{2}\delta^2\phi$ est toujours négatif; faisant donc $\tfrac{1}{2}\delta^2\phi = -\omega$, on aura

$$\sin \omega = k \sin(2\phi - \omega).$$

Or k est une quantité très-petite du second ordre par rapport à α , puisqu'on a $c \sin \alpha = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, et qu'ainsi k se déduit de $c \sin \alpha$, suivant la même loi que le module c se déduit du module c . On voit donc que ω restera toujours une quantité très-petite du second ordre; son *maximum* aura lieu à peu près lorsqu'on a $\phi = 45^\circ$, et ce *maximum* sera à peu près $= k = (\tfrac{1}{2}c \sin \alpha)^2 = \tfrac{1}{4}c^2 \sin^2 \alpha$; dans les points extrêmes, lorsque $\phi = 0$ ou $\phi = \tfrac{1}{2}\pi$, la quantité ω sera nulle.

L'équation $\sin \omega = k \sin(2\phi - \omega)$ est facile à résoudre dans les différens cas, avec toute l'approximation nécessaire; on peut d'abord négliger ω dans le second membre, ce qui donnera $\sin \omega = k \sin 2\phi$, ou simplement $\omega = k \sin 2\phi$; ensuite pour avoir une plus grande approximation, on substituera cette valeur dans le second membre. Soit alors $k \sin(2\phi - \omega) = p$, on aura $\sin \omega = p$; donc si on appelle R'' le nombre de secondes contenues dans le rayon, afin que $R''\omega$ exprime le nombre de secondes de l'arc ω , on aura

$$R''\omega = R''p \left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{3} + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{p^4}{5} + \text{etc.} \right).$$

On déduit aussi immédiatement de la formule $\tan(\phi + \tfrac{1}{2}\delta^2\phi)$

$= \alpha \operatorname{tang} \varphi$, une autre valeur de $\frac{1}{2} \delta^2 \varphi^\circ$ ou ω , savoir :

$$\omega = -\frac{1}{2} \delta^2 \varphi^\circ = k \sin 2\varphi - \frac{1}{2} k^2 \sin 4\varphi + \frac{1}{3} k^3 \sin 6\varphi - \text{etc.}$$

Mais cette expression est en général moins convergente que la précédente, et elle paraît moins facile à calculer, parce qu'elle exige de plus qu'on cherche dans les Tables les logarithmes de $\sin 4\varphi$, $\sin 6\varphi$, etc.

Les valeurs qu'on devra donner à φ seront successivement α_1 , α_2 , α_3 , etc. On calculera les valeurs correspondantes de 2ω , qui seront en même temps celles des $\delta^2 \varphi$; et comme la première valeur de $\delta \varphi$, celle qui répond à $\varphi = 0$, est égale à α , on pourra former en entier la colonne des valeurs de φ .

96. Mais pour vérifier les calculs et empêcher les erreurs de s'accumuler, il sera bon d'avoir une formule qui fasse connaître directement une différence première quelconque $\delta \varphi$.

Or on a vu (art. 18, première Partie) que si l'on fait $\operatorname{tang} \psi = \Delta(\alpha) \operatorname{tang} \varphi$ et $\operatorname{tang} \mu = \Delta(\varphi) \operatorname{tang} \alpha$, on aura $\varphi' = \psi + \mu$; mais d'un autre côté, $\psi = \varphi + \frac{1}{2} \delta^2 \varphi^\circ$ et $\varphi' = \varphi + \delta \varphi$; donc $\mu = \delta \varphi - \frac{1}{2} \delta^2 \varphi^\circ = \delta \varphi + \omega$; donc on a pour déterminer directement $\delta \varphi$, l'équation

$$\operatorname{tang} (\delta \varphi + \omega) = \Delta(\varphi) \operatorname{tang} \alpha.$$

On voit en même temps, par cette équation, que comme ω est toujours positif, et $\Delta(\varphi)$ toujours moindre que l'unité, on aura par ces deux raisons, $\delta \varphi < \alpha$. Ainsi toutes les quantités qui entrent, tant dans la colonne des différences secondes $\delta^2 \varphi$, que dans celle des différences premières $\delta \varphi$, seront plus petites que des limites données, et ne peuvent par conséquent éprouver que de petites anomalies.

On obtiendra enfin une vérification complète de tous les calculs, lorsque le dernier terme de la colonne des φ , savoir α_{200} , se trouvera égal à 90° . On peut se procurer d'autres vérifications dans cet intervalle, en calculant la valeur de φ qui donne $F\varphi$ égale à la moitié ou à une autre partie exprimée exactement en 200^{ièmes} de la fonction complète F' .

97. Une fois qu'on a déterminé la constante α par les méthodes

directes, on voit que la Table entière relative à la fonction F , peut être calculée par une seule formule trigonométrique simple et rigoureuse, savoir, $\sin \omega = k \sin (2\phi - \omega)$. En effet cette formule seule servira à former la colonne entière des différences secondes ; et comme on connaît d'avance le premier terme des différences premières $\delta\phi$, lequel est égal à α , on formera de suite la colonne entière des différences premières $\delta\phi$, et de là celle des amplitudes ϕ , puisque le premier terme $= 0$.

Le problème est donc résolu complètement par la seule équation mentionnée ; mais pour se procurer de loin à loin des vérifications, on a une seconde formule trigonométrique, savoir,

$$\text{tang} (\delta\phi + \omega) = \Delta(\phi) \text{ tang } \alpha,$$

laquelle servira à calculer directement la différence première $\delta\phi$. Elle montre immédiatement qu'une valeur approchée de $\delta\phi$ est $\delta\phi = \alpha \Delta(\phi) - \omega$.

Il faut maintenant examiner, 1°. comment on interpolera la Table des fonctions F , calculée pour une valeur déterminée du module ; 2°. comment on interpolera le système des Tables particulières, calculées pour les différens angles du module, de demi-degré en demi-degré.

93. Dans le premier cas, si l'on cherche une valeur de ϕ qui réponde à une valeur donnée de F , il faudra d'abord exprimer F en parties 200^{ièmes} de F_1 . Soit donc $F = \frac{n+x}{200} F_1$, n étant un entier et x une fraction.

Soit A la valeur de ϕ qui répond au nombre n de la première colonne, et soient δA , $\delta^2 A$, $\delta^3 A$ les différences successives placées sur la même ligne que A , la valeur de l'amplitude ϕ sera, suivant les formules ordinaires,

$$\phi = A + x\delta A + \frac{x \cdot x - 1}{2} \delta^2 A + \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2}{2 \cdot 3} \delta^3 A + \text{etc.}$$

Si au contraire on demande la valeur de F qui répond à une valeur donnée de ϕ , on verra d'abord au premier coup d'œil quel est le nombre de la Table qui doit être pris pour A ; le nombre correspondant n se trouvera dans la première colonne, vis à vis de A ;

ainsi pour avoir la valeur de $F = \frac{n+x}{200} F'$, il ne s'agira que de déduire x de l'équation précédente où l'on connaît ϕ , A , δA , $\delta^2 A$, $\delta^3 A$; or cette résolution n'offre aucune difficulté; car on a

$$x = \frac{\phi - A}{\delta A + \frac{x-1}{2} \delta^2 A + \frac{x-1 \cdot x-2}{2 \cdot 3} \delta^3 A};$$

la première valeur approchée de x est donc $\frac{\phi - A}{\delta A}$; on s'en servira pour substituer dans le dénominateur et obtenir une seconde valeur plus approchée de x ; cette seconde en donnera semblablement une troisième, et ainsi de suite.

99. Venons maintenant à la seconde question. Nous supposons qu'il existe une suite de Tables construites pour tous les angles θ du module, de demi-degré en demi-degré, dans chacune desquelles on trouve l'angle ϕ qui répond à toute fonction $F(\theta, \phi)$, exprimée par $\frac{n}{200} F'(\theta)$, n étant un nombre entier.

Cela posé, soient donnés la fonction F et l'angle u du module à laquelle elle appartient; il faudra préalablement, d'après cet angle, calculer la fonction complète $F'(u)$; alors connaissant F , on connaîtra le nombre $n+x$ (composé de l'entier n et de la fraction x), tel qu'on ait $F = \frac{n+x}{200} F'\mu$.

Soit maintenant $\mu = \mathcal{C} + y \cdot \frac{1}{2}^\circ$, \mathcal{C} étant un nombre entier de demi-degrés, et y étant < 1 . Dans la Table où $\theta = \mathcal{C}$, on prendra par interpolation l'amplitude ϕ qui répond à $n+x$; on prendra de même, par interpolation, les amplitudes ϕ' , ϕ'' , ϕ''' , etc. qui répondent à $n+x$, dans les Tables dont l'angle du module est $\mathcal{C} + \frac{1}{2}^\circ$, $\mathcal{C} + 1^\circ$, $\mathcal{C} + 1^\circ \frac{1}{2}$, etc.; cela posé, l'amplitude qui répond à la fonction donnée F dont l'angle du module est μ , sera exprimée par la valeur

$$\phi + y(\phi' - \phi) + \frac{y \cdot y - 1}{2} (\phi'' - 2\phi' + \phi) + \frac{y \cdot y - 1 \cdot y - 2}{2 \cdot 3} (\phi''' - 3\phi'' + 3\phi' - \phi) + \text{etc.}$$

L'opération inverse se ferait d'une manière semblable, mais il est superflu de s'en occuper ici.

100. Il faut faire voir maintenant comment on pourra former une Table analogue pour les fonctions E : cette Table est d'une exécution beaucoup moins facile ; cependant il se présente encore , pour la construire , des formules assez élégantes et qui méritent d'être remarquées.

Soient , comme ci-dessus, φ^0 , φ , φ' trois amplitudes successives telles qu'on ait $F(\varphi^0) + F(\alpha) = F(\varphi)$, $F(\varphi) + F(\alpha) = F(\varphi')$, on aura , suivant l'art. 31 , première Partie , les deux équations

$$\begin{aligned} E(\varphi^0) + E(\alpha) - E(\varphi) &= c^2 \sin \alpha \sin \varphi^0 \sin \varphi, \\ E(\varphi) + E(\alpha) - E(\varphi') &= c^2 \sin \alpha \sin \varphi \sin \varphi'; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$E(\varphi') - 2E(\varphi) + E(\varphi^0) = -c^2 \sin \alpha \sin \varphi (\sin \varphi' - \sin \varphi^0),$$

ou , ce qui revient au même ,

$$\delta^2 E(\varphi^0) = -c^2 \sin \alpha \sin \varphi (\sin \varphi' - \sin \varphi^0).$$

Mais on a $\sin \varphi' - \sin \varphi^0 = 2 \sin \frac{\varphi' - \varphi^0}{2} \cos \frac{\varphi' + \varphi^0}{2}$; d'ailleurs $\frac{\varphi' - \varphi^0}{2} = \frac{\delta \varphi^0 + \delta \varphi}{2} = \delta \varphi - \frac{1}{2} \delta^2 \varphi^0$, et $\frac{\varphi' + \varphi^0}{2} = \varphi + \frac{1}{2} \delta^2 \varphi^0$; donc

$$\delta^2 E(\varphi^0) = -2c^2 \sin \alpha \cos(\varphi + \frac{1}{2} \delta^2 \varphi^0) \sin(\delta \varphi - \frac{1}{2} \delta^2 \varphi^0) \sin \varphi,$$

ou en faisant comme ci-dessus $\frac{1}{2} \delta^2 \varphi^0 = -\omega$,

$$\delta^2 E(\varphi^0) = -2c^2 \sin \alpha \cos(\varphi - \omega) \sin(\delta \varphi + \omega) \sin \varphi.$$

J'observe maintenant qu'on a $2 \sin \varphi \cos(\varphi - \omega) = \sin(2\varphi - \omega) + \sin \omega$; mais $\sin \omega = k \sin(2\varphi - \omega)$; donc $2 \sin \varphi \cos(\varphi - \omega) = (1+k) \sin(2\varphi - \omega)$; donc

$$\delta^2 E(\varphi^0) = -c^2 (1+k) \sin \alpha \sin(2\varphi - \omega) \sin(\delta \varphi + \omega),$$

ou enfin

$$\delta^2 E(\varphi^0) = -2c \sqrt{k} \cdot \sin(2\varphi - \omega) \sin(\delta \varphi + \omega).$$

Cette formule est rigoureuse , et elle est réduite à un état de simplicité qui la rend très-propre au calcul logarithmique.

101. Ainsi en même temps qu'on calculera pour la Table des fonctions F, la quantité ω qui donne $\delta^2 \varphi^0$, et ensuite $\delta \varphi$, par la valeur $\delta \varphi = \delta \varphi^0 + \delta^2 \varphi^0$, on aura tous les élémens nécessaires pour

calculer $\delta^2 E\varphi^\circ$: on formera donc par cette seule formule, la colonne entière des différences secondes de la fonction E.

On voit que la différence seconde $\delta^2 E\varphi^\circ$ s'évanouit aux deux limites de la Table, lorsque $\varphi = 0$, et lorsque $\varphi = 90^\circ$; son *maximum* répond à une amplitude toujours plus petite que 45° .

D'un autre côté, la fonction $E\alpha$ est facile à déduire des mêmes élémens qui servent à déterminer α de manière qu'on ait $F\alpha = \frac{1}{\sin \alpha} F'$, et cette fonction $E\alpha$ est en même temps la valeur de δEo , puisque $Eo = 0$, et qu'ainsi la différence $E\alpha - Eo$ ou $\delta E^\circ = E\alpha$. Puis donc qu'on connaît le premier terme de la colonne des différences premières, et tous les termes de la colonne des différences secondes, on pourra immédiatement former la colonne entière des différences premières, et ensuite celle des fonctions $E\varphi$, dont le dernier terme devra être égal à la fonction complète E' .

102. La méthode que nous venons d'expliquer pour former la Table des fonctions E est d'une simplicité qui ne laisse rien à désirer. Et quand on considère aussi combien est facile la construction de la Table des fonctions F, puisqu'elle ne dépend que d'une seule formule trigonométrique rigoureusement exacte, on serait tenté de croire que cette manière de former des Tables des fonctions F et E, doit être adoptée de préférence à celle que nous avons exposée dans les chapitres précédens. Peut-être que l'exécution dévoilerait encore de nouveaux motifs de préférence; c'est ce que nous laissons à décider à ceux qui voudront entreprendre le long et utile travail de la construction de ces Tables.

Nous devons encore observer qu'il sera facile de vérifier aussi souvent qu'on voudra le calcul des fonctions E; car ayant $E\varphi - E\varphi^\circ = \delta E\varphi^\circ$, on tire des équations précédentes,

$$\delta E\varphi^\circ = E\alpha - c^2 \sin \alpha \sin \varphi^\circ \sin \varphi;$$

C'est l'expression d'un terme quelconque de la colonne des différences premières; et on voit que ces différences diminuent continuellement depuis la première égale à $E\alpha$, jusqu'à la dernière qui est à peu près $E\alpha - c^2 \sin \alpha$ ou $b^2 \alpha$.

103. Pour donner un exemple des Tables construites suivant la méthode précédente, soit le module $c = \sin 45^\circ$. On trouvera par

les formules de l'art. 67, première Partie, la valeur de α qui satisfait à l'équation $F(\alpha) = \frac{1}{200} F_1$, et les quantités qui en dépendent, comme il suit :

$$\begin{aligned}\alpha &= 31' 52'' 138076 \\ l \sin \alpha &= 7.96708 \ 78960 \ 70 \\ lk &= 5.03109 \ 51356 \ 95 \\ l(2c\sqrt{k}) &= 7.66606 \ 25656 \ 80 \\ E\alpha &= 0.00927 \ 02406 \ 00\end{aligned}$$

D'après ces données, on a calculé le commencement de la Table particulière pour le module $\sin 45^\circ$, comme on le voit ci-joint. La première colonne intitulée n , représente une valeur donnée de $F = \frac{nF_1}{200}$, et les colonnes suivantes donnent les valeurs correspondantes de l'amplitude ϕ et de la fonction E . Il est clair que pour toute valeur de F , comprise dans les limites de cette portion de Table, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{10} F_1$, on trouvera par interpolation les valeurs correspondantes de ϕ et de E , et les résultats devront s'accorder avec ceux que donne la Table II.

104. Il est bon d'observer que par la dernière méthode que nous venons d'exposer, on n'évite pas entièrement les difficultés que présente l'interpolation dans certains cas où c est très-près de l'unité. On divise seulement la Table en un certain nombre de parties inégales, où l'interpolation peut se pratiquer avec à peu près le même degré de justesse; mais dans ce cas, les premières divisions comprennent un plus grand nombre de degrés de l'amplitude, ce qui exige qu'on ait recours, pour l'interpolation, à un plus grand nombre de différences; si on a, par exemple, le module $c = \sin 89^\circ$, la valeur de α qui donne $F\alpha = \frac{1}{200} F_1$ sera $\alpha = 1^\circ 33' 24'' 03669 \ 3842$; cette valeur serait encore plus grande pour le module $c = \sin 89^\circ \frac{1}{2}$. Ainsi l'interpolation présenterait encore plus de difficultés dès le commencement de la Table; inconvénient auquel ne sont pas sujettes les Tables construites d'après notre première méthode.

n.	ϕ .	$\delta\phi$.	$\delta^2\phi$.	$\delta^3\phi$.	E.	δE .	$\delta^2 E$.	$\delta^3 E$.	$\delta^4 E$.
0	0° 00' 00" 000000	31' 52" 138076	0" 082157	82125	0.00000 00000	0 927 02406	0 7965 9	7961 8	82
1	0.31.52.138076	31.52.055919	0.164282	82062	0.00927 02406	0 926 94440	1 15927 7	7953 6	122
2	1. 3.44.193995	31.51.891637	0.246344	81967	0.01853 96846	1 926 78512	4 23881 3	7941 4	166
3	1.35.36.085658	31.51.645293	0.328311	81839	0.02780 75358	5 926 54631	1 31822 7	7924 8	202
4	2. 7.27.730925	31.51.316982	0.410150	81682	0.03707 29989	6 926 22808	4 39747 5	7904 6	247
5	2.39.19.047907	31.50.906832	0.491832	81491	0.04633 52798	0 925 83060	9 47652 1	7879 9	285
6	3.11. 9.954739	31.50.415000	0.573325	81271	0.05559 35858	9 925 35408	8 55532 0	7851 4	323
7	3.43. 0.369739	31.49.841677	0.654394	81018	0.06484 71267	7 924 79876	8 63383 4	7819 1	368
8	4.14.50.211416	31.49.187083	0.735612	80735	0.07409 51144	5 924 16493	4 71202 5	7782 3	401
9	4.46.39.398499	31.48.451471	0.816347	80421	0.08333 67637	9 923 45290	9 78984 8	7742 2	443
10	5.18.27.849970	31.47.635124	0.896768	80077	0.09257 12928	8 922 66306	1 86727 0	7697 9	482
11	5.50.15.485094	31.46.738356	0.976845	79702	0.10179 79234	9 921 79579	1 94424 9	7649 7	517
12	6.22. 0.223450	31.45.761511	1.056547	79298	0.11101 58814	0 920 85154	2 102074 6	7598 0	555
13	6.53.47.984961	31.44.704964	1.135843	78863	0.12022 43968	2 919 83079	6 109672 6	7542 5	597
14	7.25.32.689925	31.43.569119	1.214708	78400	0.12942 27047	8 918 73407	0 117215 1	7482 8	627
15	7.57.16.259044	31.42.354411	1.293108	77906	0.13861 00454	8 917 56191	9 124697 9	7420 1	661
16	8.28.58.613455	31.41.061303	1.371014	77386	0.14778 56646	7 916 31494	0 132118 0	7354 0	703
17	9. 0.39.674758	31.39.690289	1.448400	76835	0.15694 88140	7 914 99376	0 139472 0	7283 7	
18	9.32.19.365047	31.38.241889	1.525235		0.16609 87516	7 913 59904	0 146755 7		
19	10. 3.57.606936	31.36.716654			0.17523 47420	7 912 13148	3		
20	10.35.34.323590				0.18435 60569	0			

§ V. *Formules pour trouver les valeurs très-approchées des Fonctions $F\phi$, $E\phi$, lorsque l'amplitude ϕ n'excède pas une certaine limite.*

105. Lorsque l'angle ϕ est peu considérable, on a à très-peu près, $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \phi)} = \cos c\phi$; faisant donc $\Delta = \cos c\phi$, on aura $E\phi = \int d\phi \cos c\phi = \frac{1}{c} \sin c\phi$, et $F\phi = \int \frac{d\phi}{\cos c\phi} = \frac{1}{2c} \log \frac{1 + \sin c\phi}{1 - \sin c\phi} = \frac{1}{c} \log \tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} c\phi \right)$. Ces valeurs sont exactes dans les cas extrêmes, lorsque $c = 0$ et $c = 1$; elles seront d'autant plus approchées dans les autres cas, que l'angle ϕ sera plus petit.

Pour savoir quel est le degré d'approximation de ces valeurs, on développera en série la quantité Δ , ce qui donne

$$\Delta = 1 - \frac{1}{2} c^2 \sin^2 \phi - \frac{1.1}{2.4} c^4 \sin^4 \phi - \frac{1.1.3}{2.4.6} c^6 \sin^6 \phi - \text{etc.},$$

et en y substituant la valeur

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} + \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.},$$

on aura l'expression suivante, exacte aux quantités près de l'ordre $c^2\varphi^8$,

$$\Delta = 1 - \frac{1}{2}c^2(\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi^4 + \frac{2}{45}\varphi^6) - \frac{1}{8}c^4(\varphi^4 - \frac{2}{3}\varphi^6) - \frac{1}{16}c^6\varphi^6;$$

de là résulte $f\Delta d\varphi$, ou

$$E = \varphi - \frac{c^2}{2} \left(\frac{\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^5}{15} + \frac{2\varphi^7}{315} \right) - \frac{c^4}{8} \left(\frac{\varphi^5}{5} - \frac{2\varphi^7}{21} \right) - \frac{c^6}{16} \cdot \frac{\varphi^7}{7} = \varphi - \frac{c^2}{6} \varphi^3 + \frac{c^4}{120} \varphi^5 - \frac{c^6}{5040} \varphi^7;$$

Désignons cette valeur par $E = \frac{1}{c} \sin c\varphi + Q$, nous aurons par le développement du premier terme,

$$E = Q + \varphi - \frac{1}{6}c^2\varphi^3 + \frac{1}{120}c^4\varphi^5 - \frac{1}{5040}c^6\varphi^7,$$

et par conséquent,

$$Q = \frac{b^2c^2}{30} \varphi^5 - \frac{b^2c^2}{1260} \varphi^7 (4 - 11c^2);$$

on a donc la valeur très-approchée,

$$(a) \quad E\varphi = \frac{1}{c} \sin c\varphi + \frac{b^2c^2}{30} \varphi^5 - \frac{b^2c^2}{1260} \varphi^7 (4 - 11c^2);$$

on trouverait par un calcul semblable,

$$(b) \quad F\varphi = \frac{1}{c} \log \tan \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}c\varphi \right) - \frac{b^2c^2}{30} \varphi^5 + \frac{b^2c^2}{1260} \varphi^7 (4 - 41c^2).$$

Ajoutant ces deux formules, on en tire une troisième non moins remarquable, savoir,

$$E\varphi + F\varphi = \frac{1}{c} \sin c\varphi + \frac{1}{c} \log \tan \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}c\varphi \right) - \frac{b^2c^4}{42} \varphi^7.$$

106. La formule (a), réduite à son premier terme $\frac{1}{c} \sin c\varphi$, donnera sept décimales exactes si l'on a $\varphi < 6^\circ$; elle en donnerait dix ou plus si on avait $\varphi < 1^\circ \frac{1}{2}$.

En prenant les deux premiers termes, la formule $E\varphi = \frac{1}{c} \sin c\varphi + \frac{b^2c^2}{30} \varphi^5$ donnera sept décimales exactes, si on a $\varphi < 16^\circ 4'$, et dix décimales ou plus, si l'on a $\varphi < 6^\circ 12'$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2\varphi^2}} = 1 + \frac{1}{2}c^2\varphi^2 + \frac{3}{8}c^4\varphi^4 + \dots$$

$$F\varphi = \frac{1}{c} \log \tan \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}c\varphi \right) - \frac{b^2c^2}{30} \varphi^5 + \dots$$

$$\{ (1-c^2) \cdot F\varphi = c^2 F\varphi = \frac{1}{c} \left(-\log \tan \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}c\varphi \right) + \log \tan \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}c\varphi \right) \right) + c \cdot \varphi^7$$

L'approximation s'obtiendra à peu près aux mêmes degrés sur la valeur de $F\phi$, selon qu'on la borne au premier ou aux deux premiers termes.

Si on tient compte de tous les termes de la formule (a), il n'y aura de négligé dans la valeur de $E\phi$, qu'une partie dont le terme le plus grand est de l'ordre $\frac{b^2c^2}{1500} \phi^3$, et ne pourra jamais excéder $\frac{1}{6000} \phi^3$. L'erreur due à ce terme ne sera pas d'une unité décimale du dixième ordre, si on a $\phi < 15^\circ$, et elle ne sera pas d'une unité décimale du septième ordre, si on a $\phi < 32^\circ 45'$. Le même degré d'exactitude n'aura pas lieu dans la formule (b); et pour avoir sept décimales exactes, il ne faudra guère passer la limite $\phi = 20^\circ$.

107. *Exemple I.* Soit $c = \sin 45^\circ$ et $\phi = 10^\circ$; la Table II donne les valeurs suivantes :

$$E\phi = 0.17409 \ 15655,$$

$$F\phi = 0.17497 \ 63019;$$

il faut les comparer à celles que donnent nos formules; et d'abord pour avoir la valeur de E , on calculera les deux premiers termes de la formule (a) comme il suit :

$c\phi = 7^\circ 4' 15'' 84412$	$\phi = \frac{\pi}{18} \dots\dots 9.24187 \ 73 \ 6$
$\sin c\phi \dots\dots 9.09025 \ 93615$	$\phi^5 \dots\dots 6.20938 \ 68$
$\frac{1}{c} \dots\dots\dots 0.15051 \ 49978$	$\frac{b^2c^2}{30} \dots\dots\dots 2.07918.12$
$\frac{1}{c} \sin c\phi \dots\dots 9.24077 \ 43593$	$(1) \dots\dots\dots 4.13020 \ 56$
$\frac{1}{c} \sin c\phi = 0.17409 \ 02140$	
$(1) = \dots\dots\dots 13496$	
$E\phi = 0.17409 \ 15636$	

On voit que les deux premiers termes donnent la valeur de $E\phi$ avec huit décimales exactes, l'erreur n'étant que de dix-neuf unités décimales du dixième ordre. Il en sera de même pour la valeur de $F\phi$

dont voici le calcul :

$$45^\circ + \frac{1}{2} c\phi = 48^\circ 52' 7'' 92206,$$

$$l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} c\phi) = 0.05373 \ 43422.$$

Ce log-tang. étant un logarithme vulgaire, il faudra le multiplier par M pour le changer en logarithme hyperbolique, comme la formule le suppose. Ainsi en appelant h le nombre précédent, on aura les logarithmes suivans, pour déterminer le premier terme B de la formule (b),

$h \dots 8.73025 \ 19567$	
$M \dots 0.36221 \ 56887$	$B = 0.17497 \ 76676$
$\frac{1}{c} \dots 0.15051 \ 49978$	$\frac{1}{30} b^2 c^2 \phi^5 \dots 13496$
$B \dots 9.24298 \ 26232$	$F\phi = 0.17497 \ 63180$

On voit que les sept premières décimales de la valeur de $F\phi$ sont exactes, et que l'erreur ne commence qu'à la huitième, où elle n'est pas de deux unités.

108. Pour obtenir une plus grande approximation, il faut tenir compte du troisième terme contenant ϕ' . Or puisqu'on a $c^2 = \frac{1}{2}$, la correction qu'il faut appliquer à $E\phi$, est égale à la correction précédente (1) multipliée par $\frac{\phi^2}{28}$, de sorte qu'en appelant (2) cette seconde correction qui est additive, on aura $(2) = (1) \cdot \frac{\phi^2}{28}$; de même la seconde correction de $F\phi$ sera $-(1) \cdot \frac{11\phi^2}{28}$.

$(1) \dots 4.13020 \ 56$	$0.17497 \ 63180$
$\frac{11\phi^2}{28} \dots 8.07798 \ 94$	$(2) \dots - \ 161 \ 5$
$(2) \dots 2.20819 \ 50$	$F\phi = 0.17497 \ 63018 \ 5$

La correction (2) pour $E\phi$ sera onze fois moindre que celle de $F\phi$; elle est donc de quinze unités décimales du dixième ordre, ce qui donne la valeur corrigée de $E\phi$, comme il suit :

$$\begin{array}{r} 0.17409 \ 15636 \\ (2) \dots \quad + \ 15 \\ \hline E\phi = 0.17409 \ 15651 \end{array}$$

On voit par conséquent que la valeur de $F\phi$ s'accorde exactement avec celle de la Table II, et que la valeur de $E\phi$ ne diffère de celle de la Table que de quatre unités décimales du dixième ordre; mais l'amplitude n'est que de 10° .

109. *Exemple II.* Soit $c = \sin 45^\circ$ et $\phi = 20^\circ$, on trouve dans la Table II,

$$E\phi = 0.34557 \ 56213,$$

$$F\phi = 0.35261 \ 98854;$$

il faut comparer ces valeurs à celles que donneront nos formules. En voici le calcul :

$$\begin{array}{rcl} c\phi & = & 14^\circ 8' 31'' 68824 \\ \sin c\phi \dots & 9.38797 & 35865 \quad \phi \dots\dots 9.54290 \ 75633 \\ \frac{1}{c} \dots & 0.15051 & 49978 \quad \phi^5 \dots\dots 7.71453 \ 68165 \\ \hline A \dots & 9.53848 & 85843 \quad \frac{b^2 c^2}{30} \dots\dots 2.07918 \ 12460 \\ A & = & 0.54553 \ 224691 \quad (1) \dots\dots 5.63535 \ 557 \\ (1) \dots & + & 4 \ 318725 \\ \hline E\phi & = & 0.34557 \ 543416 \end{array}$$

Ainsi l'erreur de la formule, en prenant les deux premiers termes seulement, n'est que de deux unités décimales du septième ordre. Voyons à quoi elle se réduira en ajoutant le troisième terme, ou la correction $(2) = (1) \cdot \frac{\phi^2}{28}$.

$$\begin{array}{rcl} (1) \dots\dots & 5.63535 & 557 \quad 0.34557 \ 54341 \ 6 \\ \frac{\phi^2}{28} \dots\dots & 7.63865 & 67 \quad (2) = \quad + \ 1879 \ 4 \\ \hline (2) \dots\dots & 3.27401 & 2 \quad E\phi = 0.34557 \ 56221 \end{array}$$

On voit que la valeur de $E\phi$ n'est en erreur que de huit unités décimales du dixième ordre.

En calculant de même la valeur de $F\phi$, on trouvera,

$$\text{par les deux premiers termes} \dots\dots F\phi = 0.35262 \ 20054,$$

$$\text{et par les trois termes} \dots\dots\dots F\phi = 0.35261 \ 99381;$$

l'erreur du dernier résultat est de cinq unités décimales du huitième ordre.

110. *Exemple III.* Soit $c = \sin 45^\circ$ et $\phi = 30^\circ$, on trouvera,

par les deux premiers termes de la formule } $E\phi = 0.51204\ 61509$, $F\phi = 0.53566\ 01252$

par la Table II... $0.51204\ 93225$, $0.53562\ 27328$

Différence... $- 31716$, $+ 3\ 73924$

par les trois termes de la formule,.... } $E\phi = 0.51204\ 93619$, $F\phi = 0.53562\ 48033$

par la Table II... $0.51204\ 93225$, $0.53562\ 27328$

Différence... $+ 394$, $+ 20705$

Par ce dernier résultat, on voit que l'erreur de la formule n'est que de quatre unités décimales du huitième ordre sur $E\phi$; mais elle est de deux unités du sixième sur $F\phi$.

Ainsi à mesure que ϕ augmente, l'erreur croît dans une plus grande proportion sur la fonction F que sur la fonction E ; on ne peut guère aller que jusqu'à 20° pour obtenir F avec sept décimales exactes, tandis qu'on peut aller jusqu'à 30° au moins, pour avoir E avec un pareil degré d'exactitude.

Au reste le cas de $c = \frac{1}{2}$, tenant presque le milieu entre les cas extrêmes $c = 0$, $c = 1$, où les deux formules sont rigoureusement exactes, il y a lieu de croire que les erreurs de ces formules sont alors assez voisines de leur *maximum*, et que dans d'autres cas, les erreurs pourront être moindres; c'est ce que les exemples suivans vont faire voir pour une valeur de c très-peu différente de l'unité.

111. *Exemple IV.* Soit $c = \sin 89^\circ$; voici le résultat de nos formules, comparé à ceux de la Table de l'art. 93, dans les trois hypothèses $\phi = 10^\circ$, $\phi = 20^\circ$, $\phi = 30^\circ$.

$\phi = 10^\circ$ $c\phi = 9^\circ 59' 54'' 517026$ $45^\circ + \frac{1}{2} c\phi = 49^\circ 59' 57'' 258513$		
1 ^{er} terme...	0.17364 84467 4	0.17542 55557 6
2 ^{me}	+ 16 4	- 16 4
	$E = 0.17364\ 84484$	$F = 0.17542\ 55541$
Par la Table.	0.17364 84482	0.17542 55540
Diff.....	+ 2	+ 1

Dans ce premier cas, l'erreur n'est què de une ou de deux unités sur la dixième décimale, ce qui laisse incertain si l'erreur est du côté de la formule ou du côté de la Table. Il n'y a pas lieu, comme on voit, d'appliquer le troisième terme de la formule.

$\phi = 20^\circ$	$c\phi = 19^\circ 59' 49'' 03405$	$45^\circ + \frac{1}{2} c\phi = 54^\circ 59' 54'' 517025$
1 ^{er} terme...	0.34202 22762	0.35637 62023
2 ^{me}	+ 526	— 526
	0.34202 23288	0.35637 61497
3 ^{me}	+ 11	— 56
	E = 0.34202 23299	F = 0.35637 61441
Par la Table.	0.34202 23300	0.35637 61479
Diff.	— 1	— 38

On voit que la différence est insensible sur $E\phi$, et qu'elle est à peine de quatre unités décimales du neuvième ordre sur $F\phi$.

$\phi = 30^\circ$	$c\phi = 29^\circ 59' 43'' 55108$	$45^\circ + \frac{1}{2} c\phi = 59^\circ 59' 51'' 77554$
1 ^{er} terme...	0.50000 70891 6	0.54929 77237 4
2 ^{me}	+ 3994 4	— 3994 4
	0.50000 74886	0.54929 73243
3 ^{me}	+ 182	— 964
	E = 0.50000 75068	F = 0.54929 72279
Par la Table.	0.50000 75089	0.54929 72081
Diff.	— 21	+ 198

On voit que dans ce troisième cas, l'erreur de la formule n'est que de deux unités décimales du neuvième ordre sur E, et de deux du huitième sur F, ce qui est une approximation très-satisfaisante.

112. *Exemple V.* Soit encore $c = \sin 60^\circ$ et $\phi = 30^\circ$, et supposons qu'on demande la valeur approchée de $F\phi$; la formule est alors

$$F\phi = \frac{1}{c} l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} c\phi) - \frac{\phi^5}{160} \left(1 + \frac{107}{168} \phi^2 \right).$$

En voici le calcul :

$$c\phi = 25^{\circ} 58' 50'' 7436, \quad 45^{\circ} + \frac{1}{2} c\phi = 57^{\circ} 59' 25'' 3718, \\ l \operatorname{tang} (45^{\circ} + \frac{1}{2} c\phi) = 0.20404 \ 85486.$$

Soit ce logarithme $= h$, le premier terme P de la formule sera $\frac{Mh}{c}$

h	9.30973 35101
M	0.36221 56887
$\frac{1}{c}$	0.06246 93683
P	9.73441 85671
I ^{er} terme...	0.54252 35153
II ^{me}	— 24 59649
	0.54227 75504
III ^{me}	— 4 29482
Donc valeur app. $E\phi$ =	0.54223 46022
Valeur exacte...	0.54222 91100
Erreur de la formule...	+ 549

On voit que dans ce cas, l'erreur est de cinq unités décimales du sixième ordre.

113. Il résulte de tous ces exemples que la formule (a) peut être employée avec sûreté pour donner la valeur de $E\phi$, tant que ϕ n'excédera pas 30° ; car à cette limite, elle donnera encore sept décimales exactes. Il n'en est pas tout à fait de même de la formule (b), où il convient de ne pas prendre ϕ plus grand que 20° , si on veut avoir au moins sept décimales exactes dans la valeur de $F\phi$. La formule devient cependant plus exacte et permet de porter ϕ jusqu'à 30° , lorsqu'on a $c < \sin 35^{\circ}$, ou $c > \sin 75^{\circ}$.

Avec ces restrictions, les formules (a) et (b) sont d'un usage extrêmement commode, et peuvent remplacer avec avantage les Tables elliptiques même les plus étendues, dans une partie considérable de ces Tables. En effet les calculs qu'exigent ces formules, seront toujours plus simples que les interpolations d'une Table à

double entrée, telle que celle dont nous avons indiqué la construction.

On suppléerait donc entièrement à la Table dont il s'agit, si on avait des moyens faciles de ramener tous les cas à ceux qui se résolvent par les formules (a) et (b). On trouvera dans le chapitre suivant, quelques recherches sur cet objet.

114. Nous remarquerons que l'expression de F pourrait se déduire de celle de E, au moyen de la formule $F = E - c \frac{dE}{dc}$, d'où l'on tire,

$$F = \frac{2 \sin c\varphi}{c} - \varphi \cos c\varphi + \frac{c^2(2c^2 - b^2)}{30} \varphi^5 \left(1 + \frac{11c^2 - 4}{42} \varphi^2\right) - \frac{11}{630} b^2 c^4 \varphi^7.$$

Mais on voit que cette expression est plus composée que la formule (b); ce n'est que dans le cas particulier où l'on a $b^2 = 2c^2$, qu'elle se simplifie beaucoup, puisqu'elle donne

$$F = \frac{2 \sin c\varphi}{c} - \varphi \cos c\varphi - \frac{11}{8505} \varphi^7.$$

Cependant elle pourra être aussi employée dans d'autres cas, puisqu'en général elle est de la forme

$$F = \frac{2 \sin c\varphi}{c} - \varphi \cos c\varphi + A\varphi^5 + B\varphi^7,$$

dans laquelle A et B sont deux coefficients donnés en fonction du module c. On éviterait, par cette formule, le calcul de $\log. (45^\circ + \frac{1}{2}c\varphi)$ qui devient quelquefois assez long.

§ VI. *Méthodes diverses pour calculer les valeurs approchées des fonctions E φ , F φ , lorsque l'angle φ excède la limite supposée dans le § précédent.*

115. Si la valeur donnée de l'angle φ est trop grande pour qu'on puisse déterminer les fonctions E et F avec une exactitude suffisante, par la méthode du § précédent, il faudra diminuer progressivement l'angle φ par la méthode de bisection donnée, art. 21, première Partie.

Pour cet effet, soient ϕ' , ϕ'' , ϕ''' , etc. les amplitudes qui résultent des bissections continuelles de la fonction $F\phi$, ensorte qu'on ait

$$F\phi' = \frac{1}{2} F\phi, \quad F\phi'' = \frac{1}{2} F\phi', \quad F\phi''' = \frac{1}{2} F\phi'', \quad \text{etc.},$$

on aura en même temps,

$$2E\phi' - E\phi = c^2 \sin^2 \phi' \sin \phi,$$

$$2E\phi'' - E\phi' = c^2 \sin^2 \phi'' \sin \phi',$$

$$2E\phi''' - E\phi'' = c^2 \sin^2 \phi''' \sin \phi'',$$

etc.,

et l'amplitude ϕ' se déduira de ϕ par les formules

$$c \sin \phi = \sin \omega, \quad \sin \phi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \phi}{\cos \frac{1}{2} \omega};$$

on déduira semblablement ϕ'' de ϕ' , ϕ''' de ϕ'' , etc.

En formant ainsi la suite décroissante ϕ' , ϕ'' , ϕ''' , etc., on parviendra bientôt à un terme $\phi^n < 15^\circ$, et alors on déterminera aisément, par les formules du § précédent, les valeurs des fonctions $E\phi^n$, $F\phi^n$, approchées jusqu'à huit décimales ou plus, desquelles on déduira les valeurs de $E\phi$ et $F\phi$, exprimées avec un degré peu différent d'approximation. Ces calculs ont l'avantage de ne point supposer connues les fonctions complètes; ils peuvent même servir à déterminer ces fonctions, puisque si on part de l'amplitude ϕ donnée par l'équation $\tan \phi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, on aura $F\phi = \frac{1}{2} F^1$, $E\phi = \frac{1}{2} E^1 + \frac{1}{2} (1 - b)$; d'où il suit qu'ayant déterminé $F\phi$ et $E\phi$, on connaîtra les fonctions complètes F^1 , E^1 .

116. Une seconde méthode qui pourra dans certains cas être préférable à la méthode de bissection, consiste à calculer les amplitudes ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , etc. qui répondent aux fonctions multiples $F\phi_2 = 2F\phi$, $F\phi_3 = 3F\phi$, $F\phi_4 = 4F\phi$, etc. On les détermine par les formules

$$\tan \frac{1}{2} \phi_2 = \Delta \tan \phi,$$

$$\tan \left(\frac{1}{2} \phi_3 + \frac{1}{2} \phi \right) = \Delta \tan \phi_2,$$

$$\tan \left(\frac{1}{2} \phi_4 + \frac{1}{2} \phi_2 \right) = \Delta \tan \phi_3,$$

etc.,

dans lesquelles Δ est une quantité constante; telle qu'en faisant $c \sin \phi = \sin \omega$, on a $\Delta = \cos \omega$.

Au moyen de ces formules, on prolongera la suite $\varphi, \varphi_2, \varphi_3$, etc. jusqu'à un terme $\varphi_n = 2k \cdot \frac{1}{2} \pi \pm \downarrow$, qui approche d'un multiple pair de $\frac{1}{2} \pi$, de manière que la différence \downarrow , positive ou négative, soit assez petite pour qu'on puisse calculer facilement, par les formules du § précédent, les valeurs approchées des fonctions $E\downarrow, F\downarrow$. De là il faudra déduire les valeurs des fonctions proposées $E\varphi, F\varphi$, au moyen des équations

$$\begin{aligned} F\varphi_n &= 2kF' \pm F\downarrow, & E\varphi_n &= 2kE' \pm E\downarrow, \\ F\varphi_2 &= 2F\varphi, & 2E\varphi - E\varphi_2 &= c^2 \sin^2 \varphi \sin \varphi_2, \\ F\varphi_3 &= 3F\varphi, & E\varphi + E\varphi_2 - E\varphi_3 &= c^2 \sin \varphi \sin \varphi_2 \sin \varphi_3, \\ F\varphi_4 &= 4F\varphi, & E\varphi_2 + E\varphi_3 - E\varphi_4 &= c^2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

117. Cette méthode, ainsi que celle de bissection, sont fondées sur des formules trigonométriques très-simples; cependant elles peuvent devenir d'un usage difficile dans certains cas, surtout dans ceux où c et $\sin \varphi$ sont à la fois peu différens de l'unité. En effet, les opérations nécessaires pour changer l'angle proposé φ en un plus petit, auquel la méthode du § précédent soit applicable, peuvent, dans les cas dont il s'agit, être plus longues que celles qui servent à former la série des modules et celle des amplitudes, suivant la méthode générale des approximations, et alors celle-ci deviendrait préférable, tant par sa brièveté que par un degré d'exactitude indéfini.

C'est dans les différens cas particuliers qu'on pourra se décider sur le choix à faire entre ces méthodes, suivant le degré d'approximation qu'on veut obtenir; nous observerons seulement que l'on peut toujours supposer l'angle proposé φ plus petit que l'angle qui a pour tangente $\frac{1}{\sqrt{b}}$. Car soient φ et \downarrow deux angles tels qu'on ait $\tan \varphi \tan \downarrow = \frac{1}{b}$, l'un de ces angles aura sa tangente $< \sqrt{\frac{1}{b}}$. D'ailleurs comme on a

$$\begin{aligned} F\varphi + F\downarrow &= F', \\ E\varphi + E\downarrow &= E' + c^2 \sin \varphi \sin \downarrow, \end{aligned}$$

il est visible qu'au moyen des deux fonctions qui se rapportent au

plus petit des deux angles ϕ et ψ , on déterminera sans difficulté les fonctions qui se rapportent au plus grand.

118. *Exemple I.* Soit $c = \sin 45^\circ$, $\phi = 60^\circ$, le calcul par la méthode de bissection se fera comme il suit :

$$\sin \omega = c \sin \phi = \sqrt{(0.375)}.$$

$\sin \omega \dots$	9.78701 56339	$\omega =$	$37^\circ 45' 40'' 47807$
$\cos \frac{1}{2} \omega \dots$	9.97598 05831	$\frac{1}{2} \omega =$	$18.52.50.23903 \ 5$
$\sin \frac{1}{2} \phi \dots$	9.69897 00043		
$\sin \phi' \dots$	9.72298 94212	$\phi' =$	$31^\circ 53' 58'' 55322$
		$\frac{1}{2} \phi' =$	$15.56.59.27661$
$\sin \phi' \dots$	9.72298 94212		
$c \dots$	9.84948 50022		
$\sin \omega' \dots$	9.57247 44234	$\omega' =$	$21^\circ 56' 29'' 04240$
		$\frac{1}{2} \omega' =$	$10.58.14.52120$
$\sin \frac{1}{2} \phi' \dots$	9.43900 88575		
$\cos \frac{1}{2} \omega' \dots$	9.99198 96871		
$\sin \phi'' \dots$	9.44701 91704	$\phi'' =$	$16^\circ 15' 17'' 50460$

L'angle ϕ'' étant suffisamment petit, il est inutile de pousser plus loin les calculs de la bissection, et en appliquant à l'angle ϕ'' la méthode du § précédent, on trouvera les résultats suivans :

$$c\phi'' = 11^\circ 29' 38'' 12432, \quad 45^\circ + \frac{1}{2} c\phi'' = 50^\circ 44' 49'' 06216.$$

$A =$	0.28180 18598	$B =$	0.28562 30721
1) +	1 53152	1) —	1 53152
2) +	440	2) —	4843
$E\phi'' =$	0.28181 72190	$F\phi'' =$	0.28560 72726

Par la valeur de $F\phi''$, on a immédiatement celle de $F\phi = 4F\phi''$, savoir,

$$\begin{array}{rcl} F\phi & = & 1.14242 \ 90904 \\ \text{Suivant la Table... } F\phi & = & 1.14242 \ 90578 \\ \text{Diff...} & & + \ 326 \end{array}$$

Ainsi l'erreur est d'environ trois unités décimales du huitième ordre.

Quant à la valeur de $E\phi$, on la calculera comme il suit par les formules du n° 115,

$\sin^2 \phi'' \dots$	8.89403 85408	$c^2 \sin^2 \phi' \dots$	9.14494 88468
$\sin \phi' \dots$	9.72298 94212	$\sin \phi \dots$	9.93753 06317
$c^2 \dots$	9.69897 00043	$a \dots$	9.08247 94785
$a' \dots$	8.31599 77663		
$\alpha' =$	0.02070 13070	$\alpha =$	0.12091 48046
$2E\phi' =$	0.56363 44380	$2E\phi' =$	1.08586 62620
$E\phi' =$	0.54293 31310	$E\phi =$	0.96495 14574
		Par la Tab., $E\phi =$	0.96495 14560
		Diff.	+ 14

Ainsi l'erreur sur $E\phi$ n'est que de quatorze unités décimales du dixième ordre.

On aurait pu se borner à huit décimales dans tous ces calculs, et les résultats n'en auraient pas été moins exacts.

119. *Exemple II.* Soit encore $c^2 = \frac{1}{2}$, et l'angle ϕ tel qu'on ait $\tan \phi = \sqrt{6}$; cet angle pourrait être remplacé par celui de 30° , parce qu'on a $F\phi + F(30^\circ) = F'$; mais nous n'aurons point égard à cette propriété des fonctions complémentaires, laquelle ne nous servira que pour vérifier les résultats, et nous appliquerons directement au cas proposé la méthode qui précède, par la multiplication des fonctions.

On aura d'abord $\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \phi)} = \sqrt{\frac{4}{7}}$, ce qui donnera les résultats suivans :

$\Delta \dots$	9.87848 09756 57		
$\tan \phi \dots$	0.38907 56251 92	$\phi =$	$67^\circ 47' 32'' 44438$
$\tan \frac{1}{2} \phi \dots$	0.26755 66008 49	$\frac{1}{2} \phi =$	$61.37.41.57628$
		$\phi_2 =$	$123.15.23.15256$

Déterminant ensuite ϕ_3 par l'équation $\tan(\frac{1}{2} \phi_3 + \frac{1}{2} \phi) = \Delta \tan \phi$, on trouvera

$$\phi_3 = 194^\circ 5' 33'' 85248.$$

Les calculs préliminaires se terminent ici à ϕ_3 , parce que ϕ_3 excède 180° d'un angle plus petit que 15° . Soit cet angle $= \psi$, on aura

$$\phi_3 =$$

$$\varphi_2 = 180^\circ + \psi, \text{ et}$$

$$\psi = 14^\circ 5' 33'' 85248.$$

On calculera donc les fonctions $E\psi$, $F\psi$, par la méthode du § précédent, ce qui donnera

$$E\psi = 0.24473 \ 40068, \quad F\psi = 0.24720 \ 64817;$$

ensuite $E\varphi$ et $F\varphi$ se déduiront des équations

$$F\varphi = \frac{1}{3} (2F' + F\psi),$$

$$E\varphi = \frac{1}{3} (2E' + E\psi) + \frac{1}{3} c^2 \sin \varphi \sin \varphi_2 (\sin \varphi + \sin \varphi_2),$$

dans lesquelles on mettra les valeurs de F' et E' tirées de la Table I; on aura ainsi pour résultat,

$$E\varphi = 1.07004 \ 95812, \quad F\varphi = 1.31845 \ 19452.$$

Ces valeurs se vérifient au moyen des équations

$$F\varphi + F(30^\circ) = F',$$

$$E\varphi + E(30^\circ) = E' + c^2 \sin \varphi \sin 30^\circ = E' + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{e}{7}},$$

dans lesquelles substituant les valeurs données par la Table, on trouve

$$E\varphi = 1.07004 \ 95798, \quad F\varphi = 1.31845 \ 19441.$$

Ainsi l'erreur des résultats précédens n'est que de onze unités décimales du dixième ordre sur la fonction F , et de quatorze des mêmes unités sur la fonction E .

On peut remarquer que la méthode par bisection doit donner en général des résultats moins exacts que la méthode par multiplication. La raison en est que les fonctions $E\varphi$, $F\varphi$ se déduisent des fonctions auxiliaires par multiplication dans le premier cas, et par division dans le second. Il semble d'ailleurs que les calculs sont plus simples par la méthode de multiplication, parce que la quantité Δ est constante dans toutes les formules qui servent à déterminer φ_2 , φ_3 , etc.

120. *Exemple III.* Soit $c = \sin 60^\circ$ et $\tan \varphi = \sqrt{2}$; cette valeur de φ est telle qu'on a $F\varphi = \frac{1}{2} F'$: ainsi on pourra vérifier immédiatement par la Table I, les résultats suivans que donne la méthode de bisection.

$\sin \phi \dots$	9.91195 43705	$\phi = 54^\circ 44' 8'' 197146$
$c \dots$	9.93753 06317	$\frac{1}{2} \phi = 27.22.4.098573$
$\sin \omega \dots$	9.84948 50022	$\omega = 45^\circ, \sin \frac{1}{2} \phi = \sqrt{(\sin 15^\circ \cdot \sqrt{\frac{2}{3}})}$
$\sin \frac{1}{2} \phi \dots$	9.66247 53005	
$\cos \frac{1}{2} \omega \dots$	9.96561 53459	
$\sin \phi' \dots$	9.69685 99546	$\phi' = 29^\circ 50' 23'' 27549$
$c \dots$	9.93753 06317	$\frac{1}{2} \phi' = 14.55.11.63775$
$\sin \omega' \dots$	9.63439 05863	$\omega' = 25^\circ 31' 32'' 07988$
		$\frac{1}{2} \omega' = 12.45.46.03994$
$\sin \frac{1}{2} \phi' \dots$	9.41072 39499	
$\cos \frac{1}{2} \omega' \dots$	9.98913 51266	
$\sin \phi'' \dots$	9.42158 88273	$\phi'' = 15^\circ 18' 25'' 18513$

D'après cette valeur de ϕ'' , on calculera les fonctions $E\phi''$, $F\phi''$ par la méthode du § précédent, et on aura les résultats suivans.

$$c\phi'' = 13^\circ 15' 22'' 49020, \quad 45^\circ + \frac{1}{2} c\phi'' = 51^\circ 37' 41'' 24510.$$

$A = 0.26478$	03649 6	$B = 0.26957$	33608 6
1) +	85058 5	1) —	85058 3
2) +	614 3	2) —	3866 6
$E\phi'' = 0.26478$	89322 2	$F\phi'' = 0.26956$	44683 7

$$F\phi = 4F\phi'' = 1.07825 78735$$

$$\text{Par la Table... } 1.07825 78237$$

$$\text{Diff... } + 498$$

Calculant ensuite $E\phi$ comme dans l'art. 120, on trouvera

$$E\phi = 0.85552 80106;$$

Ce résultat se vérifie par l'équation $E\phi = \frac{1}{2} E' + \frac{1}{2} (1-b) = \frac{1}{2} E' + \frac{1}{4}$; et comme on a $E' = 1.21105 60275 6845$, il en résulte

$$E\phi = 0.85552 80137 84225;$$

d'où l'on voit que l'erreur sur F est de cinq unités décimales du huitième ordre, mais que l'erreur sur E n'est que de trois unités décimales du neuvième ordre.

Ces erreurs paraissent plus grandes pour le module $\sin 60^\circ$ que

pour le module $\sin 45^\circ$; mais il y a à cet égard un *maximum*, passé lequel les erreurs diminuent à mesure que le module augmente. C'est ce qu'on verra par l'exemple suivant.

121. *Exemple IV.* Soit $c = \sin 89^\circ$, $\phi = 75^\circ$; on trouve par les méthodes directes,

$$E\phi = 0.96608 \ 74510 \ 14,$$

$$F\phi = 2.02664 \ 73981 \ 80.$$

En appliquant au même cas la méthode de bisection, on aura les résultats suivans:

$\sin \phi' \dots$	9.88488 58911	$\phi'' =$	$27^\circ 51' 43'' 67900$
$\sin \phi'' \dots$	9.66963 81849	$c\phi'' =$	$27.51.28.40226$
$E\phi'' =$	0.46735 16166 5	$F\phi'' =$	0.50666 18602 5
$E\phi' =$	0.76719 73904 3	$F\phi' =$	1.01332 37205
$E\phi =$	0.96608 74478	$F\phi =$	2.02664 74410
Val. exacte...	510		3982
Erreur...	— 32		+ 428

L'erreur est donc de quatre unités décimales du huitième ordre sur F, et de trois unités du neuvième ordre sur E.

122. Nous joindrons ici le calcul du même exemple par les formules générales données dans la première Partie, art. 76. Nous prendrons de là occasion de simplifier ces formules de manière à en rendre l'usage beaucoup plus facile.

D'après le module donné $c = \sin 89^\circ$, on formera d'abord l'échelle des modules, et on en déduira la valeur de K, comme il suit :

$c \dots$	9.99993 38498 0922	$b \dots$	8.24185 53184 2289
$c' \dots$	9.99999 99987 4053	$b' \dots$	5.88171 67931 8966
$\frac{c'}{c} \dots$	0.00006 61489 3131	$b'' \dots$	1.16137 35963 1083
K....	0.00003 30744 6565		

Il faudra ensuite calculer ϕ' par l'équation $\sin (2\phi - \phi') = c \sin \phi$, ce qui donnera

$$\phi' = 74^\circ 59' 1'' 440615.$$

Enfin on calculera φ'' par l'équation $\sin(2\varphi' - \varphi'') = c' \sin \varphi'$, ou plus simplement par l'équation $\tan(\varphi' - \varphi'') = b'' \tan \varphi'$, qui se réduit à $\varphi' - \varphi'' = b'' \tan \varphi'$; on en déduira

$$\begin{aligned}\varphi' - \varphi'' &= 0'' 00111 49 \\ \varphi'' &= 74^\circ 59' 1'' 43950\end{aligned}$$

Cela posé, la valeur de $F\varphi$ se calculera par les formules $h = \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi'')$, $F = Kmh$, et on trouvera par les Tables à dix décimales seulement,

$$F\varphi = 2.02264 73980.$$

123. Quant à la valeur de $E\varphi$, elle doit être déduite de la formule générale de l'art. 76, qu'on peut mettre sous cette forme :

$$\begin{aligned}E\varphi &= c^2 \sin \varphi + L'F\varphi + 2c \sin \varphi' \left(b' + 2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) \\ &\quad + 4c^{\frac{1}{2}} \sin \varphi'' \left(b'' + 2 \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi''}{2} \right) \\ &\quad + \frac{8\sqrt{c}}{\sqrt{c'}} \sin \varphi''' \left(b''' + 2 \sin^2 \frac{\varphi'' - \varphi'''}{2} \right) \\ &\quad + \frac{16\sqrt{c}}{\sqrt{(c'c''')}} \sin \varphi^{iv} \left(b^{iv} + 2 \sin^2 \frac{\varphi''' - \varphi^{iv}}{2} \right) \\ &\quad + \text{etc.}\end{aligned}$$

Dans l'exemple dont il s'agit, on pourra faire $L = \frac{1}{2} b^2 \sqrt{K}$, et on trouvera les valeurs suivantes des cinq premiers termes auxquels se réduit cette formule,

1°. $c^2 \sin \varphi$	0.96563 16183 3
2°. $L'F\varphi$	0.00030 86564 6
3°. $2cb' \sin \varphi'$	14 70927 8
4°. $4c \sin \varphi' \sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}$	778 4
5°. $4c^{\frac{1}{2}} b'' \sin \varphi''$	56 0

$$\text{Somme.... } E\varphi = 0.96608 74510 1$$

On voit que pour avoir la valeur de $E\varphi$ exacte jusqu'à la dixième décimale, il a fallu calculer cinq termes de la formule; mais cette formule peut être simplifiée, sans cesser de donner un pareil degré d'exactitude, pourvu que le cube de $b' \tan \varphi'$ soit négligeable,

et qu'ainsi on puisse prendre l'arc $\varphi - \varphi'$ pour son sinus et pour sa tangente.

124. Soit d'abord $E\varphi = L'F\varphi + (1 - \frac{1}{2}b^2) \sin \varphi + A$, on pourra, dans la formule générale, rejeter les termes de l'ordre $\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi''}{2}$ ou b'^2 , et faire en conséquence $c'' = 1$, $K = \sqrt{\frac{c'}{c}}$, ce qui donnera

$$A = -\frac{1}{2}b^2 \sin \varphi + 2cb' \sin \varphi' + 4c \sin \varphi' \sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2} + 4b''\sqrt{c} \sin \varphi'.$$

Puisqu'on a $c'b = 2\sqrt{(b'c)}$ ou $2cb' = \frac{1}{2}b^2c'^2$, la première partie de cette valeur que j'appelle P' , se réduit ainsi,

$$P' = 2cb' \sin \varphi' - \frac{1}{2}b^2 \sin \varphi = \frac{1}{2}b^2 (c'^2 \sin \varphi' - \sin \varphi).$$

Soit $\varphi = \varphi' + \omega$, on aura $\sin \varphi = (1 - \frac{1}{2}\omega^2) \sin \varphi' + \omega \cos \varphi'$, ce qui donne

$$P' = -\frac{1}{2}b^2 (\omega \cos \varphi' - \frac{1}{2}\omega^2 \sin \varphi');$$

Mais on a l'équation $\tan \omega = b' \tan \varphi'$, qui, en vertu de notre hypothèse, se réduit à $\omega = b' \tan \varphi'$; donc

$$P' = -\frac{1}{2}b^2 (b' \sin \varphi' - \frac{1}{2}b'^2 \sin \varphi' \tan^2 \varphi').$$

Venons à l'autre partie P'' de la valeur de A ; on pourra y substituer $\frac{1}{4}\omega^2$ pour $\sin^2 \frac{1}{2}\omega$, et $b'' \sin \varphi'$ pour $b'' \sin \varphi''$, ce qui donnera

$$P'' = c\omega^2 \sin \varphi' + 4b''\sqrt{c} \sin \varphi' :$$

Or $4b''\sqrt{c} = 2b'' \frac{c'b}{\sqrt{b'}} = \frac{1}{2}c'bb'\sqrt{b'}$; donc

$$P' + P'' = \frac{1}{2}bb' \sin \varphi' (c'\sqrt{b'} - b) + b'^2 \tan^2 \varphi' \sin \varphi' (c + \frac{1}{4}b^2).$$

Mais on a $b - c'\sqrt{b'} = (\frac{2}{1+b'} - c')\sqrt{b'} = (1+c-c')\sqrt{b'} = c\sqrt{b'}$; car la partie $(1 - c')\sqrt{b'}$, multipliée par $\frac{1}{2}bb'$, est au-dessous de l'ordre b'^3 , et par conséquent négligeable; on pourra donc faire $\frac{1}{2}bb' \sin \varphi' (b - c'\sqrt{b'}) = \frac{1}{2}cbb'\sqrt{b'} \sin \varphi'$, ou simplement $\frac{1}{2}bb'\sqrt{b'} \sin \varphi'$; car la différence $(1 - c)bb'\sqrt{b'}$ appartient encore à l'ordre b'^3 , et peut être négligée; par la même raison, on pourra faire $b'^2 (c + \frac{1}{4}b^2) = b'^2$; donc enfin on aura

$$A = -\frac{1}{2}bb'\sqrt{b'} \sin \varphi' + b'^2 \tan^2 \varphi' \sin \varphi', = 3\varphi' b'^2 (0\varphi'^2 - \varphi' \sqrt{\frac{1}{2}})$$

ce qui donnera $E\varphi = \frac{1}{2} b^2 \sqrt{K} \cdot \sin \varphi + B$, en faisant

$$B = (1 - \frac{1}{2} b^2) \sin \varphi - \frac{1}{2} b b' \sqrt{b'} \sin \varphi' + b'^2 \operatorname{tang}^2 \varphi' \sin \varphi'.$$

Pour simplifier de nouveau cette expression, j'observe qu'on a $b = \frac{2\sqrt{b'}}{1+b'}$, ce qui donne

$$(1 - \frac{1}{2} b^2) \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{(1+b')^2} + \frac{b'^2 \sin \varphi}{(1+b')^2}.$$

Dans le second terme, je substitue la valeur $\sin \varphi = (1+b') \cos \omega \sin \varphi'$, et j'ai $\frac{b'b'}{1+b'} \cos \omega \sin \varphi'$; mais $\cos \omega = 1 - \frac{1}{2} \omega^2$, et la partie $\frac{1}{2} \omega^2 b'^2 \sin \varphi'$ est inférieure aux quantités négligeables; donc ce second terme se réduit à $\frac{b'^2 \sin \varphi'}{1+b'}$ ou $\frac{1}{2} b b' \sqrt{b'} \sin \varphi'$, de sorte qu'il est détruit par le terme $-\frac{1}{2} b b' \sqrt{b'} \sin \varphi'$ de la valeur de B; d'un autre côté, le terme restant $\frac{\sin \varphi}{(1+b')^2}$ peut s'exprimer par $\frac{b^2}{4b'} \sin \varphi$ ou $\frac{c}{c^2} \sin \varphi$; donc enfin on aura

$$E\varphi = \frac{1}{2} b^2 \sqrt{K} \cdot F\varphi + \frac{c}{c^2} \sin \varphi + b'^2 \operatorname{tang}^2 \varphi' \sin \varphi'.$$

C'est le dernier degré de simplicité auquel on peut réduire la formule générale dans la supposition que b'^3 et $(b' \operatorname{tang} \varphi')^3$ soient négligeables. Cette nouvelle formule n'exige d'autres données immédiates que les modules b' et c' , qu'il faut déduire des modules primitifs b et c , et l'amplitude φ' qu'il faut déduire de φ par l'équation $\sin (2\varphi' - \varphi) = c \sin \varphi$.

125. Cette formule ne serait plus applicable si φ' était trop près de 90° ; mais nous avons déjà fait voir qu'on peut toujours supposer $\operatorname{tang} \varphi < \sqrt{\frac{1}{b}}$; ainsi on aura à plus forte raison $\operatorname{tang} \varphi' < \sqrt{\frac{1}{b}}$, et $(b' \operatorname{tang} \varphi')^3 < \frac{1}{4} b'^2 \sqrt{b}$. La même formule suppose qu'on néglige les termes de l'ordre b'^3 ; ainsi dans le cas où on voudra l'appliquer à des valeurs de φ plus petites que 45° , la formule sera exacte, même jusqu'à l'ordre de décimales qui convient à b'^3 ; mais si on a $\varphi > 45^\circ$, le degré d'exactitude sera déterminé par l'ordre de décimales qui convient à $(b' \operatorname{tang} \varphi')^3$; c'est-à-dire que si le premier chiffre significatif de la valeur de $(b' \operatorname{tang} \varphi')^3$ est placé au douzième

rang de décimales, on pourra compter sur à peu près onze décimales exactes dans la valeur de $E\phi$; pourvu que les termes qui composent cette valeur soient calculés avec ce degré de précision.

126. Si on applique la formule qu'on vient de trouver à l'exemple précédent, on trouvera les valeurs des différens termes comme il suit :

$$\begin{array}{rcl}
 1^\circ. & \frac{c}{c'} \sin \phi & \dots\dots\dots 0.96577 \ 87167 \ 06 \\
 2^\circ. & \frac{1}{2} b^2 \sqrt{K} \cdot F\phi & \dots\dots\dots 30 \ 86564 \ 62 \\
 3^\circ. & b'^2 \operatorname{tang}^2 \phi' \sin \phi' & \dots\dots\dots 778 \ 49 \\
 & E\phi = & \underline{\underline{0.96608 \ 74510 \ 17}}
 \end{array}$$

Ainsi on a une valeur de $E\phi$ qui s'accorde parfaitement avec la valeur déterminée par les méthodes les plus exactes.

On remarquera que dans cet exemple, $(b' \operatorname{tang} \phi')^3$ est d'environ deux unités décimales du onzième ordre, et cependant la valeur de $E\phi$ n'est en erreur que dans le douzième ordre, ce qui fait voir que les quantités négligées ont très-peu d'influence sur le résultat.

127. Pour juger encore mieux du degré d'exactitude de notre formule, nous l'appliquerons au cas le moins favorable, qui est celui où l'on a $\operatorname{tang} \phi = \frac{1}{\sqrt{b}}$. Dans ce cas on aura $\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{1+b}} = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 44^\circ \frac{1}{2}}$, et il faudra calculer ϕ' par l'équation $\sin(2\phi' - \phi) = c \sin \phi$; mais comme le terme qui contient ϕ' dans la formule est très-petit, il ne sera pas nécessaire de calculer ϕ' avec une grande précision. Voici ce calcul :

$$\begin{array}{rcl}
 \cos 45^\circ & \dots\dots & 9.84948 \ 500 \\
 \cos 44^\circ \frac{1}{2} & \dots\dots & \underline{3.85324 \ 205} \\
 \sin \phi & \dots\dots & 9.99624 \ 295 \\
 c & \dots\dots & \underline{9.99993 \ 385} \\
 \sin(2\phi' - \phi) & \dots\dots & 9.99617 \ 680
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 2\phi' - \phi & = & 82^\circ 24' 30'' 97 \\
 \phi & = & \underline{82.28.27.74} \\
 2\phi' & = & 164.52.58.71 \\
 \phi' & = & \underline{82.26.29.355}
 \end{array}$$

Connaissant ainsi tous les élémens de la formule, on calculera les trois termes de $E\phi$ comme il suit :

$$\begin{array}{rcl}
 \sin \phi \dots & 9.99624 & 29483 \ 51 \\
 \frac{c}{c'} \dots & 9.99995 & 38523 \ 28 \\
 \hline
 1) \dots & 9.99617 & 68006 \ 79 \\
 \hline
 \tan^2 \phi' \dots & 1.75451 & 53 \\
 b'^2 \dots & 1.76345 & 56 \\
 \sin \phi' \dots & 9.99620 & 99 \\
 \hline
 3) \dots & 3.51395 & 68 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \frac{1}{2} b^2 \sqrt{K} \dots & 6.18269 & 71783 \\
 F\phi \dots & 0.43416 & 25475 \\
 \hline
 2) \dots & 6.61685 & 95258 \\
 \hline
 1) \dots & 0.99123 & 53953 \ 15 \\
 2) + & 41 & 58657 \ 87 \\
 3) + & & 3265 \ 55 \\
 \hline
 E\phi = & 0.99164 & 95856 \ 57
 \end{array}$$

Pour vérifier cette valeur de $E\phi$, j'observe que dans le cas supposé, on a $F\phi = \frac{1}{2} F'$, $E\phi = \frac{1}{2} E' + \frac{1}{2} (1 - b)$; et en substituant les valeurs connues,

$$\begin{array}{rcl}
 b = \sin 1^\circ & = & 0.01745 \ 24064 \ 4 \\
 \frac{1}{2} (1 - b) & = & 0.49127 \ 37967 \ 8 \\
 \frac{1}{2} E' & = & 0.50057 \ 57888 \ 5 \\
 \hline
 E\phi & = & 0.99164 \ 95856 \ 3
 \end{array}$$

Ainsi le résultat donné par la formule, même pour la plus grande valeur de ϕ , est exact jusque dans la dixième décimale.

128. Il y a une autre manière de trouver les valeurs approchées des fonctions $E\phi$, $F\phi$ lorsque b est très-petit, ou seulement lorsque $b \tan \phi$ est plus petit que l'unité. Il faut alors mettre Δ sous la forme $(\cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}$, et en développant cette expression, on aura

$$f \Delta d\phi = f d\phi \cos \phi \left(1 + \frac{1}{2} b^2 \tan^2 \phi - \frac{1.1}{2.4} b^4 \tan^4 \phi + \frac{1.1.3}{2.4.6} b^6 \tan^6 \phi - \text{etc.} \right).$$

Soient P' , P'' , P''' , etc. les intégrales suivantes, prises à compter de $\phi = 0$,

$$P' = \int d\phi \cos \phi \tan^2 \phi, \quad P'' = \int d\phi \cos \phi \tan^4 \phi, \quad P''' = \int d\phi \cos \phi \tan^6 \phi, \quad \text{etc.,}$$

et on aura

$$E\phi = \sin \phi + \frac{1}{2} b^2 P' - \frac{1.1}{2.4} b^4 P'' + \frac{1.1.3}{2.4.6} b^6 P''' - \text{etc.}$$

De même on aura $F - E = \int \left(\frac{1}{\Delta} - \Delta \right) d\phi = c^2 \int \frac{d\phi \sin^2 \phi}{\Delta}$, ou en substituant

substituant la valeur développée de $\frac{1}{\Delta}$, et intégrant,

$$F - E = c^2 \left(P' - \frac{1}{2} b^2 P'' + \frac{1.3}{2.4} b^4 P''' - \frac{1.3.5}{2.4.6} b^6 P^{iv} - \text{etc.} \right).$$

On peut mettre ces deux résultats sous la forme suivante :

$$F\phi = E\phi + c^2 \left(P' - \frac{1}{2} b^2 P'' + \frac{1.3}{2.4} b^4 P''' - \frac{1.3.5}{2.4.6} b^6 P^{iv} + \text{etc.} \right),$$

$$E\phi = \sin \phi + \frac{1}{2} b^2 \left(P' - \frac{1}{2} b^2 P'' + \frac{1.3}{2.4} b^4 P''' - \frac{1.3.5}{2.4.6} b^6 P^{iv} + \text{etc.} \right);$$

et l'on remarquera que les deux séries comprises dans ces formules, peuvent se former simultanément, puisque la seconde est composée des termes de la première, divisés successivement par 1, 2, 3, 4, etc. Tout se réduit donc à trouver les valeurs des intégrales P' , P'' , P''' , etc. On a pour cet effet les formules suivantes :

$$\Phi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) = l \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \phi),$$

$$P' = \Phi - \sin \phi,$$

$$2P'' = \sin \phi \tan^2 \phi - 3P',$$

$$4P''' = \sin \phi \tan^4 \phi - 5P'',$$

$$6P^{iv} = \sin \phi \tan^6 \phi - 7P''',$$

etc.

129. L'emploi de ces formules serait assez facile, si pour les diverses valeurs de ϕ on connaissait les quantités P' , P'' , P''' , etc., ce qui pourrait se faire au moyen d'une Table dressée pour cet objet. Il sera toujours utile de calculer ces quantités pour quelques valeurs déterminées de ϕ , afin de pouvoir, par leur moyen, connaître les valeurs correspondantes des fonctions $E\phi$, $F\phi$.

Soit par exemple, $\phi = 45^\circ$, on trouvera les valeurs suivantes des quantités P' , P'' , P''' , etc.

$$\Phi = l \tan 67^\circ \frac{1}{2} = 0.88137 \ 35870 \ 19$$

$$\sin \phi = \sin 45^\circ = 0.70710 \ 67811 \ 86$$

$$P' = 0.17426 \ 68058 \ 33 \quad P^{iv} = 0.04600 \ 17089 \ 15$$

$$P'' = 0.09215 \ 51816 \ 43 \quad P^v = 0.03663 \ 64251 \ 19$$

$$P''' = 0.06158 \ 52182 \ 42 \quad P^{vi} = 0.03041 \ 06104 \ 88$$

130. Pour avoir en général l'expression de P^n , je fais $\tan \phi = x$,

j'ai $P^n = \int x^{2n} dx (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$, et l'intégration par parties donne pour résultat,

$$P^n = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3x^{2n+3}}{2n+1 \cdot 2n+3} (1+x^2)^{-\frac{5}{2}} + \frac{3 \cdot 5 x^{2n+5}}{2n+1 \cdot 2n+3 \cdot 2n+5} (1+x^2)^{-\frac{7}{2}} + \text{etc.}$$

Cette suite sera toujours convergente, et d'autant plus, toutes choses d'ailleurs égales, que n sera plus grand; il faut excepter seulement le cas où x est infini.

Si l'on fait, comme dans l'exemple précédent, $x = 1$, on aura

$$P^n = \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{2n+1} \left[1 + \frac{3}{2n+3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 5}{2n+3 \cdot 2n+5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2n+3 \cdot 2n+5 \cdot 2n+7} \cdot \frac{1}{8} + \text{etc.} \right],$$

c'est l'expression générale des fonctions P^n lorsque $\phi = 45^\circ$; d'où l'on voit que lorsque n sera très-grand, on aura à peu près $P^n = \frac{\sqrt{2}}{4(2n+1)}$, ou plus exactement $P^n = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2n+1} \left(1 + \frac{3}{4n}\right) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4n-1}$. Ainsi les valeurs de P^n finissent par décroître suivant une progression qui s'approche de plus en plus de la progression harmonique indiquée par le dénominateur $4n - 1$.

Il n'est pas étonnant au reste que la formule d'approximation ne puisse pas s'appliquer lorsque ϕ est trop près de 90° ; car cette formule est fondée sur un développement qui suppose toujours $b \tan \phi < 1$; ainsi dès qu'on a $\tan \phi > \frac{1}{b}$, les formules qui expriment les valeurs des fonctions E et F , cessent d'être exactes.

§ VII. Formules pour développer en séries les fonctions E et F .

131. On a déjà vu dans la première Partie, art. 120 et suivans, que lorsque le module c n'est pas trop près de l'unité, on peut développer la fonction F en une série de la forme

$$F = A\phi - A' \sin 2\phi + A'' \sin 4\phi - A''' \sin 6\phi + \text{etc.},$$

dans laquelle les coefficients A , A' , A'' , etc. sont des fonctions connues de la quantité c .

Pour calculer ces coefficients, nous nous servirons des formules

de l'art. 152, cinquième Partie, en y faisant $n = \frac{1}{2}$. Soit donc $a = c = \frac{1-b}{1+b}$, et réciproquement $c = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$, on aura

$$\Delta^2 = 1 - c^2 \sin^2 \varphi = \frac{1 + a^2 + 2a \cos 2\varphi}{(1+a)^2},$$

$$F = \int \frac{d\varphi}{\Delta} = (1+a) \int \frac{d\varphi}{(1 + a^2 + 2a \cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}};$$

donc si l'on fait, suivant l'art. cité,

$$(1 + a^2 + 2a \cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = P_0 - 2P_1 \cos 2\varphi + 2P_2 \cos 4\varphi - 2P_3 \cos 6\varphi + \text{etc.},$$

on en déduira

$F = (1+a) (P_0 - P_1 \sin 2\varphi + \frac{1}{2} P_2 \sin 4\varphi - \frac{1}{3} P_3 \sin 6\varphi + \text{etc.})$;
c'est-à-dire que les coefficients A se déduiront des coefficients P, suivant cette loi très-simple,

$$\begin{aligned} A &= (1+a) P_0, \\ A' &= (1+a) P_1, \\ A'' &= (1+a)^{\frac{1}{2}} P_2, \\ A''' &= (1+a)^{\frac{1}{3}} P_3, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

152. Connaissant les coefficients qui servent au développement de la fonction F, il sera facile d'avoir ceux qui donnent le développement de la fonction E. En effet soit

$$E = B\varphi + B' \sin 2\varphi - B'' \sin 4\varphi + B''' \sin 6\varphi - \text{etc.};$$

si on différentie chaque membre par rapport à φ , et qu'on divise par $d\varphi$, on aura

$$\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} = B + 2B' \cos 2\varphi - 4B'' \cos 4\varphi + 6B''' \cos 6\varphi - \text{etc.};$$

différentiant de nouveau, il vient

$$\frac{c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = 2^2 B' \sin 2\varphi - 4^2 B'' \sin 4\varphi + 6^2 B''' \sin 6\varphi - \text{etc.}$$

Le premier membre a aussi pour expression,

$$\frac{1}{2} c^2 \sin 2\varphi (A - 2A' \cos 2\varphi + 4A'' \cos 4\varphi - 6A''' \cos 6\varphi + \text{etc.}),$$

ou en faisant le développement,

$$\frac{1}{2}c^2 \left\{ \begin{array}{cccc} A' \sin 2\phi & - A' \sin 4\phi & + 2A'' \sin 6\phi & - 3A''' \sin 8\phi + \text{etc.} \\ - 2A'' & + 3A''' & - 4A^{iv} & + 5A^v \end{array} \right\}$$

Donc en comparant ces deux expressions, on aura

$$\begin{aligned} B' &= \frac{c^2}{8} (A - 2A'') = \frac{c\sqrt{a}}{4} (P_0 - P_2), \\ 2^2 B'' &= \frac{c^2}{8} (A' - 3A''') = \frac{c\sqrt{a}}{4} (P_1 - P_3), \\ 3^2 B''' &= \frac{c^2}{8} (2A'' - 4A^{iv}) = \frac{c\sqrt{a}}{4} (P_2 - P_4), \\ 4^2 B^{iv} &= \frac{c^2}{8} (3A''' - 5A^v) = \frac{c\sqrt{a}}{4} (P_3 - P_5), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

A l'égard du premier terme B, il se déduit immédiatement de la valeur connue de E', puisqu'on a $E' = B \cdot \frac{1}{2} \pi$. On peut aussi trouver B par la formule $B = A - (1 - b) (P_0 + P_1)$.

133. Tout se réduit, comme on voit, à déterminer les coefficients P_0, P_1, P_2 , etc., et nous avons donné pour cet objet toutes les formules nécessaires dans le § XII de la cinquième Partie. Nous remarquerons seulement que si on fait

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \text{etc.},$$

ensorte qu'on ait $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$, $p_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$, etc., les coefficients P_1, P_2, P_3 , etc. pourront s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 a + p_1 p_2 a^3 + p_2 p_3 a^5 + p_3 p_4 a^7 + \text{etc.}, \\ P_2 &= p_2 a^2 + p_1 p_3 a^4 + p_2 p_4 a^6 + p_3 p_5 a^8 + \text{etc.}, \\ P_3 &= p_3 a^3 + p_1 p_4 a^5 + p_2 p_5 a^7 + p_3 p_6 a^9 + \text{etc.}, \\ P_4 &= p_4 a^4 + p_1 p_5 a^6 + p_2 p_6 a^8 + p_3 p_7 a^{10} + \text{etc.}, \\ P_5 &= p_5 a^5 + p_1 p_6 a^7 + p_2 p_7 a^9 + p_3 p_8 a^{11} + \text{etc.}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

De là résulte un mode de formation qui peut être commode dans la pratique. Supposons

$$P_1 = (1) a + (2) a^3 + (3) a^5 + (4) a^7 + \text{etc.},$$

ou $P_1 = f(n) a^{2n-1}$, on tirera de là $P_2 = a f(n) a^{2n-1} \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)$, ou

$$P_2 = (1) a^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) + (2) a^4 \left(1 - \frac{1}{6}\right) + (3) a^6 \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \text{etc.};$$

ensorte que les différens termes qui composent P_2 se déduisent des termes qui composent P_1 , en multipliant ceux-ci par a , puis diminuant le premier terme d'un quart, le second d'un sixième, le troisième d'un huitième, etc.

Si on représente pareillement P_2 par $f(n) a^{2n}$, le coefficient $f(n)$ n'étant plus le même que dans P_1 , on en déduira $P_3 = f(n) a^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{2n+4}\right)$. En général si on fait

$$P_k = (1) a^k + (2) a^{k+2} + (3) a^{k+4} + \text{etc.},$$

on aura le coefficient suivant,

$$P_{k+1} = (1) a^{k+1} \left(1 - \frac{1}{2+2k}\right) + (2) a^{k+3} \left(1 - \frac{1}{4+2k}\right) + (3) a^{k+5} \left(1 - \frac{1}{6+2k}\right) + \text{etc.};$$

cette propriété s'accorde avec l'équation (35), page 301, en y faisant $n = \frac{1}{2}$.

134. Soit, par exemple, $a = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, si l'on veut que tous les coefficients P soient exacts jusqu'à la septième décimale au moins, il faudra admettre jusqu'au terme P_{20} ; car on trouve $P_{20} = 0.0000001409$; dans le même cas on aurait $A^{(20)} = \frac{3}{40} P_{20} = 0.0000000106$. Ainsi pour la formation des coefficients A , il suffirait de continuer la suite des coefficients P jusqu'au terme P_{17} .

Nous avons donné ci-dessus, page 291, les valeurs des coefficients P calculés jusqu'à treize décimales, pour le même cas de $a = \frac{1}{2}$; on en pourra donc déduire les valeurs des coefficients A pour le module $c = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, comme il suit :

$$A = 1.60977 \ 30107 \ 241$$

$$A' = 0.41689 \ 96484 \ 451$$

$$A'' = 0.07912 \ 08719 \ 169$$

$$A''' = 0.02211 \ 45662 \ 001$$

$$A^{IV} = 0.00728 \ 38128 \ 513$$

$$A^V = 0.00262 \ 88697 \ 312$$

$$A^{VI} = 0.00100 \ 59311 \ 174$$

$$A^{VII} = 0.00040 \ 08765 \ 486$$

$$A^{VIII} = 0.00016 \ 46010 \ 603$$

$$A^{IX} = 0.00006 \ 91522 \ 954$$

$$A^X = 0.00002 \ 95838 \ 778$$

$$A^{XI} = 0.00001 \ 28437 \ 038$$

On voit qu'il faudrait environ cinq termes de plus, pour que le dernier coefficient A ne fût pas d'une unité décimale du septième ordre.

On trouvera également par nos formules les valeurs suivantes des coefficients B.

$B = 0.70902 \ 96066 \ 489$	$B^{\text{vi}} = 0.00003 \ 19080 \ 642$
$B' = 0.16128 \ 12518 \ 767$	$B^{\text{vii}} = 0.00001 \ 07001 \ 774$
$B'' = 0.00973 \ 76652 \ 755$	$B^{\text{viii}} = 0.00000 \ 57912 \ 590$
$B''' = 0.00159 \ 39073 \ 139$	$B^{\text{ix}} = 0.00000 \ 14005 \ 071$
$B^{\text{iv}} = 0.00036 \ 94399 \ 302$	$B^{\text{x}} = 0.00000 \ 05345 \ 421$
$B^{\text{v}} = 0.00010 \ 26651 \ 764$	

Le terme suivant B^{xi} ne serait plus que de deux unités décimales du septième ordre ; ainsi peu s'en faut qu'on n'ait atteint pour le développement de la fonction E, la limite assignée.

135. On voit qu'il ne convient guère de passer la limite $a = \frac{1}{2}$, pour que le développement des fonctions E et F, dans la forme supposée, donne des résultats exacts jusque dans la septième décimale, et qu'il ne contienne pas un trop grand nombre de termes ; car puisqu'on aurait, dans ce cas, dix-sept termes dans la valeur de F, et douze dans celle de E, on voit qu'il n'est guère possible de passer un pareil nombre de termes, sans tomber dans des calculs prolixes, et dont l'exactitude ne répondrait pas au travail qu'ils exigent. La limite $a = \frac{1}{2}$ répond au module $c = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, c'est-à-dire à peu près $c = \sin 70^\circ 30'$. Ainsi l'usage de la méthode précédente doit être restreint aux cas où l'angle du module ne surpasse pas $70^\circ 30'$.

136. On pourra cependant reculer beaucoup cette limite de $70^\circ 30'$, si on veut exprimer les fonctions E et F par la variable φ , comme on a exprimé les quantités $D^{\frac{1}{2}}$ et $D^{-\frac{1}{2}}$ dans les art. 175 et 176 de la cinquième Partie.

Pour parvenir directement aux résultats qu'on doit obtenir dans cette hypothèse, il faut, d'après les propriétés connues (art. 60 et 61,

première Partie), former les équations

$$F = \frac{1+c^0}{2} F^0,$$

$$(1 + c^0) E = E^0 + c^0 \sin \varphi^0 - \frac{1}{2} b^2 F^0,$$

dans lesquelles F^0 et E^0 sont mis pour $F(c^0, \varphi^0)$ et $E(c^0, \varphi^0)$.

Or il suit de l'analyse précédente que si c^0 est $< \frac{1}{2}$, on pourra développer les fonctions F^0, E^0 en suites suffisamment convergentes, l'une de la forme $A\varphi^0 - A' \sin 2\varphi^0 + A'' \sin 4\varphi^0 - A''' \sin 6\varphi^0 + \text{etc.}$, l'autre de la forme $B\varphi^0 + B' \sin 2\varphi^0 - B'' \sin 4\varphi^0 + B''' \sin 6\varphi^0 - \text{etc.}$; d'où il suit que les fonctions E et F pourront être exprimées par des suites semblables, auquel se joindra un nouveau terme $a \sin \varphi^0$ dans la valeur de E seulement.

La valeur $c^0 = \frac{1}{2}$ donne à peu près $c^0 = \sin 70^\circ 30'$ et $c = \sin 88^\circ 20'$. Ainsi le développement des fonctions E et F peut être fait en séries convergentes et qui n'aient pas un trop grand nombre de termes, pourvu que l'angle du module ne soit pas plus grand que $88^\circ 20'$. Mais depuis $70^\circ 30'$ jusqu'à $88^\circ 20'$, la variable φ devra être remplacée dans le développement par la variable φ^0 , et on sait que la relation entre ces deux variables est donnée par l'équation $\sin(2\varphi - \varphi^0) = c^0 \sin \varphi^0$, ou par l'équation $\tan(\varphi^0 - \varphi) = b \tan \varphi$.

137. Pour donner un exemple des développemens qu'on peut obtenir en substituant la variable φ^0 à la variable φ , nous supposons comme ci-dessus, $c = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $c^0 = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$; il en résultera $c^0 = \tan^2 15^\circ$; c'est la quantité qui doit être prise pour a dans le calcul des coefficients $P_0, P_1, P_2, \text{etc.}$, d'où l'on déduira les coefficients A et B , relatifs au même cas.

Or en poussant l'approximation jusqu'à dix décimales, on trouvera les résultats suivans :

$P_0 = 1.00129 \ 31762 \ 3$	$A = 1.07318 \ 20071 \ 5$	$B = 0.93421 \ 51703 \ 9$
$P_1 = 0.03596 \ 94145$	$A' = 0.03855 \ 19021$	$B' = 0.03347 \ 15574$
$P_2 = 0.00195 \ 27551$	$A'' = 0.00104 \ 64783$	$B'' = 0.00030 \ 02161$
$P_3 = 0.00011 \ 59168$	$A''' = 0.00004 \ 14131$	$B''' = 0.00000 \ 72401$
$P_4 = 0.00000 \ 72826$	$A^{IV} = 0.00000 \ 19514$	$B^{IV} = 0.00000 \ 02417$
$P_5 = 0.00000 \ 04706$	$A^V = 0.00000 \ 01009$	$B^V = 0.00000 \ 00097$
$P_6 = 0.00000 \ 00310$	$A^{VI} = 0.00000 \ 00055$	$B^{VI} = 0.00000 \ 00004$
$P_7 = 0.00000 \ 00021$	$A^{VII} = 0.00000 \ 00003$	
$P_8 = 0.00000 \ 00001$		

Au moyen de ces coefficients, on aura les valeurs suivantes de F° et E° ,

$$F^\circ = A\varphi^\circ - A'\sin 2\varphi^\circ + A''\sin 4\varphi^\circ - A'''\sin 6\varphi^\circ + \text{etc.},$$

$$E^\circ = B\varphi^\circ + B'\sin 2\varphi^\circ - B''\sin 4\varphi^\circ + B'''\sin 6\varphi^\circ - \text{etc.};$$

et enfin celles des fonctions proposées F et E , savoir,

$$F = \frac{3}{4} F^\circ, \quad E = \frac{2}{3} E^\circ - \frac{1}{4} F^\circ + \frac{1}{3} \sin \varphi^\circ,$$

lesquelles seront exactes jusqu'à la dixième décimale. Or on a vu ci-dessus que l'expression des mêmes fonctions, par la variable φ , exigerait un beaucoup plus grand nombre de termes pour ne donner que sept décimales exactes.

Ces développemens ont l'avantage de représenter les deux fonctions dans toutes les combinaisons analytiques où elles peuvent entrer; d'ailleurs les premiers coefficients A, A', B, B' qu'il importe le plus de connaître exactement, se trouveront toujours avec toute la précision qu'on peut desirer par le moyen de la Table des fonctions complètes.

TABLE I,

TABLE I,

CONTENANT

LES LOGARITHMES DES FONCTIONS COMPLÈTES $F'c$, $E'c$,

Calculés pour tous les angles du module de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 90° , avec 14 décimales pour les 15 premiers et les 15 derniers degrés du quadrant, et 12 décimales pour tous les autres angles de 15 à 75 degrés.

On y a joint les différences premières, secondes, troisièmes et quatrièmes de ces Logarithmes, terminés uniformément à 12 décimales.

L'angle du module qui sert d'argument est désigné par θ .

$c = 57^\circ$

0.	Log. E'.				Diff. I.			II.	III.	Log. F'.				Diff. I.			II.	III.
0.0	0.196	119	877	030.15	330	734	661	468	0	0.196	119	877	030.15	330	734	661	470	4
0.1	0.196	119	546	296.02	992	202	661	468	3	0.196	120	207	764.42	992	204	661	474	6
0.2	0.196	118	554	093.84	1	653	670	661	0	0.196	121	193	968.48	1	653	678	661	8
0.3	0.196	116	900	424.39	2	315	135	661	3	0.196	122	853	646.11	2	315	158	661	12
0.4	0.196	114	585	288.93	2	976	600	661	3	0.196	125	168	803.61	2	976	646	661	14
0.5	0.196	111	608	689.19	3	638	062	661	3	0.196	128	145	449.79	3	638	146	661	16
0.6	0.196	107	970	627.54	4	299	521	661	4	0.196	131	783	595.98	4	299	660	661	20
0.7	0.196	103	671	106.64	4	960	977	661	4	0.196	136	083	256.04	4	961	190	661	20
0.8	0.196	098	710	129.83	5	622	429	661	5	0.196	141	044	446.35	5	622	740	661	24
0.9	0.196	093	087	700.84	6	283	877	661	5	0.196	146	667	185.80	6	284	310	661	28
1.0	0.196	086	803	823.97	6	945	320	661	7	0.196	152	951	495.81	6	945	904	661	27
1.1	0.196	079	858	503.87	7	606	758	661	4	0.196	159	897	400.35	7	607	526	661	33
1.2	0.196	072	251	746.30	8	268	189	661	9	0.196	167	504	925.74	8	269	275	661	33
1.3	0.196	063	983	556.62	8	929	616	661	6	0.196	175	774	101.10	8	930	857	661	37
1.4	0.196	055	053	941.25	9	591	034	661	9	0.196	184	704	957.89	9	592	572	661	40
1.5	0.196	045	462	907.07	10	252	446	661	7	0.196	194	297	530.11	10	254	324	661	40
1.6	0.196	035	210	461.31	10	913	849	661	10	0.196	204	551	854.35	10	916	116	661	44
1.7	0.196	024	296	611.89	11	575	245	661	8	0.196	215	467	969.65	11	577	948	661	48
1.8	0.196	012	721	367.12	12	236	631	661	12	0.196	227	045	917.60	12	239	824	661	48
1.9	0.196	000	484	735.83	12	898	009	661	8	0.196	239	285	742.35	12	901	748	661	53
2.0	0.195	987	586	727.42	13	559	375	661	13	0.196	252	187	490.54	13	563	720	662	54
2.1	0.195	974	027	351.73	14	220	733	661	10	0.196	265	751	211.33	14	225	745	662	56
2.2	0.195	959	806	619.19	14	882	078	661	12	0.196	279	976	956.47	14	887	824	662	60
2.3	0.195	944	924	540.65	15	543	413	661	13	0.196	294	864	780.17	15	549	959	662	61
2.4	0.195	929	381	127.52	16	204	736	661	13	0.196	310	414	739.20	16	212	154	662	65
2.5	0.195	913	176	391.74	16	866	046	661	13	0.196	326	626	892.86	16	874	410	662	67
2.6	0.195	896	310	345.75	17	527	343	661	15	0.196	343	501	303.00	17	536	731	662	69
2.7	0.195	878	783	002.50	18	188	627	661	13	0.196	361	038	033.99	18	199	119	662	72
2.8	0.195	860	594	375.47	18	849	896	661	15	0.196	379	237	152.72	18	861	576	662	75
2.9	0.195	841	744	478.65	19	511	152	661	17	0.196	398	098	728.66	19	524	105	662	76
3.0	0.195	822	233	326.59	20	172	393	661	15	0.196	417	622	833.76	20	186	709	662	81
3.1	0.195	802	060	934.20	20	833	617	661	18	0.196	437	809	542.58	20	849	389	662	82
3.2	0.195	781	227	317.18	21	494	826	661	15	0.196	458	658	932.16	21	512	150	662	83
3.3	0.195	759	732	491.48	22	156	017	661	19	0.196	480	171	082.15	22	174	993	662	90
3.4	0.195	737	576	473.79	22	817	193	661	18	0.196	502	346	074.66	22	837	919	663	87
3.5	0.195	714	759	281.23	23	478	350	661	19	0.196	525	183	994.43	23	500	935	663	94
3.6	0.195	691	280	931.40	24	139	489	661	19	0.196	548	684	928.69	24	164	038	663	95
3.7	0.195	667	141	442.50	24	800	609	661	19	0.196	572	848	967.25	24	827	235	663	97
3.8	0.195	642	340	833.30	25	461	710	661	22	0.196	597	676	202.46	25	490	527	663	100
3.9	0.195	616	879	122.95	26	122	792	661	19	0.196	623	166	729.25	26	153	916	663	103
4.0	0.195	590	756	331.28	26	783	852	661	22	0.196	649	320	645.08	26	817	405	663	104
4.1	0.195	563	972	478.62	27	444	893	661	22	0.196	676	138	049.96	27	480	997	663	109
4.2	0.195	536	527	585.73	28	105	912	660	23	0.196	703	619	046.50	28	144	693	663	109
4.3	0.195	508	421	674.06	28	766	909	660	23	0.196	731	763	739.84	28	808	498	663	115
4.4	0.195	479	654	765.50	29	427	883	660	23	0.196	760	572	237.68	29	472	412	664	113
4.5	0.195	450	226	882.48	30	088	834	660	24	0.196	790	044	650.35	30	136	441	664	119
4.6	0.195	420	138	048.15	30	749	762	660	25	0.196	820	181	090.64	30	800	583	664	122
4.7	0.195	389	388	285.96	31	410	666	660	25	0.196	850	981	674.00	31	464	844	664	120
4.8	0.195	357	977	619.94	32	071	545	660	26	0.196	882	446	518.46	32	129	227	664	129
4.9	0.195	325	906	074.82	32	732	399	660	26	0.196	914	575	744.55	32	793	730	664	126
5.0	0.195	293	173	675.78	33	393	227	660	27	0.196	947	369	475.26	33	458	362	664	132

θ.	Log. E ¹ .					Diff. I.	II.	III.	Log. F ¹ .					Diff. I.	II.	III.				
5.0	0.195	293	173	675.78	33	393	227	660	802	27	0.196	947	369	475.26	33	458	362	664	758	132
5.1	0.195	259	780	448.55	34	054	029	660	775	27	0.196	980	827	836.82	34	123	120	664	890	133
5.2	0.195	225	726	419.56	34	714	804	660	748	28	0.197	014	950	957.06	34	788	010	665	023	137
5.3	0.195	191	011	615.52	35	375	552	660	720	30	0.197	049	738	967.06	35	453	033	665	160	138
5.4	0.195	155	636	063.67	36	036	272	660	690	27	0.197	085	192	000.40	36	118	193	665	298	141
5.5	0.195	119	599	792.43	36	696	962	660	663	32	0.197	121	310	193.01	36	783	491	665	439	144
5.6	0.195	082	902	829.80	37	357	625	660	631	28	0.197	158	093	683.74	37	448	930	665	583	147
5.7	0.195	045	545	205.38	38	018	256	660	603	31	0.197	195	542	613.73	38	114	513	665	730	149
5.8	0.195	007	526	948.53	38	678	859	660	572	33	0.197	233	657	126.96	38	780	243	665	879	151
5.9	0.194	968	848	089.62	39	339	431	660	539	31	0.197	272	437	369.88	39	446	122	666	030	155
6.0	0.194	929	508	659.37	39	999	970	660	508	33	0.197	311	883	491.58	40	112	152	666	185	157
6.1	0.194	889	508	689.40	40	660	478	660	475	32	0.197	351	995	643.79	40	778	337	666	342	159
6.2	0.194	848	848	211.39	41	320	953	660	443	35	0.197	392	773	980.85	41	444	679	666	501	163
6.3	0.194	807	527	257.95	41	981	396	660	408	33	0.197	434	218	659.68	42	111	180	666	664	164
6.4	0.194	765	545	862.25	42	641	804	660	375	36	0.197	476	329	839.83	42	777	844	666	828	167
6.5	0.194	722	904	057.95	43	302	179	660	339	36	0.197	519	107	683.50	43	444	672	666	995	172
6.6	0.194	679	601	879.40	43	962	518	660	303	34	0.197	562	552	355.51	44	111	667	667	167	171
6.7	0.194	635	639	361.46	44	622	821	660	269	38	0.197	606	664	023.26	44	778	834	667	338	176
6.8	0.194	591	016	539.58	45	283	090	660	231	37	0.197	651	442	856.88	45	446	172	667	514	178
6.9	0.194	545	733	449.71	45	943	321	660	194	38	0.197	696	889	029.11	46	113	686	667	692	181
7.0	0.194	499	790	128.70	46	603	515	660	156	38	0.197	743	002	715.22	46	781	378	667	873	182
7.1	0.194	453	186	613.79	47	263	671	660	118	40	0.197	789	784	093.26	47	449	251	668	055	188
7.2	0.194	405	922	942.78	47	923	789	660	078	39	0.197	837	233	343.87	48	117	306	668	243	186
7.3	0.194	357	999	154.26	48	583	867	660	039	41	0.197	885	350	650.34	48	785	549	668	429	194
7.4	0.194	309	415	287.11	49	243	906	659	998	40	0.197	934	136	198.68	49	453	978	668	623	192
7.5	0.194	260	171	381.16	49	903	904	659	958	42	0.197	983	590	177.48	50	122	601	668	815	198
7.6	0.194	210	267	476.70	50	563	862	659	916	41	0.198	033	712	778.02	50	791	416	669	013	198
7.7	0.194	159	703	614.66	51	223	778	659	875	45	0.198	084	504	194.25	51	460	429	669	211	203
7.8	0.194	108	479	836.52	51	883	653	659	830	43	0.198	135	964	622.85	52	129	640	669	414	204
7.9	0.194	056	596	184.47	52	543	483	659	787	43	0.198	188	094	263.08	52	799	054	669	618	208
8.0	0.194	004	052	701.49	53	203	270	659	744	44	0.198	240	893	316.89	53	468	672	669	826	209
8.1	0.193	950	849	430.81	53	863	014	659	700	48	0.198	294	361	989.02	54	138	498	670	035	214
8.2	0.193	896	986	416.53	54	522	714	659	652	44	0.198	348	500	486.81	54	808	533	670	249	215
8.3	0.193	842	463	703.39	55	182	366	659	608	46	0.198	403	309	020.33	55	478	782	670	464	218
8.4	0.193	787	281	336.76	55	841	974	659	562	50	0.198	458	787	802.27	56	149	246	670	682	221
8.5	0.193	731	439	362.58	56	501	536	659	512	46	0.198	514	937	048.15	56	819	928	670	903	224
8.6	0.193	674	937	827.48	57	161	048	659	466	48	0.198	571	756	976.14	57	490	831	671	127	225
8.7	0.193	617	776	778.87	57	820	514	659	418	51	0.198	629	247	807.05	58	161	958	671	352	230
8.8	0.193	559	956	264.56	58	479	932	659	367	49	0.198	687	409	764.55	58	833	310	671	582	232
8.9	0.193	501	476	333.01	59	139	299	659	318	50	0.198	746	243	074.98	59	504	892	671	814	235
9.0	0.193	442	337	033.72	59	798	617	659	268	53	0.198	805	747	967.31	60	176	706	672	049	235
9.1	0.193	382	538	416.62	60	457	885	659	215	50	0.198	865	924	673.35	60	848	755	672	284	243
9.2	0.193	322	080	532.26	61	117	100	659	165	54	0.198	926	773	427.60	61	521	039	672	527	240
9.3	0.193	260	963	431.80	61	776	265	659	111	53	0.198	988	294	467.35	62	193	566	672	767	247
9.4	0.193	199	187	167.27	62	435	376	659	058	54	0.199	050	488	032.59	62	866	333	673	014	249
9.5	0.193	136	751	791.27	63	094	434	659	004	54	0.199	115	354	366.09	63	539	347	673	263	249
9.6	0.193	073	657	357.24	63	753	458	658	950	57	0.199	176	893	713.33	64	212	610	673	512	255
9.7	0.193	009	903	919.11	64	412	388	658	893	55	0.199	241	106	322.58	64	886	122	673	767	257
9.8	0.192	945	491	531.47	65	071	281	658	838	56	0.199	305	992	444.96	65	559	889	674	024	258
9.9	0.192	880	420	249.87	65	730	119	658	782	59	0.199	371	552	334.20	66	233	913	674	282	264
10.0	0.192	814	690	130.52	66	388	901	658	723	57	0.199	437	786	246.87	66	908	195	674	546	264

θ.	Log. E'.				Diff. I.		II.	III.	Log. F'.				Diff. I.		II.	III.				
10° 0	0.192	814	690	130.52	66	388	901	658	723	57	0.199	437	786	246.87	66	908	195	674	546	264
10.1	0.192	748	301	230.05	67	047	624	658	666	60	0.199	504	694	442.43	67	582	741	674	810	267
10.2	0.192	681	253	605.85	67	706	290	658	606	60	0.199	572	277	183.09	68	257	551	675	077	272
10.3	0.192	613	547	316.27	68	364	896	658	546	58	0.199	640	534	733.75	68	932	628	675	349	273
10.4	0.192	545	182	420.29	69	023	442	658	488	64	0.199	709	467	362.18	69	607	977	675	622	275
10.5	0.192	476	158	977.59	69	681	930	658	424	60	0.199	779	075	338.98	70	283	599	675	897	281
10.6	0.192	406	477	048.46	70	340	354	658	364	64	0.199	849	358	937.54	70	959	496	676	178	280
10.7	0.192	336	136	694.11	70	998	718	658	300	62	0.199	920	318	434.08	71	635	674	676	458	286
10.8	0.192	265	137	976.43	71	657	018	658	238	65	0.199	991	954	107.60	72	312	132	676	744	287
10.9	0.192	193	480	958.04	72	315	256	658	173	64	0.200	064	266	239.94	72	988	876	677	031	291
11.0	0.192	121	165	702.08	72	973	429	658	109	67	0.200	137	255	115.91	73	665	907	677	322	292
11.1	0.192	048	192	272.99	73	631	538	658	042	65	0.200	210	921	022.96	74	343	229	677	614	297
11.2	0.191	974	560	735.41	74	289	580	657	977	68	0.200	285	264	251.52	75	020	843	677	911	299
11.3	0.191	900	271	154.98	74	947	557	657	909	67	0.200	360	285	094.87	75	698	754	678	210	302
11.4	0.191	825	323	598.12	75	605	466	657	842	70	0.200	435	983	849.07	76	376	964	678	512	304
11.5	0.191	749	718	131.92	76	263	308	657	772	69	0.200	512	360	813.16	77	055	476	678	816	309
11.6	0.191	673	454	824.38	76	921	080	657	703	70	0.200	589	416	289.00	77	734	292	679	125	309
11.7	0.191	596	533	744.18	77	578	783	657	633	71	0.200	667	150	581.29	78	413	417	679	434	314
11.8	0.191	518	954	960.80	78	236	416	657	562	72	0.200	745	563	997.70	79	092	851	679	748	316
11.9	0.191	440	718	544.69	78	893	978	657	490	72	0.200	824	656	848.71	79	772	599	680	064	321
12.0	0.191	361	824	566.65	79	551	468	657	418	75	0.200	904	429	447.80	80	452	663	680	385	320
12.1	0.191	282	273	098.54	80	208	886	657	343	73	0.200	984	882	111.37	81	133	048	680	705	326
12.2	0.191	202	064	213.03	80	866	229	657	270	76	0.201	066	015	158.67	81	813	753	681	031	328
12.3	0.191	121	197	983.88	81	523	499	657	194	76	0.201	147	828	911.77	82	494	784	681	359	331
12.4	0.191	039	674	485.29	82	180	693	657	118	76	0.201	230	323	695.83	83	176	143	681	690	334
12.5	0.190	957	493	792.36	82	837	811	657	042	78	0.201	313	499	838.93	83	857	833	682	024	337
12.6	0.190	874	655	980.97	83	494	853	656	964	79	0.201	397	357	672.04	84	539	857	682	361	340
12.7	0.190	791	161	128.05	84	151	817	656	885	78	0.201	481	897	529.12	85	222	218	682	701	342
12.8	0.190	707	009	311.07	84	808	702	656	807	81	0.201	567	119	747.11	85	904	919	683	043	347
12.9	0.190	622	200	608.55	85	465	509	656	726	81	0.201	653	024	665.87	86	587	962	683	390	348
13.0	0.190	536	735	099.87	86	122	235	656	645	82	0.201	739	612	628.24	87	271	352	683	738	352
13.1	0.190	450	612	865.02	86	778	880	656	563	83	0.201	826	883	980.09	87	955	090	684	090	356
13.2	0.190	363	833	985.17	87	435	443	656	480	83	0.201	914	839	070.22	88	639	180	684	446	356
13.3	0.190	276	398	542.28	88	091	923	656	397	85	0.202	003	478	250.43	89	323	626	684	802	361
13.4	0.190	188	306	619.14	88	748	320	656	312	85	0.202	092	801	875.58	90	008	428	685	163	365
13.5	0.190	099	558	299.07	89	404	632	656	227	87	0.202	182	810	303.55	90	693	591	685	528	367
13.6	0.190	010	153	666.89	90	060	859	656	140	86	0.202	273	503	895.16	91	379	119	685	895	369
13.7	0.189	920	092	807.90	90	716	999	656	054	89	0.202	364	883	014.36	92	065	014	686	264	374
13.8	0.189	829	375	808.54	91	373	053	655	965	89	0.202	456	948	028.02	93	751	278	686	638	375
13.9	0.189	738	002	755.87	92	029	018	655	876	90	0.202	549	699	306.18	93	437	916	687	013	380
14.0	0.189	645	973	738.18	92	684	894	655	786	91	0.202	643	137	221.85	94	124	929	687	393	382
14.1	0.189	553	288	844.38	93	340	680	655	695	92	0.202	737	262	151.14	94	812	322	687	775	386
14.2	0.189	459	948	164.42	93	996	375	655	603	92	0.202	832	074	473.25	95	500	097	688	161	387
14.3	0.189	365	951	739.31	94	651	978	655	511	94	0.202	927	574	570.41	96	188	258	688	548	393
14.4	0.189	271	299	810.82	95	307	489	655	417	94	0.203	023	762	827.94	96	876	806	688	941	394
14.5	0.189	175	992	321.62	95	962	906	655	323	97	0.203	120	639	634.36	97	565	747	689	335	398
14.6	0.189	080	029	415.60	96	618	229	655	226	96	0.203	218	205	381.15	98	255	082	689	733	400
14.7	0.188	983	411	187.28	97	273	455	655	130	98	0.203	316	460	463.02	98	944	815	690	133	406
14.8	0.188	886	137	732.31	97	928	585	655	032	100	0.203	415	405	277.75	99	634	948	690	539	405
14.9	0.188	788	209	147.27	98	583	617	654	932	98	0.203	515	040	226.25	100	325	487	690	944	412
15.0	0.188	689	625	529.78	99	238	552	654	834	101	0.203	615	365	712.62	101	016	431	691	356	413

θ.	Log. E'.				Diff. I.		II.	III.	Log. F'.				Diff. I.		II.	III.				
15.0	0.188	689	625	530	99	238	552	654	834	101	0.203	615	365	713	101	016	431	691	356	413
15.1	0.188	590	386	978	99	893	386	654	733	100	0.203	716	382	144	101	707	787	691	769	417
15.2	0.188	490	493	592	100	548	119	654	633	103	0.203	818	089	931	102	399	556	692	186	419
15.3	0.188	389	945	473	101	202	752	654	530	104	0.203	920	489	487	103	091	742	692	605	424
15.4	0.188	288	742	721	101	857	282	654	426	105	0.204	023	581	229	103	784	347	693	029	427
15.5	0.188	186	885	439	102	511	708	654	321	106	0.204	127	365	576	104	477	376	693	455	428
15.6	0.188	084	373	731	103	166	029	654	217	107	0.204	231	842	952	105	170	832	693	884	433
15.7	0.187	981	207	702	103	820	246	654	110	109	0.204	337	013	784	105	864	716	694	317	437
15.8	0.187	877	387	456	104	474	356	654	001	107	0.204	442	878	500	106	559	033	694	754	438
15.9	0.187	772	913	100	105	128	357	653	894	112	0.204	549	437	533	107	253	787	695	192	444
16.0	0.187	667	784	743	105	782	251	653	782	109	0.204	656	691	320	107	948	979	695	636	445
16.1	0.187	562	002	492	106	436	033	653	673	113	0.204	764	640	299	108	644	615	696	081	449
16.2	0.187	455	566	459	107	089	706	653	560	113	0.204	873	284	914	109	340	696	696	530	453
16.3	0.187	348	476	753	107	743	266	653	447	113	0.204	982	625	610	110	037	226	696	983	455
16.4	0.187	240	733	487	108	396	713	653	334	116	0.205	092	662	836	110	734	209	697	438	459
16.5	0.187	132	336	774	109	050	047	653	218	116	0.205	203	397	045	111	431	647	697	897	463
16.6	0.187	023	286	727	109	703	265	653	102	119	0.205	314	828	692	112	129	544	698	360	464
16.7	0.186	913	583	462	110	356	367	652	983	116	0.205	426	958	236	112	827	904	698	824	471
16.8	0.186	803	227	095	111	009	350	652	867	122	0.205	539	786	140	113	526	728	699	295	471
16.9	0.186	692	217	745	111	662	217	652	745	119	0.205	653	312	868	114	226	023	699	766	477
17.0	0.186	580	555	528	112	314	962	652	626	123	0.205	767	538	891	114	925	789	700	243	478
17.1	0.186	468	240	566	112	967	588	652	503	122	0.205	882	464	680	115	626	032	700	721	483
17.2	0.186	355	272	978	113	620	091	652	381	126	0.205	998	090	712	116	326	753	701	204	485
17.3	0.186	241	652	887	114	272	472	652	255	124	0.206	114	417	465	117	027	957	701	689	491
17.4	0.186	127	380	415	114	924	727	652	131	128	0.206	231	445	422	117	729	646	702	180	491
17.5	0.186	012	455	688	115	576	858	652	003	127	0.206	349	175	068	118	431	826	702	671	497
17.6	0.185	896	878	830	116	228	861	651	876	128	0.206	467	606	894	119	134	497	703	168	499
17.7	0.185	780	649	969	116	880	737	651	748	132	0.206	586	741	391	119	837	665	703	667	503
17.8	0.185	663	769	232	117	532	485	651	616	129	0.206	706	579	056	120	541	332	704	170	507
17.9	0.185	546	236	747	118	184	101	651	487	134	0.206	827	120	388	121	245	502	704	677	511
18.0	0.185	428	052	646	118	835	588	651	353	137	0.206	948	365	890	121	950	179	705	188	512
18.1	0.185	309	217	058	119	486	941	651	216	134	0.207	070	316	069	122	655	367	705	700	517
18.2	0.185	189	730	117	120	138	157	651	082	133	0.207	192	971	436	123	361	067	706	217	522
18.3	0.185	069	591	960	120	789	239	650	949	139	0.207	316	332	503	124	067	284	706	739	523
18.4	0.184	948	802	721	121	440	188	650	810	140	0.207	440	399	787	124	774	023	707	262	527
18.5	0.184	827	362	533	122	090	998	650	670	139	0.207	565	173	810	125	481	285	707	789	533
18.6	0.184	705	271	535	122	741	668	650	531	143	0.207	690	655	095	126	189	074	708	322	533
18.7	0.184	582	529	867	123	392	199	650	388	141	0.207	816	844	169	126	897	396	708	855	539
18.8	0.184	459	137	668	124	042	587	650	247	145	0.207	943	741	565	127	606	251	709	594	542
18.9	0.184	335	095	081	124	692	834	650	102	146	0.208	071	347	816	128	315	645	709	936	546
19.0	0.184	210	402	247	125	342	936	649	956	146	0.208	199	663	461	129	025	581	710	482	548
19.1	0.184	085	059	311	125	992	892	649	810	148	0.208	328	689	042	129	736	063	711	030	553
19.2	0.183	959	066	419	126	642	702	649	662	151	0.208	458	425	105	130	447	093	711	583	557
19.3	0.183	832	423	717	127	292	364	649	513	152	0.208	588	872	198	131	153	676	712	140	560
19.4	0.183	705	131	353	127	941	877	649	361	151	0.208	720	050	874	131	870	816	712	700	564
19.5	0.183	577	189	476	128	591	238	649	210	154	0.208	851	901	690	132	583	516	713	264	567
19.6	0.183	448	598	238	129	240	448	649	056	154	0.208	984	485	206	133	296	780	713	831	572
19.7	0.183	319	357	790	129	889	504	648	902	158	0.209	117	781	986	134	010	611	714	403	574
19.8	0.183	189	468	286	130	538	406	648	744	156	0.209	251	792	597	134	725	014	714	977	579
19.9	0.183	058	929	880	131	187	150	648	588	161	0.209	386	517	611	135	439	991	715	555	583
20.0	0.182	927	742	730	131	835	738	648	427	159	0.209	521	957	602	136	155	547	716	139	585

θ.	Log. E'.				Diff. I.		II.	III.	Log. F'.				Diff. I.		II.	III.				
20°0	0.182	927	742	730	131	835	738	648	427	159	0.209	521	957	602	136	155	547	716	139	585
20.1	0.182	795	906	992	132	484	165	648	268	162	0.209	658	113	149	136	871	686	716	724	590
20.2	0.182	663	422	827	133	132	433	648	106	164	0.209	794	984	833	137	588	410	717	314	595
20.3	0.182	530	290	394	133	780	539	647	942	165	0.209	932	573	245	138	305	724	717	909	596
20.4	0.182	396	509	855	134	428	481	647	777	166	0.210	070	878	969	139	023	633	718	505	603
20.5	0.182	262	081	374	135	076	258	647	611	167	0.210	209	902	602	139	742	138	719	108	604
20.6	0.182	127	005	116	135	723	869	647	444	170	0.210	349	644	740	140	461	246	719	712	609
20.7	0.181	991	281	247	136	371	313	647	274	171	0.210	490	105	986	141	180	958	720	321	614
20.8	0.181	854	909	934	137	018	587	647	103	172	0.210	631	286	944	141	901	279	720	935	616
20.9	0.181	717	891	347	137	665	690	646	931	174	0.210	773	188	223	142	622	214	721	551	620
21.0	0.181	580	225	657	138	312	621	646	757	175	0.210	915	810	437	143	343	765	722	171	626
21.1	0.181	441	913	036	138	959	378	646	582	178	0.211	059	154	202	144	065	936	722	797	627
21.2	0.181	302	953	658	139	605	960	646	404	177	0.211	203	220	138	144	788	733	723	424	634
21.3	0.181	163	347	698	140	252	364	646	227	181	0.211	348	008	871	145	512	157	724	058	635
21.4	0.181	023	095	334	140	898	591	646	046	181	0.211	493	521	028	146	236	215	724	693	642
21.5	0.180	882	196	745	141	544	637	645	865	184	0.211	639	757	243	146	960	908	725	335	644
21.6	0.180	740	652	106	142	190	502	645	681	184	0.211	786	718	151	147	686	243	725	979	648
21.7	0.180	598	461	604	142	836	183	645	497	186	0.211	934	404	394	148	412	222	726	627	652
21.8	0.180	455	625	421	143	481	680	645	311	189	0.212	082	816	616	149	138	849	727	279	657
21.9	0.180	312	143	741	144	126	991	645	122	189	0.212	231	955	465	149	866	128	727	936	661
22.0	0.180	168	016	750	144	772	113	644	933	188	0.212	381	821	593	150	594	064	728	597	665
22.1	0.180	023	244	637	145	417	046	644	741	193	0.212	532	415	657	151	322	661	729	262	668
22.2	0.179	877	827	591	146	061	787	644	548	194	0.212	683	738	318	152	051	923	729	930	672
22.3	0.179	731	765	804	146	706	335	644	354	197	0.212	835	790	241	152	781	853	730	602	678
22.4	0.179	585	059	460	147	350	689	644	157	197	0.212	988	572	094	153	512	455	731	280	682
22.5	0.179	437	708	780	147	994	846	643	960	201	0.213	142	084	549	154	243	735	731	962	684
22.6	0.179	289	713	934	148	638	806	643	759	201	0.213	296	328	284	154	975	697	732	646	689
22.7	0.179	141	075	128	149	282	565	643	558	202	0.213	451	303	981	155	708	343	733	335	695
22.8	0.178	991	792	563	149	926	123	643	356	204	0.213	607	012	324	156	441	678	734	030	697
22.9	0.178	841	866	440	150	569	479	643	152	210	0.213	763	454	002	157	175	708	734	727	703
23.0	0.178	691	296	961	151	212	631	642	942	209	0.213	920	629	710	157	910	435	735	430	706
23.1	0.178	540	084	330	151	855	573	642	733	209	0.214	078	540	145	158	645	865	736	136	711
23.2	0.178	388	228	757	152	498	306	642	524	213	0.214	237	186	010	159	382	001	736	847	714
23.3	0.178	235	730	451	153	140	830	642	311	213	0.214	396	568	011	160	118	848	737	561	720
23.4	0.178	082	589	621	153	783	141	642	098	214	0.214	556	686	859	160	856	409	738	281	724
23.5	0.177	928	806	480	154	425	239	641	884	216	0.214	717	543	268	161	594	690	739	005	727
23.6	0.177	774	381	241	155	067	123	641	668	221	0.214	879	137	958	162	333	695	739	732	733
23.7	0.177	619	314	118	155	708	791	641	447	222	0.215	041	471	653	163	073	427	740	465	736
23.8	0.177	463	605	327	156	350	238	641	225	225	0.215	204	545	080	163	813	892	741	201	742
23.9	0.177	307	255	089	156	991	463	641	000	224	0.215	368	358	972	164	555	093	741	943	745
24.0	0.177	150	263	626	157	632	463	640	776	227	0.215	532	914	065	165	297	036	742	688	751
24.1	0.176	992	631	163	158	273	239	640	549	227	0.215	698	211	101	166	039	724	743	439	753
24.2	0.176	834	357	924	158	913	788	640	322	233	0.215	864	250	825	166	783	163	744	192	760
24.3	0.176	675	444	136	159	554	110	640	089	232	0.216	031	033	988	167	527	355	744	952	763
24.4	0.176	515	890	026	160	194	199	639	857	234	0.216	198	561	343	168	272	307	745	715	768
24.5	0.176	355	695	827	160	834	056	639	623	237	0.216	366	833	650	169	018	022	746	483	773
24.6	0.176	194	861	771	161	473	679	639	386	240	0.216	535	851	672	169	764	505	747	256	777
24.7	0.176	033	388	092	162	113	065	639	146	239	0.216	705	616	177	170	511	761	748	033	782
24.8	0.175	871	275	027	162	752	211	638	907	243	0.216	876	127	938	171	259	794	748	815	786
24.9	0.175	708	522	816	163	391	118	638	664	246	0.217	047	387	732	172	008	609	749	601	790
25.0	0.175	545	131	698	164	029	782	638	418	245	0.217	219	396	341	172	758	210	750	391	798

0.	Log. E.				Diff. I.	II.	III.	Log. F.	Diff. I.	II.	III.
25.0	0.175	545	131	698	164	029	782	638	418	245	
25.1	0.175	381	101	916	164	668	200	638	173	250	
25.2	0.175	216	433	716	165	306	373	637	923	251	
25.3	0.175	051	127	343	165	944	296	637	672	252	
25.4	0.174	885	183	047	166	581	968	637	420	256	
25.5	0.174	718	601	079	167	219	388	637	164	258	
25.6	0.174	551	381	691	167	856	552	636	906	258	
25.7	0.174	383	525	139	168	493	458	636	648	262	
25.8	0.174	215	031	681	169	130	106	636	386	264	
25.9	0.174	045	901	575	169	766	492	636	122	266	
26.0	0.173	876	135	083	170	402	614	635	856	268	
26.1	0.173	705	732	469	171	038	470	635	588	270	
26.2	0.173	534	693	999	171	674	058	635	318	273	
26.3	0.173	363	019	941	172	309	376	635	045	274	
26.4	0.173	190	710	565	172	944	421	634	771	279	
26.5	0.173	017	766	144	173	579	192	634	492	278	
26.6	0.172	844	186	952	174	213	684	634	214	283	
26.7	0.172	669	973	268	174	847	898	633	931	282	
26.8	0.172	495	125	370	175	481	829	633	649	288	
26.9	0.172	319	643	541	176	115	478	633	361	288	
27.0	0.172	143	528	063	176	748	839	633	073	291	
27.1	0.171	966	779	224	177	381	912	632	782	294	
27.2	0.171	789	397	312	178	014	694	632	488	295	
27.3	0.171	611	382	618	178	647	182	632	193	299	
27.4	0.171	432	735	436	179	279	375	631	894	301	
27.5	0.171	253	456	061	179	911	269	631	593	302	
27.6	0.171	073	544	792	180	542	862	631	291	307	
27.7	0.170	893	001	930	181	174	153	630	984	308	
27.8	0.170	711	827	777	181	805	137	630	676	310	
27.9	0.170	530	022	640	182	435	813	630	366	314	
28.0	0.170	347	586	827	183	066	179	630	052	315	
28.1	0.170	164	520	648	183	696	231	629	737	318	
28.2	0.169	980	824	417	184	325	968	629	419	322	
28.3	0.169	796	498	449	184	955	387	629	097	323	
28.4	0.169	611	543	062	185	584	484	628	774	326	
28.5	0.169	425	958	578	186	213	258	628	448	329	
28.6	0.169	239	745	320	186	841	706	628	119	331	
28.7	0.169	052	903	614	187	469	825	627	788	332	
28.8	0.168	865	433	789	188	097	613	627	454	337	
28.9	0.168	677	336	176	188	725	067	627	117	340	
29.0	0.168	488	611	109	189	352	184	626	777	342	
29.1	0.168	299	258	925	189	978	961	626	435	345	
29.2	0.168	109	279	964	190	605	396	626	090	347	
29.3	0.167	918	674	568	191	231	486	625	743	351	
29.4	0.167	727	443	082	191	857	229	625	392	354	
29.5	0.167	535	585	853	192	482	621	625	038	356	
29.6	0.167	343	103	232	193	107	659	624	682	359	
29.7	0.167	149	995	573	193	732	341	624	323	361	
29.8	0.166	956	263	232	194	356	664	623	962	366	
29.9	0.166	761	906	568	194	980	626	623	596	367	
30.0	0.166	566	925	942	195	604	222	623	229	372	
	0.217	219	396	341	172	758	210	750	391	798	
	0.217	392	154	551	173	508	601	751	189	799	
	0.217	565	663	152	174	259	790	751	988	804	
	0.217	739	922	942	175	011	778	752	792	811	
	0.217	914	934	720	175	764	570	753	603	815	
	0.218	090	699	290	176	518	173	754	418	819	
	0.218	267	217	463	177	272	591	755	237	823	
	0.218	444	490	054	178	027	828	756	060	829	
	0.218	622	517	882	178	783	888	756	889	835	
	0.218	801	301	770	179	540	777	757	724	838	
	0.218	980	842	547	180	298	501	758	562	843	
	0.219	161	141	048	181	057	063	759	405	849	
	0.219	342	198	111	181	816	468	760	254	853	
	0.219	524	014	579	182	576	722	761	107	859	
	0.219	706	591	301	183	337	829	761	966	862	
	0.219	889	929	130	184	099	795	762	828	869	
	0.220	074	028	925	184	862	623	763	697	873	
	0.220	258	891	548	185	626	320	764	570	879	
	0.220	444	517	868	186	390	890	765	449	882	
	0.220	630	908	758	187	156	339	766	331	891	
	0.220	818	065	097	187	922	670	767	222	892	
	0.221	005	987	767	188	689	892	768	114	899	
	0.221	194	677	659	189	458	006	769	013	904	
	0.221	384	135	665	190	227	019	769	917	910	
	0.221	574	362	684	190	996	936	770	827	914	
	0.221	765	359	620	191	767	763	771	741	919	
	0.221	957	127	383	192	539	504	772	660	925	
	0.222	149	666	887	193	312	164	773	585	931	
	0.222	342	979	051	194	085	749	774	516	937	
	0.222	537	064	800	194	860	265	775	453	939	
	0.222	731	925	065	195	635	718	776	392	947	
	0.222	927	560	783	196	412	110	777	339	952	
	0.223	123	972	893	197	189	449	778	291	957	
	0.223	321	162	342	197	967	740	779	248	964	
	0.223	519	130	082	198	746	988	780	212	968	
	0.223	717	877	070	199	527	200	781	180	974	
	0.223	917	404	270	200	308	380	782	154	978	
	0.224	117	712	650	201	090	534	783	132	987	
	0.224	318	803	184	201	873	666	784	119	989	
	0.224	520	676	850	202	657	785	785	108	993	
	0.224	723	334	635	203	442	893	786	106	1001	
	0.224	926	777	528	204	228	999	787	107	1008	
	0.225	131	006	527	205	016	106	788	115	1013	
	0.225	336	022	633	205	804	221	789	128	1020	
	0.225	541	826	854	206	593	349	790	148	1025	
	0.225	748	420	203	207	383	497	791	173	1032	
	0.225	955	803	700	208	174	670	792	205	1035	
	0.226	163	978	370	208	966	875	793	240	1043	
	0.226	372	945	245	209	760	115	794	283	1050	
	0.226	582	705	360	210	554	398	795	333	1054	
	0.226	793	259	758	211	349	731	796	387	1060	

θ.	Log E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
30.0	0.166 566 925 942	195 604 222	623 229	372	0.226 793 259 758	211 349 731	796 387	1060
30.1	0.166 371 321 720	196 227 451	622 857	372	0.227 004 609 489	212 146 118	797 447	1068
30.2	0.166 175 094 269	196 850 308	622 485	377	0.227 216 755 607	212 943 565	798 515	1072
30.3	0.165 978 243 961	197 472 793	622 108	380	0.227 429 699 172	213 742 080	799 587	1079
30.4	0.165 780 771 168	198 094 901	621 728	383	0.227 643 441 252	214 541 667	800 666	1085
30.5	0.165 582 676 267	198 716 629	621 345	385	0.227 857 982 919	215 342 333	801 751	1092
30.6	0.165 383 959 638	199 337 974	620 960	389	0.228 073 325 252	216 144 084	802 843	1096
30.7	0.165 184 621 664	199 958 934	620 571	392	0.228 289 469 336	216 946 927	803 939	1104
30.8	0.164 984 662 730	200 579 505	620 179	395	0.228 506 416 263	217 750 866	805 043	1110
30.9	0.164 784 083 225	201 199 684	619 784	397	0.228 724 167 129	218 555 909	806 153	1118
31.0	0.164 582 883 541	201 819 468	619 387	403	0.228 942 723 038	219 362 062	807 271	1121
31.1	0.164 381 064 073	202 438 855	618 984	404	0.229 162 085 100	220 169 333	808 392	1129
31.2	0.164 178 625 218	203 057 839	618 580	406	0.229 382 254 433	220 977 725	809 521	1136
31.3	0.163 975 567 379	203 676 419	618 174	412	0.229 603 232 158	221 787 246	810 657	1142
31.4	0.163 771 890 960	204 294 593	617 762	415	0.229 825 019 404	222 597 903	811 799	1147
31.5	0.163 567 596 367	204 912 355	617 347	417	0.230 047 617 307	223 409 702	812 946	1157
31.6	0.163 362 684 012	205 529 702	616 930	419	0.230 271 027 009	224 222 648	814 103	1160
31.7	0.163 157 154 310	206 146 632	616 511	425	0.230 495 249 657	225 036 751	815 263	1168
31.8	0.162 951 007 678	206 763 143	616 086	427	0.230 720 286 408	225 852 014	816 431	1174
31.9	0.162 744 244 535	207 379 229	615 659	432	0.230 946 138 422	226 668 445	817 605	1184
32.0	0.162 536 865 306	207 994 888	615 227	433	0.231 172 806 867	227 486 050	818 789	1188
32.1	0.162 328 870 418	208 610 115	614 794	437	0.231 400 292 917	228 304 839	819 977	1193
32.2	0.162 120 260 303	209 224 909	614 357	442	0.231 628 597 756	229 124 816	821 170	1203
32.3	0.161 911 035 394	209 839 266	613 915	443	0.231 857 722 572	229 945 986	822 373	1208
32.4	0.161 701 196 128	210 453 181	613 472	449	0.232 087 668 558	230 768 359	823 581	1215
32.5	0.161 490 742 947	211 066 653	613 023	451	0.232 318 436 917	231 591 940	824 796	1223
32.6	0.161 279 676 294	211 679 676	612 572	455	0.232 550 028 857	232 416 736	826 019	1229
32.7	0.161 067 996 618	212 292 248	612 117	457	0.232 782 445 593	233 242 755	827 248	1236
32.8	0.160 855 704 370	212 904 365	611 660	463	0.233 015 688 348	234 070 003	828 484	1244
32.9	0.160 642 800 005	213 516 025	611 197	467	0.233 249 758 351	234 898 487	829 728	1252
33.0	0.160 429 283 980	214 127 222	610 730	467	0.233 484 656 838	235 728 215	830 980	1255
33.1	0.160 215 156 758	214 737 952	610 263	474	0.233 720 385 053	236 559 195	832 235	1266
33.2	0.160 000 418 806	215 348 215	609 789	477	0.233 956 944 248	237 391 430	833 501	1272
33.3	0.159 785 070 591	215 958 004	609 312	479	0.234 194 335 678	238 224 931	834 773	1279
33.4	0.159 569 112 587	216 567 316	608 833	485	0.234 432 560 609	239 059 704	836 052	1287
33.5	0.159 352 545 271	217 176 149	608 348	488	0.234 671 620 313	239 895 756	837 339	1294
33.6	0.159 135 369 122	217 784 497	607 860	491	0.234 911 516 069	240 733 095	838 633	1301
33.7	0.158 917 584 625	218 392 357	607 369	496	0.235 152 249 164	241 571 728	839 934	1308
33.8	0.158 699 192 268	218 999 726	606 873	498	0.235 393 820 892	242 411 662	841 242	1317
33.9	0.158 480 192 542	219 606 599	606 375	505	0.235 636 232 554	243 252 904	842 559	1324
34.0	0.158 260 585 943	220 212 974	605 870	505	0.235 879 485 458	244 095 463	843 883	1332
34.1	0.158 040 372 969	220 818 844	605 365	512	0.236 123 580 921	244 939 346	845 215	1337
34.2	0.157 819 554 125	221 424 209	604 853	514	0.236 368 520 267	245 784 561	846 552	1348
34.3	0.157 598 129 916	222 029 062	604 339	520	0.236 614 304 828	246 631 113	847 900	1354
34.4	0.157 376 108 854	222 633 401	603 819	522	0.236 860 935 941	247 479 013	849 254	1363
34.5	0.157 153 467 453	223 237 220	603 297	528	0.237 108 414 954	248 328 267	850 617	1368
34.6	0.156 930 230 233	223 840 517	602 769	530	0.237 356 743 221	249 178 884	851 985	1380
34.7	0.156 706 389 716	224 443 286	602 239	535	0.237 605 922 105	250 030 869	853 365	1384
34.8	0.156 481 946 430	225 045 525	601 704	539	0.237 855 952 974	250 884 234	854 749	1395
34.9	0.156 256 900 905	225 647 229	601 165	545	0.238 106 837 208	251 738 983	856 144	1401
35.0	0.156 031 253 676	226 248 394	600 620	546	0.238 358 576 191	252 595 127	857 545	1410

θ.	Log. E ¹				Diff. I.		II.	III.	Log. F ¹				Diff. I.		II.	III.				
35.0	0.156	031	253	676	226	248	394	600	620	546	0.238	358	576	191	252	595	127	857	545	1410
35.1	0.155	805	005	282	226	849	014	600	074	552	0.238	611	171	318	253	452	672	858	955	1417
35.2	0.155	578	156	268	227	449	088	599	522	556	0.238	864	623	990	254	311	627	860	379	1427
35.3	0.155	350	707	180	228	048	610	598	966	561	0.239	118	935	617	255	171	999	861	799	1434
35.4	0.155	122	658	570	228	647	576	598	405	563	0.239	374	107	616	256	033	798	863	235	1443
35.5	0.154	894	010	994	229	245	981	597	842	569	0.239	630	141	414	256	897	031	864	676	1450
35.6	0.154	664	765	013	229	843	823	597	273	575	0.239	887	038	445	257	761	707	866	126	1460
35.7	0.154	434	921	190	230	441	096	596	698	575	0.240	144	800	152	258	627	833	867	586	1467
35.8	0.154	204	480	094	231	037	794	596	123	584	0.240	403	427	985	259	495	419	869	053	1476
35.9	0.153	973	442	300	231	633	917	595	539	586	0.240	662	923	404	260	364	472	870	529	1486
36.0	0.153	741	808	383	232	229	456	594	953	591	0.240	923	287	876	261	235	001	872	015	1492
36.1	0.153	509	578	927	232	824	409	594	362	595	0.241	184	522	877	262	107	016	873	507	1501
36.2	0.153	276	754	718	233	418	771	593	767	601	0.241	446	629	893	262	980	523	875	008	1512
36.3	0.153	043	335	747	234	012	538	593	166	604	0.241	709	610	416	263	855	531	876	520	1519
36.4	0.152	809	323	209	234	605	704	592	562	609	0.241	973	465	947	264	732	051	878	039	1529
36.5	0.152	574	717	505	235	198	266	591	953	614	0.242	238	197	998	265	610	090	879	568	1536
36.6	0.152	339	519	239	235	790	219	591	339	618	0.242	503	808	088	266	489	658	881	104	1547
36.7	0.152	103	729	020	236	381	558	590	721	624	0.242	770	297	746	267	370	762	882	651	1554
36.8	0.151	867	347	462	236	972	279	590	097	627	0.243	037	668	508	268	253	413	884	205	1564
36.9	0.151	630	375	183	237	562	376	589	470	634	0.243	305	921	921	269	137	618	885	769	1574
37.0	0.151	392	812	807	238	181	846	588	836	637	0.243	575	059	539	270	023	387	887	343	1583
37.1	0.151	154	660	961	238	740	682	588	199	642	0.243	845	082	927	270	910	730	888	926	1589
37.2	0.150	915	920	279	239	328	881	587	557	648	0.244	115	993	657	271	799	656	890	515	1603
37.3	0.150	676	591	398	239	916	438	586	909	651	0.244	387	793	313	272	690	171	892	118	1609
37.4	0.150	436	674	960	240	503	347	586	258	659	0.244	660	483	484	273	582	289	893	727	1622
37.5	0.150	196	171	613	241	089	605	585	599	660	0.244	934	065	773	274	476	016	895	349	1627
37.6	0.149	955	082	008	241	675	204	584	939	667	0.245	208	541	789	275	371	365	896	976	1638
37.7	0.149	713	406	804	242	260	143	584	272	673	0.245	483	913	154	276	268	341	898	614	1650
37.8	0.149	471	146	661	242	844	415	583	599	677	0.245	760	181	495	277	166	955	900	264	1657
37.9	0.149	228	302	246	243	428	014	582	922	683	0.246	037	348	450	278	067	219	901	921	1669
38.0	0.148	984	874	232	244	010	936	582	239	687	0.246	315	415	669	278	969	140	903	590	1677
38.1	0.148	740	863	296	244	593	175	581	552	692	0.246	594	384	809	279	872	730	905	267	1686
38.2	0.148	496	270	121	245	174	727	580	860	699	0.246	874	257	559	280	777	997	906	953	1699
38.3	0.148	251	095	394	245	755	587	580	161	702	0.247	155	035	536	281	684	950	908	652	1707
38.4	0.148	005	339	807	246	335	748	579	459	710	0.247	436	720	486	282	593	602	910	359	1717
38.5	0.147	759	004	059	246	915	207	578	749	712	0.247	719	314	088	283	503	961	912	076	1728
38.6	0.147	512	088	852	247	493	956	578	037	719	0.248	002	818	049	284	416	037	913	804	1738
38.7	0.147	264	594	896	248	071	993	577	518	726	0.248	287	234	086	285	329	841	915	542	1747
38.8	0.147	016	522	903	248	649	311	576	592	729	0.248	572	563	927	286	245	383	917	280	1759
38.9	0.146	767	873	592	249	225	903	575	863	736	0.248	858	809	310	287	162	672	918	048	1771
39.0	0.146	518	647	689	249	801	766	575	127	740	0.249	145	971	982	288	081	720	920	819	1778
39.1	0.146	268	845	923	250	376	893	574	387	748	0.249	434	053	702	289	002	539	922	597	1789
39.2	0.146	018	469	030	250	951	280	573	639	750	0.249	723	056	241	289	925	136	924	386	1801
39.3	0.145	767	517	750	251	524	919	572	889	759	0.250	012	981	377	290	849	522	926	187	1813
39.4	0.145	515	992	831	252	097	808	572	130	765	0.250	303	830	899	291	775	709	928	000	1821
39.5	0.145	263	895	023	252	669	938	571	365	767	0.250	595	606	608	292	703	709	929	821	1833
39.6	0.145	011	225	085	253	241	303	570	598	775	0.250	888	310	317	293	633	530	931	654	1843
39.7	0.144	757	983	782	253	811	901	569	823	781	0.251	181	943	847	294	565	184	933	497	1855
39.8	0.144	504	171	881	254	381	724	569	042	787	0.251	476	509	031	295	498	683	935	352	1868
39.9	0.144	249	790	157	254	950	766	568	255	792	0.251	772	007	714	296	434	035	937	220	1879
40.0	0.143	994	839	391	255	519	021	567	433	798	0.252	068	441	749	297	371	255	939	099	1886

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
40.0	0.143 994 839 391	255 519 021	567 463	798	0.252 068 441 749	297 371 255	939 099	1886
40.1	0.143 739 320 370	256 086 484	566 665	805	0.252 365 813 004	298 310 354	940 985	1901
40.2	0.143 483 233 886	256 653 149	565 860	809	0.252 664 123 358	299 251 339	942 886	1912
40.3	0.143 226 580 737	257 219 009	565 051	817	0.252 963 374 697	300 194 225	944 798	1923
40.4	0.142 969 361 728	257 784 060	564 234	823	0.253 263 568 922	301 139 023	946 721	1934
40.5	0.142 711 577 668	258 348 294	563 411	828	0.253 564 707 945	302 085 744	948 655	1948
40.6	0.142 453 229 374	258 911 705	562 583	834	0.253 866 793 689	303 034 399	950 603	1956
40.7	0.142 194 317 669	259 474 288	561 749	841	0.254 169 828 088	303 985 002	952 559	1971
40.8	0.141 934 843 381	260 036 037	560 908	847	0.254 473 813 090	304 937 561	954 530	1982
40.9	0.141 674 807 344	260 596 945	560 061	855	0.254 778 750 651	305 892 091	956 512	1995
41.0	0.141 414 210 399	261 157 006	559 206	858	0.255 084 642 742	306 848 603	958 507	2005
41.1	0.141 153 053 393	261 716 212	558 348	867	0.255 391 491 345	307 807 110	960 512	2018
41.2	0.140 891 337 181	262 274 560	557 481	872	0.255 699 298 455	308 767 622	962 530	2031
41.3	0.140 629 062 621	262 832 041	556 609	879	0.255 008 066 077	309 730 152	964 561	2044
41.4	0.140 366 230 580	263 388 650	555 730	886	0.255 317 796 229	310 694 713	966 605	2055
41.5	0.140 102 841 930	263 944 380	554 844	890	0.255 628 490 942	311 661 318	968 660	2068
41.6	0.139 838 897 550	264 499 224	553 954	901	0.255 940 152 260	312 629 978	970 728	2081
41.7	0.139 574 398 326	265 053 178	553 053	904	0.257 252 782 238	313 600 706	972 809	2093
41.8	0.139 309 345 148	265 606 231	552 149	912	0.257 566 382 944	314 573 515	974 902	2107
41.9	0.139 043 738 917	266 158 380	551 237	923	0.257 880 956 459	315 548 417	977 009	2120
42.0	0.138 777 580 537	266 709 617	550 317	924	0.258 193 504 876	316 525 426	979 129	2133
42.1	0.138 510 870 920	267 259 934	549 393	934	0.258 513 030 302	317 504 555	981 262	2144
42.2	0.138 243 610 986	267 809 327	548 459	937	0.258 830 534 857	318 485 817	983 406	2160
42.3	0.137 975 801 659	268 357 786	547 522	943	0.259 149 020 674	319 469 223	985 566	2172
42.4	0.137 707 443 873	268 905 308	546 574	952	0.259 468 489 897	320 454 789	987 738	2187
42.5	0.137 438 538 565	269 451 882	545 622	962	0.259 788 944 686	321 442 527	989 925	2198
42.6	0.137 169 086 683	269 997 504	544 660	964	0.260 110 387 213	322 432 452	992 123	2213
42.7	0.136 899 089 179	270 542 164	543 696	977	0.260 432 819 665	323 424 575	994 336	2226
42.8	0.136 628 547 015	271 085 860	542 719	980	0.260 756 244 240	324 418 911	996 562	2242
42.9	0.136 357 461 155	271 628 579	541 739	990	0.261 080 663 151	325 415 473	998 804	2256
43.0	0.136 085 832 576	272 170 318	540 749	995	0.261 406 078 624	326 414 277	1001 060	2268
43.1	0.135 813 662 258	272 711 067	539 754	1004	0.261 732 492 901	327 415 337	1003 328	2282
43.2	0.135 540 951 191	273 250 821	538 750	1009	0.262 059 908 238	328 418 665	1005 610	2297
43.3	0.135 267 700 370	273 789 571	537 741	1019	0.262 388 326 933	329 424 275	1007 907	2313
43.4	0.134 993 910 799	274 327 312	536 722	1027	0.262 717 751 178	330 432 182	1010 220	2327
43.5	0.134 719 583 487	274 864 034	535 695	1031	0.263 048 183 360	331 442 402	1012 547	2340
43.6	0.134 444 719 453	275 399 729	534 664	1042	0.263 379 625 762	332 454 949	1014 887	2355
43.7	0.134 169 319 724	275 934 393	533 622	1047	0.263 712 080 711	333 469 836	1017 242	2371
43.8	0.133 893 385 331	276 468 015	532 575	1056	0.264 045 550 547	334 487 078	1019 613	2387
43.9	0.133 616 917 316	277 000 590	531 519	1065	0.264 380 037 625	335 506 691	1022 000	2400
44.0	0.133 339 916 726	277 532 109	530 454	1071	0.264 715 544 316	336 528 691	1024 400	2416
44.1	0.133 062 384 617	278 062 563	529 383	1077	0.265 052 073 007	337 553 091	1026 816	2431
44.2	0.132 784 322 054	278 591 946	528 306	1090	0.265 389 626 098	338 579 907	1029 247	2447
44.3	0.132 505 730 108	279 120 252	527 216	1094	0.265 728 206 005	339 609 154	1031 694	2463
44.4	0.132 226 609 856	279 647 468	526 122	1103	0.266 067 815 159	340 640 848	1034 157	2479
44.5	0.131 946 962 388	280 173 590	525 019	1111	0.266 408 456 007	341 675 005	1036 636	2495
44.6	0.131 666 788 798	280 698 609	523 908	1120	0.266 750 131 012	342 711 641	1039 131	2508
44.7	0.131 386 090 189	281 222 517	522 788	1126	0.267 092 842 653	343 750 772	1041 639	2526
44.8	0.131 104 867 672	281 745 305	521 662	1137	0.267 436 593 405	344 792 411	1044 165	2545
44.9	0.130 823 122 367	282 266 967	520 525	1143	0.267 781 385 836	345 836 576	1046 710	2557
45.0	0.130 540 855 400	282 787 492	519 382	1153	0.268 127 222 412	346 883 286	1049 267	2576

0.	Log. E.				Diff. I.		II.	III.		Log. F.				Diff. I.		II.	III.			
45°0	0.130	540	855	400	282	787	492	519	382	1153	0.268	127	222	412	346	883	286	1049	267	2576
45.1	0.130	258	067	908	283	306	874	518	229	1160	0.268	474	105	698	347	932	553	1051	843	2592
45.2	0.129	974	761	034	283	825	103	517	069	1169	0.268	822	038	251	348	984	396	1054	435	2609
45.3	0.129	690	935	931	284	342	172	515	900	1177	0.269	171	022	647	350	038	831	1057	044	2626
45.4	0.129	406	593	759	284	858	072	514	723	1188	0.269	521	061	478	351	095	875	1059	670	2643
45.5	0.129	121	735	687	285	372	795	513	535	1193	0.269	872	157	353	352	155	545	1062	313	2660
45.6	0.128	836	362	892	285	886	330	512	342	1204	0.270	224	312	898	353	217	858	1064	973	2679
45.7	0.128	550	476	562	286	398	672	511	138	1212	0.270	577	530	756	354	282	831	1067	652	2693
45.8	0.128	264	077	890	286	909	810	509	926	1220	0.270	931	813	587	355	350	483	1070	345	2714
45.9	0.127	977	168	080	287	419	736	508	706	1232	0.271	287	164	070	356	420	828	1073	059	2730
46.0	0.127	689	748	344	287	928	442	507	474	1238	0.271	643	584	898	357	493	887	1075	789	2749
46.1	0.127	401	819	902	288	435	916	506	236	1247	0.272	001	078	785	358	569	676	1078	538	2765
46.2	0.127	113	383	986	288	942	152	504	989	1256	0.272	359	648	461	359	648	214	1081	303	2787
46.3	0.126	824	441	834	289	447	141	503	733	1267	0.272	719	296	675	360	729	517	1084	090	2802
46.4	0.126	534	994	693	289	950	874	502	466	1276	0.273	080	026	192	361	813	607	1086	842	2821
46.5	0.126	245	043	819	290	453	340	501	190	1282	0.273	441	839	799	362	900	499	1089	713	2843
46.6	0.125	954	590	479	290	954	530	499	908	1294	0.273	804	740	298	363	990	212	1092	556	2857
46.7	0.125	663	635	949	291	454	438	498	614	1304	0.274	168	730	510	365	082	768	1095	413	2879
46.8	0.125	372	181	511	291	953	052	497	310	1312	0.274	533	813	278	366	178	181	1098	292	2898
46.9	0.125	080	228	459	292	450	362	495	998	1321	0.274	899	991	459	367	276	473	1101	190	2917
47.0	0.124	787	778	097	292	946	360	494	677	1332	0.275	267	267	932	368	377	663	1104	107	2936
47.1	0.124	494	831	737	293	441	037	493	345	1341	0.275	635	645	595	369	481	770	1107	043	2956
47.2	0.124	201	390	700	293	934	382	492	004	1350	0.276	005	127	365	370	588	813	1109	999	2977
47.3	0.123	907	456	318	294	426	386	490	654	1361	0.276	375	716	178	371	698	812	1112	976	2995
47.4	0.123	613	029	932	294	917	040	489	293	1370	0.276	747	414	990	372	811	788	1115	971	3018
47.5	0.123	318	112	892	295	406	333	487	923	1381	0.277	120	226	778	373	927	759	1118	989	3036
47.6	0.123	022	706	559	295	894	256	486	542	1388	0.277	494	154	537	375	046	748	1122	025	3057
47.7	0.122	726	812	313	296	380	798	485	154	1401	0.277	869	201	285	376	168	773	1125	082	3078
47.8	0.122	430	431	505	296	865	952	483	753	1410	0.278	245	370	058	377	293	855	1128	160	3099
47.9	0.122	133	565	553	297	349	705	482	343	1421	0.278	622	663	913	378	422	015	1131	259	3121
48.0	0.121	836	215	848	297	832	048	480	922	1429	0.279	001	085	928	379	553	274	1134	380	3140
48.1	0.121	538	383	800	298	312	970	479	493	1442	0.279	380	639	202	380	687	654	1137	520	3164
48.2	0.121	240	070	830	298	792	463	478	051	1450	0.279	761	326	856	381	825	174	1140	684	3185
48.3	0.120	941	278	367	299	270	514	476	601	1462	0.280	143	152	030	382	965	858	1143	869	3206
48.4	0.120	642	007	853	299	747	115	475	139	1473	0.280	526	117	888	384	109	727	1147	075	3227
48.5	0.120	342	260	738	300	222	254	473	666	1482	0.280	910	227	615	385	256	802	1150	302	3252
48.6	0.120	042	038	484	300	695	920	472	184	1493	0.281	295	484	417	386	407	104	1153	554	3273
48.7	0.119	741	342	564	301	168	104	470	691	1503	0.281	681	891	521	387	560	658	1156	827	3296
48.8	0.119	440	174	460	301	638	795	469	188	1516	0.282	069	452	179	388	717	485	1160	123	3319
48.9	0.119	138	535	665	302	107	983	467	672	1527	0.282	458	169	664	389	877	608	1163	442	3343
49.0	0.118	836	427	682	302	575	655	466	145	1535	0.282	848	047	272	391	041	050	1166	785	3365
49.1	0.118	533	852	027	303	041	800	464	610	1548	0.283	239	088	322	392	207	835	1170	150	3388
49.2	0.118	230	810	227	303	506	410	463	062	1558	0.283	631	296	157	393	377	985	1173	538	3412
49.3	0.117	927	303	817	303	969	472	461	504	1570	0.284	024	674	142	394	551	523	1176	950	3431
49.4	0.117	623	334	345	304	430	976	459	934	1583	0.284	419	225	665	395	728	473	1180	387	3461
49.5	0.117	318	903	369	304	890	910	458	351	1590	0.284	814	954	138	396	908	860	1183	848	3485
49.6	0.117	014	012	459	305	349	261	456	761	1605	0.285	211	862	998	398	092	708	1187	333	3508
49.7	0.116	708	663	198	305	806	022	455	156	1615	0.285	609	955	706	399	280	041	1190	841	3536
49.8	0.116	402	857	176	306	261	178	453	541	1627	0.286	009	255	747	400	470	882	1194	377	3559
49.9	0.116	096	595	998	306	714	719	451	914	1638	0.286	409	706	629	401	665	259	1197	936	3584
50.0	0.115	789	881	279	307	166	633	450	276	1651	0.286	811	371	888	402	863	195	1201	520	3610

θ.	Log E'.	Diff. I.	II.	III.	Log. F'.	Diff. I.	II.	III.
50°0	0.115 789 881 279	307 166 633	450 276 1651		0.286 811 371 888	402 863 195	1201 520 3610	
50.1	0.115 482 714 646	307 616 909	448 625 1662		0.287 214 235 083	404 064 715	1205 130 3637	
50.2	0.115 175 097 737	308 065 534	446 963 1673		0.287 618 299 798	405 269 845	1208 767 3662	
50.3	0.114 867 032 203	308 512 497	445 290 1686		0.288 023 569 643	406 478 612	1212 429 3688	
50.4	0.114 558 519 706	308 957 787	443 604 1699		0.288 430 048 255	407 691 041	1216 117 3714	
50.5	0.114 249 561 919	309 401 391	441 905 1709		0.288 837 739 296	408 907 158	1219 831 3743	
50.6	0.113 940 160 528	309 845 296	440 196 1723		0.289 246 646 454	410 126 989	1223 574 3769	
50.7	0.113 630 317 232	310 283 492	438 473 1733		0.289 656 773 443	411 350 563	1227 343 3794	
50.8	0.113 320 033 740	310 721 965	436 740 1748		0.290 068 124 006	412 577 906	1231 137 3824	
50.9	0.113 009 311 775	311 158 705	434 992 1759		0.290 480 701 912	413 809 043	1234 961 3851	
51.0	0.112 698 153 070	311 593 697	433 233 1772		0.290 894 510 955	415 044 004	1238 812 3880	
51.1	0.112 386 559 373	312 026 930	431 461 1784		0.291 309 554 959	416 282 816	1242 692 3907	
51.2	0.112 074 532 443	312 458 391	429 677 1798		0.291 725 837 775	417 525 508	1246 599 3936	
51.3	0.111 762 074 052	312 888 068	427 879 1809		0.292 143 363 283	418 772 107	1250 535 3965	
51.4	0.111 449 185 984	313 315 947	426 070 1823		0.292 562 135 390	420 022 642	1254 500 3994	
51.5	0.111 135 870 037	313 742 017	424 247 1837		0.292 982 158 032	421 277 142	1258 494 4023	
51.6	0.110 822 128 020	314 166 264	422 410 1847		0.293 403 435 174	422 535 636	1262 517 4055	
51.7	0.110 507 961 756	314 588 674	420 563 1863		0.293 825 970 810	423 798 153	1266 572 4082	
51.8	0.110 193 373 082	315 009 237	418 700 1876		0.294 249 768 963	425 064 725	1270 654 4114	
51.9	0.109 878 363 845	315 427 937	416 824 1887		0.294 674 833 688	426 335 379	1274 768 4144	
52.0	0.109 562 935 908	315 844 761	414 937 1903		0.295 101 169 067	427 610 147	1278 912 4175	
52.1	0.109 247 091 147	316 259 698	413 034 1916		0.295 528 779 214	428 889 059	1283 087 4207	
52.2	0.108 930 831 449	316 672 732	411 118 1928		0.295 957 668 273	430 172 146	1287 294 4238	
52.3	0.108 614 158 717	317 083 850	409 190 1944		0.296 387 840 419	431 459 440	1291 532 4269	
52.4	0.108 297 074 867	317 493 040	407 246 1956		0.296 819 299 859	432 750 972	1295 801 4302	
52.5	0.107 979 581 827	317 900 286	405 290 1970		0.297 252 050 831	434 046 773	1300 103 4334	
52.6	0.107 661 681 541	318 305 576	403 320 1985		0.297 686 097 604	435 346 876	1304 437 4368	
52.7	0.107 343 375 965	318 708 896	401 335 1999		0.298 121 444 480	436 651 313	1308 805 4400	
52.8	0.107 024 667 069	319 110 231	399 336 2013		0.298 558 095 797	437 960 118	1313 205 4434	
52.9	0.106 705 556 838	319 509 567	397 323 2026		0.298 996 055 911	439 273 323	1317 639 4467	
53.0	0.106 386 047 271	319 906 890	395 297 2041		0.299 435 329 234	440 590 962	1322 106 4501	
53.1	0.106 066 140 381	320 302 187	393 256 2057		0.299 875 920 196	441 913 068	1326 607 4537	
53.2	0.105 745 838 194	320 695 443	391 199 2071		0.300 317 833 264	443 239 675	1331 144 4572	
53.3	0.105 425 142 751	321 086 642	389 128 2084		0.300 761 072 939	444 570 819	1335 716 4605	
53.4	0.105 104 056 109	321 475 770	387 044 2100		0.301 205 643 758	445 906 535	1340 321 4642	
53.5	0.104 782 580 339	321 862 814	384 944 2115		0.301 651 550 293	447 246 856	1344 963 4678	
53.6	0.104 460 717 525	322 247 758	382 829 2130		0.302 098 797 149	448 591 819	1349 641 4715	
53.7	0.104 138 469 767	322 630 587	380 699 2145		0.302 547 388 968	449 941 460	1354 356 4749	
53.8	0.103 815 839 180	323 011 286	378 554 2159		0.302 997 330 428	451 295 816	1359 105 4788	
53.9	0.103 492 827 894	323 389 840	376 395 2176		0.303 448 626 244	452 654 921	1363 893 4827	
54.0	0.103 169 438 054	323 766 235	374 219 2190		0.303 901 281 165	454 018 814	1368 720 4862	
54.1	0.102 845 671 819	324 140 454	372 029 2206		0.304 355 299 979	455 387 534	1373 582 4901	
54.2	0.102 521 531 365	324 512 483	369 803 2223		0.304 810 687 513	456 761 116	1378 483 4940	
54.3	0.102 197 018 882	324 882 306	367 600 2236		0.305 267 448 629	458 139 599	1383 423 4980	
54.4	0.101 872 135 576	325 249 906	365 364 2255		0.305 725 588 228	459 523 032	1388 403 5017	
54.5	0.101 546 886 670	325 615 270	363 109 2267		0.306 185 111 250	460 911 425	1393 420 5060	
54.6	0.101 221 271 400	325 978 379	360 842 2287		0.306 646 022 675	462 304 845	1398 480 5097	
54.7	0.100 895 293 021	326 339 221	358 555 2300		0.307 108 327 520	463 703 325	1403 577 5141	
54.8	0.100 568 953 800	326 697 776	356 255 2319		0.307 572 030 845	465 106 902	1408 718 5181	
54.9	0.100 242 256 024	327 054 031	353 936 2333		0.308 037 137 747	466 515 620	1413 898 5222	
55.0	0.099 915 201 993	327 407 967	351 603 2351		0.308 503 653 367	467 929 518	1419 120 5264	

θ.	Log. E'.				Diff. I.				II.	III.	Log. F'.				Diff. I.				II.	III.
55.0	0.099	915	201	993	327	407	967	351	603	2351	0.308	503	653	367	467	929	518	1419	120	5264
55.1	0.099	587	794	026	327	759	570	349	252	2367	0.308	971	582	885	469	348	638	1424	384	5307
55.2	0.099	260	034	456	328	108	822	346	885	2383	0.309	440	931	523	470	773	022	1429	691	5351
55.3	0.098	931	925	634	328	455	707	344	502	2402	0.309	911	704	545	472	202	713	1435	042	5392
55.4	0.098	603	469	927	328	800	209	342	100	2416	0.310	383	907	258	473	637	755	1440	434	5437
55.5	0.098	274	669	718	329	142	309	339	684	2435	0.310	857	545	013	475	078	189	1455	871	5482
55.6	0.097	945	527	409	329	481	993	337	249	2451	0.311	332	623	202	476	524	060	1451	353	5526
55.7	0.097	616	045	416	329	819	242	334	798	2471	0.311	809	147	262	477	975	413	1456	879	5572
55.8	0.097	286	226	174	330	154	040	332	327	2486	0.312	287	122	675	479	432	292	1462	451	5618
55.9	0.096	956	072	134	330	486	367	329	841	2502	0.312	766	554	967	480	894	743	1468	069	5664
56.0	0.096	625	585	767	330	816	208	327	339	2523	0.313	247	449	710	482	362	812	1473	733	5710
56.1	0.096	294	769	559	331	143	547	324	816	2539	0.313	729	812	522	483	836	545	1479	443	5759
56.2	0.095	963	626	012	331	468	363	322	277	2557	0.314	213	649	067	485	315	988	1485	202	5807
56.3	0.095	632	157	649	331	790	640	319	720	2576	0.314	698	965	055	486	801	190	1491	009	5854
56.4	0.095	300	367	009	332	110	360	317	144	2594	0.315	185	766	245	488	292	199	1496	863	5904
56.5	0.094	968	256	649	332	427	504	314	550	2610	0.315	674	058	444	489	789	062	1502	767	5955
56.6	0.094	635	829	145	332	742	054	311	940	2631	0.316	163	847	506	491	291	829	1508	722	6002
56.7	0.094	303	087	091	333	053	994	309	309	2649	0.316	655	139	335	492	800	551	1514	724	6055
56.8	0.093	970	033	097	333	363	303	306	660	2667	0.317	147	939	886	494	315	275	1520	779	6106
56.9	0.093	636	669	794	333	669	963	303	993	2686	0.317	642	255	161	495	836	054	1526	885	6156
57.0	0.093	302	999	831	333	973	956	301	307	2704	0.318	138	091	215	497	362	939	1533	041	6212
57.1	0.092	969	025	875	334	275	263	298	603	2724	0.318	635	454	154	498	895	980	1539	253	6262
57.2	0.092	634	750	612	334	573	866	295	879	2744	0.319	134	350	134	500	435	233	1545	515	6317
57.3	0.092	300	176	746	334	869	745	293	135	2763	0.319	634	785	367	501	980	748	1551	832	6371
57.4	0.091	965	307	001	335	162	880	290	372	2780	0.320	136	766	115	503	532	580	1558	203	6427
57.5	0.091	630	144	121	335	453	252	287	592	2803	0.320	640	298	695	505	090	783	1564	630	6482
57.6	0.091	294	690	869	335	740	844	284	789	2820	0.321	145	389	478	506	655	413	1571	112	6538
57.7	0.090	958	950	025	336	025	633	281	969	2842	0.321	652	044	891	508	226	525	1577	650	6594
57.8	0.090	622	924	392	336	307	602	279	127	2861	0.322	160	271	416	509	804	175	1584	244	6653
57.9	0.090	286	616	790	336	586	729	276	266	2880	0.322	670	075	591	511	388	419	1590	897	6710
58.0	0.089	950	030	061	336	862	995	273	386	2902	0.323	181	464	010	512	979	316	1597	607	6770
58.1	0.089	613	167	066	337	136	381	270	484	2922	0.323	694	443	326	514	576	923	1604	377	6830
58.2	0.089	276	030	685	337	406	865	267	562	2942	0.324	209	020	249	516	181	300	1611	207	6890
58.3	0.088	938	623	820	337	674	427	264	620	2963	0.324	725	201	549	517	792	507	1618	097	6949
58.4	0.088	600	949	393	337	939	047	261	657	2984	0.325	242	994	056	519	410	604	1625	046	7014
58.5	0.088	263	010	346	338	200	704	258	673	3004	0.325	762	404	660	521	035	650	1632	060	7076
58.6	0.087	924	809	642	338	459	377	255	669	3027	0.326	283	440	310	522	667	710	1639	136	7137
58.7	0.087	586	350	265	338	715	046	252	642	3046	0.326	806	108	020	524	306	846	1646	273	7203
58.8	0.087	247	635	219	338	967	688	249	596	3070	0.327	330	414	866	525	953	119	1653	476	7268
58.9	0.086	908	667	531	339	217	284	246	526	3089	0.327	856	367	985	527	606	595	1660	744	7332
59.0	0.086	569	450	247	339	463	810	243	437	3112	0.328	383	974	580	529	267	339	1668	076	7400
59.1	0.086	229	986	437	339	707	247	240	325	3133	0.328	913	241	919	530	935	415	1675	476	7467
59.2	0.085	890	279	190	339	947	572	237	192	3158	0.329	444	177	334	532	610	891	1682	943	7535
59.3	0.085	550	331	618	340	184	764	234	034	3177	0.329	976	788	225	534	293	834	1690	478	7604
59.4	0.085	210	146	854	340	418	798	230	857	3199	0.330	511	082	059	535	984	312	1698	082	7673
59.5	0.084	869	728	056	340	649	655	227	658	3224	0.331	047	066	371	537	682	394	1705	755	7745
59.6	0.084	529	078	401	340	877	313	224	434	3244	0.331	584	748	765	539	388	149	1713	500	7816
59.7	0.084	188	201	088	341	101	747	221	190	3270	0.332	124	136	914	541	101	649	1721	316	7889
59.8	0.083	847	099	341	341	322	937	217	920	3291	0.332	665	238	563	542	822	965	1729	205	7960
59.9	0.083	505	776	404	341	540	857	214	629	3313	0.333	208	061	528	544	552	170	1737	165	8037
60.0	0.083	164	235	547	341	755	486	211	316	3337	0.333	752	613	698	546	289	336	1745	201	8113

0.	Log. E.				Diff. I.			II.	III.	Log. F.				Diff. I.			II.	III.			
60.0	0.083	164	255	547	341	755	486	211	316	3337	0.333	752	613	698	546	289	336	1745	201	8	113
60.1	0.082	822	480	061	341	966	802	207	979	3363	0.334	298	903	034	548	034	537	1753	314	8	187
60.2	0.082	480	513	259	342	174	781	204	616	3384	0.334	846	937	571	549	787	851	1761	501	8	263
60.3	0.082	138	338	478	342	379	397	201	232	3408	0.335	396	725	422	551	549	352	1769	764	8	345
60.4	0.081	795	959	081	342	580	629	197	824	3433	0.335	948	274	774	553	319	116	1778	109	8	422
60.5	0.081	453	378	452	342	778	453	194	391	3456	0.336	501	593	890	555	097	225	1786	531	8	501
60.6	0.081	110	599	999	342	972	844	190	935	3481	0.337	056	691	115	556	883	756	1795	032	8	583
60.7	0.080	767	627	155	343	163	779	187	454	3504	0.337	613	574	871	558	678	788	1803	615	8	667
60.8	0.080	424	463	376	343	351	233	183	950	3531	0.338	172	253	659	560	482	403	1812	282	8	748
60.9	0.080	081	112	143	343	535	183	180	419	3556	0.338	732	736	062	562	294	685	1821	030	8	834
61.0	0.079	737	576	960	343	715	602	176	863	3578	0.339	295	030	747	564	115	715	1829	864	8	919
61.1	0.079	393	861	358	343	892	465	173	285	3604	0.339	859	146	462	565	945	579	1838	783	9	006
61.2	0.079	049	968	893	344	065	750	169	681	3632	0.340	425	092	041	567	784	362	1847	789	9	092
61.3	0.078	705	903	143	344	235	431	166	049	3656	0.340	992	876	403	569	632	151	1856	881	9	184
61.4	0.078	361	667	712	344	401	480	162	393	3679	0.341	562	508	554	571	489	032	1866	065	9	271
61.5	0.078	017	266	232	344	563	873	158	714	3708	0.342	133	997	586	573	355	097	1875	336	9	365
61.6	0.077	672	702	359	344	722	587	155	006	3734	0.342	707	352	683	575	230	433	1884	701	9	457
61.7	0.077	327	979	772	344	877	593	151	272	3760	0.343	282	583	116	577	115	134	1894	158	9	549
61.8	0.076	983	102	179	345	028	865	147	512	3786	0.343	859	698	250	579	009	292	1903	707	9	647
61.9	0.076	638	073	314	345	176	377	143	726	3811	0.344	438	707	542	580	912	999	1913	354	9	741
62.0	0.076	292	896	937	345	320	103	139	915	3841	0.345	019	620	541	582	826	353	1923	095	9	841
62.1	0.075	947	576	834	345	460	018	136	074	3866	0.345	602	446	894	584	749	448	1932	936	9	937
62.2	0.075	602	116	816	345	596	092	132	208	3892	0.346	187	196	342	586	682	384	1942	873	10	041
62.3	0.075	256	520	724	345	728	300	128	314	3921	0.346	773	878	726	588	625	257	1952	914	10	140
62.4	0.074	910	792	424	345	856	614	124	393	3946	0.347	362	503	983	590	578	171	1963	054	10	244
62.5	0.074	564	935	810	345	981	007	120	444	3972	0.347	953	082	154	592	541	225	1973	298	10	349
62.6	0.074	218	954	803	346	101	451	116	469	4005	0.348	545	623	379	594	514	523	1983	647	10	455
62.7	0.073	872	853	352	346	217	920	112	464	4033	0.349	140	137	902	596	498	170	1994	102	10	562
62.8	0.073	526	635	432	346	330	384	108	431	4062	0.349	736	636	072	598	492	272	2004	664	10	672
62.9	0.073	180	305	048	346	438	815	104	369	4088	0.350	335	128	344	600	496	936	2015	336	10	783
63.0	0.072	833	866	233	346	543	184	100	281	4119	0.350	935	625	280	602	512	272	2026	119	10	893
63.1	0.072	487	323	049	346	643	465	96	162	4148	0.351	538	137	552	604	538	391	2037	012	11	010
63.2	0.072	140	679	584	346	739	627	92	014	4176	0.352	142	675	943	606	575	403	2048	022	11	121
63.3	0.071	793	939	957	346	831	641	87	838	4207	0.352	749	251	346	608	623	425	2059	143	11	243
63.4	0.071	447	108	316	346	919	479	83	631	4235	0.353	357	874	771	610	682	568	2070	386	11	359
63.5	0.071	100	188	837	347	003	110	79	396	4266	0.353	968	557	339	612	752	954	2081	745	11	478
63.6	0.070	753	185	727	347	082	506	75	130	4295	0.354	581	310	293	614	834	699	2093	223	11	603
63.7	0.070	406	103	221	347	157	636	70	835	4327	0.355	196	144	992	616	927	922	2104	826	11	726
63.8	0.070	058	945	585	347	228	471	66	508	4357	0.355	813	072	914	619	032	748	2116	552	11	853
63.9	0.069	711	717	114	347	294	979	62	151	4386	0.356	432	105	662	621	149	300	2128	405	11	978
64.0	0.069	364	422	135	347	357	130	57	765	4418	0.357	053	254	962	623	277	705	2140	383	12	110
64.1	0.069	017	065	005	347	414	895	53	347	4450	0.357	676	532	667	625	418	088	2152	493	12	239
64.2	0.068	669	650	110	347	468	242	48	897	4482	0.358	301	950	755	627	570	581	2164	732	12	374
64.3	0.068	322	181	868	347	517	139	44	415	4512	0.358	929	521	336	629	735	313	2177	106	12	510
64.4	0.067	974	664	729	347	561	554	39	903	4544	0.359	559	256	649	631	912	419	2189	616	12	645
64.5	0.067	627	103	175	347	601	457	35	359	4575	0.360	191	169	068	634	102	035	2202	261	12	787
64.6	0.067	279	501	718	347	636	816	30	784	4611	0.360	825	271	103	636	304	296	2215	048	12	926
64.7	0.066	931	864	902	347	667	600	26	173	4641	0.361	461	575	399	638	519	344	2227	974	13	072
64.8	0.066	584	197	302	347	693	773	21	532	4675	0.362	100	094	743	640	747	318	2241	046	13	217
64.9	0.066	236	503	529	347	715	305	16	857	4706	0.362	740	842	061	642	988	364	2254	263	13	364
65.0	0.065	888	788	224	347	732	162	12	151	4742	0.363	383	830	425	645	242	627	2267	627	13	515

θ.	Log. E.				Diff. I.			II.	III.	Log. F.				Diff. I.			II.	III.			
65.0	0.065	888	788	224	347	732	162	12	151	4742	0.363	383	830	425	645	242	627	2267	627	13	515
65.1	0.065	541	056	062	347	744	313	7	409	4772	0.364	029	073	052	647	510	254	2281	142	13	669
65.2	0.065	193	311	749	347	751	722	+2	637	4811	0.364	676	583	306	649	791	396	2294	811	13	822
65.3	0.064	845	560	027	347	754	359	-2	174	4842	0.365	326	374	702	652	086	207	2308	633	13	981
65.4	0.064	497	805	668	347	752	185	7	016	4874	0.365	978	460	909	654	394	840	2322	614	14	139
65.5	0.064	150	053	483	347	745	169	11	890	4913	0.366	632	855	749	656	717	454	2336	753	14	302
65.6	0.063	802	308	314	347	733	279	16	803	4946	0.367	289	573	203	659	054	207	2351	057	14	467
65.7	0.063	454	575	035	347	716	476	21	749	4980	0.367	948	627	410	661	405	264	2365	524	14	634
65.8	0.063	106	858	559	347	694	727	26	729	5018	0.368	610	032	674	663	770	788	2380	158	14	806
65.9	0.062	759	163	832	347	667	998	31	747	5051	0.369	273	803	462	666	150	946	2394	964	14	978
66.0	0.062	411	495	834	347	636	251	36	798	5088	0.369	939	954	408	668	545	910	2409	942	15	152
66.1	0.062	063	859	583	347	599	453	41	886	5124	0.370	608	500	318	670	955	852	2425	094	15	334
66.2	0.061	716	260	130	347	557	567	47	010	5160	0.371	279	456	170	673	380	946	2440	428	15	512
66.3	0.061	368	702	563	347	510	557	52	170	5200	0.371	952	837	116	675	821	374	2455	940	15	699
66.4	0.061	021	192	006	347	458	387	57	370	5233	0.372	628	658	490	678	277	314	2471	639	15	884
66.5	0.060	673	733	619	347	401	017	62	603	5271	0.373	306	935	804	680	748	953	2487	523	16	075
66.6	0.060	326	332	602	347	338	416	67	874	5309	0.373	987	684	757	683	236	476	2503	598	16	268
66.7	0.059	978	994	186	347	270	542	73	183	5347	0.374	670	921	233	685	740	074	2519	866	16	467
66.8	0.059	631	723	644	347	197	359	78	530	5387	0.375	356	661	307	688	259	940	2536	333	16	664
66.9	0.059	284	526	285	347	118	829	83	917	5421	0.376	044	921	247	690	796	273	2552	997	16	868
67.0	0.058	937	407	456	347	034	912	89	338	5461	0.376	735	717	520	693	349	270	2569	865	17	076
67.1	0.058	590	372	544	346	945	574	94	799	5504	0.377	429	066	790	695	919	135	2586	941	17	283
67.2	0.058	243	426	970	346	850	775	100	303	5540	0.378	124	985	925	698	506	076	2604	224	17	500
67.3	0.057	896	576	195	346	750	472	105	843	5580	0.378	823	492	001	701	110	300	2621	724	17	716
67.4	0.057	549	825	723	346	644	629	111	423	5621	0.379	524	602	301	703	732	024	2639	440	17	934
67.5	0.057	203	181	094	346	533	206	117	044	5660	0.380	228	334	325	706	371	464	2657	374	18	161
67.6	0.056	856	647	888	346	416	162	122	704	5701	0.380	934	705	789	709	028	838	2675	535	18	392
67.7	0.056	510	231	726	346	293	458	128	405	5742	0.381	643	734	627	711	704	373	2693	927	18	620
67.8	0.056	163	938	268	346	165	053	134	147	5783	0.382	355	439	000	714	398	300	2712	547	18	860
67.9	0.055	817	773	215	346	030	906	139	930	5824	0.383	069	837	300	717	110	847	2731	407	19	098
68.0	0.055	471	742	309	345	890	976	145	754	5867	0.383	786	948	147	719	842	254	2750	505	19	344
68.1	0.055	125	851	333	345	745	222	151	621	5909	0.384	506	790	401	722	592	759	2769	849	19	594
68.2	0.054	780	106	111	345	593	601	157	530	5951	0.385	229	383	160	725	362	608	2789	443	19	845
68.3	0.054	434	512	510	345	436	071	163	481	5994	0.385	954	745	768	728	152	051	2809	288	20	106
68.4	0.054	089	076	439	345	272	590	169	475	6036	0.386	682	897	819	730	961	339	2829	394	20	364
68.5	0.053	743	803	849	345	103	115	175	511	6082	0.387	413	859	158	733	790	733	2849	758	20	634
68.6	0.053	398	700	734	344	927	604	181	593	6124	0.388	147	649	891	736	640	491	2870	392	20	906
68.7	0.053	053	773	130	344	746	011	187	717	6170	0.388	884	290	382	739	510	883	2891	298	21	184
68.8	0.052	709	027	119	344	558	294	193	887	6212	0.389	623	801	265	742	402	181	2912	482	21	466
68.9	0.052	364	468	825	344	364	407	200	099	6259	0.390	366	203	446	745	314	663	2933	948	21	750
69.0	0.052	020	104	418	344	164	308	206	358	6303	0.391	111	518	709	748	248	611	2955	698	22	046
69.1	0.051	675	940	110	343	957	950	212	661	6351	0.391	859	766	720	751	204	309	2977	744	22	341
69.2	0.051	331	982	160	343	745	289	219	012	6395	0.392	610	971	029	754	182	053	3000	085	22	646
69.3	0.050	988	236	871	343	526	277	225	407	6441	0.393	365	153	082	757	182	138	3022	731	22	955
69.4	0.050	644	710	594	343	300	870	231	848	6488	0.394	122	335	220	760	204	869	3045	686	23	266
69.5	0.050	301	409	724	343	069	022	238	336	6537	0.394	882	540	089	763	250	555	3068	952	23	589
69.6	0.049	958	340	702	342	830	686	244	873	6583	0.395	645	790	644	766	319	507	3092	541	23	918
69.7	0.049	615	510	016	342	585	813	251	456	6631	0.396	412	110	151	769	412	048	3116	459	24	249
69.8	0.049	272	924	203	342	334	357	258	087	6679	0.397	181	522	199	772	528	507	3140	708	24	589
69.9	0.048	930	589	846	342	076	270	264	766	6730	0.397	954	050	706	775	669	215	3165	297	24	933
70.0	0.048	588	513	576	341	811	504	271	496	6778	0.398	729	719	921	778	834	512	3190	230	25	284

109

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
70° 0	0.048 588 513 576	341 811 504	271 496	6 778	49
70.1	0.048 246 702 072	341 540 008	278 274	6 827	49
70.2	0.047 905 162 064	341 261 734	285 101	6 876	52
70.3	0.047 563 900 330	340 976 633	291 977	6 928	51
70.4	0.047 222 923 697	340 684 656	298 905	6 979	50
70.5	0.046 882 239 041	340 385 751	305 884	7 029	52
70.6	0.046 541 853 290	340 079 867	312 913	7 081	54
70.7	0.046 201 773 423	339 766 954	319 994	7 135	50
70.8	0.045 862 006 469	339 446 960	327 129	7 185	55
70.9	0.045 522 559 509	339 119 831	334 314	7 240	53
71.0	0.045 183 439 678	338 785 517	341 554	7 293	54
71.1	0.044 844 654 161	338 443 963	348 847	7 347	54
71.2	0.044 506 210 198	338 095 116	356 194	7 401	54
71.3	0.044 168 115 082	337 738 922	363 595	7 455	57
71.4	0.043 830 376 160	337 375 327	371 050	7 512	57
71.5	0.043 493 000 833	337 004 277	378 562	7 569	53
71.6	0.043 155 996 556	336 625 715	386 131	7 622	60
71.7	0.042 819 370 841	336 239 584	393 753	7 682	55
71.8	0.042 483 131 257	335 845 831	401 435	7 737	59
71.9	0.042 147 285 426	335 444 396	409 172	7 796	59
72.0	0.041 811 841 030	335 035 224	416 968	7 855	58
72.1	0.041 476 805 806	334 618 256	424 823	7 913	61
72.2	0.041 142 187 550	334 193 433	432 736	7 974	58
72.3	0.040 807 994 117	333 760 697	440 710	8 032	61
72.4	0.040 474 233 420	333 319 987	448 742	8 093	53
72.5	0.040 140 913 433	332 871 245	456 835	8 156	61
72.6	0.039 808 042 188	332 414 410	464 991	8 217	60
72.7	0.039 475 627 778	331 949 419	473 208	8 277	65
72.8	0.039 143 678 359	331 476 211	481 485	8 342	64
72.9	0.038 812 202 148	330 994 726	489 827	8 406	64
73.0	0.038 481 207 422	330 504 899	498 233	8 470	63
73.1	0.038 150 702 523	330 006 666	506 703	8 533	67
73.2	0.037 820 695 857	329 499 963	515 236	8 600	64
73.3	0.037 491 195 894	328 984 727	523 836	8 664	67
73.4	0.037 162 211 167	328 460 891	532 500	8 731	69
73.5	0.036 833 750 276	327 928 391	541 231	8 800	68
73.6	0.036 505 821 885	327 387 160	550 031	8 868	67
73.7	0.036 178 434 725	326 837 129	558 899	8 935	68
73.8	0.035 851 597 596	326 278 230	567 834	9 003	72
73.9	0.035 525 319 366	325 710 396	576 837	9 075	72
74.0	0.035 199 608 970	325 133 559	585 912	9 147	70
74.1	0.034 874 475 411	324 547 647	595 059	9 217	70
74.2	0.034 549 927 764	323 952 588	604 276	9 287	73
74.3	0.034 225 975 176	323 348 312	613 563	9 360	77
74.4	0.033 902 626 864	322 734 749	622 923	9 437	73
74.5	0.033 579 892 115	322 111 826	632 360	9 510	74
74.6	0.033 257 780 289	321 479 466	641 870	9 584	76
74.7	0.032 936 300 823	320 837 596	651 454	9 660	75
74.8	0.032 615 463 227	320 186 142	661 114	9 735	82
74.9	0.032 295 277 085	319 525 028	670 849	9 817	74
75.0	0.031 975 752 057	318 854 179	680 666	9 891	82

θ.	Log F'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
70°0	0.398 729 719 921	778 834 512	3 190 230	25 284	362
70.1	0.399 508 554 433	782 024 742	3 215 514	25 646	367
70.2	0.400 290 579 175	785 240 256	3 241 160	26 013	372
70.3	0.401 075 819 431	788 481 416	3 267 173	26 385	377
70.4	0.401 864 300 847	791 748 589	3 293 558	26 762	392
70.5	0.402 656 049 436	795 042 147	3 320 320	27 154	396
70.6	0.403 451 091 583	798 362 467	3 347 474	27 550	404
70.7	0.404 249 454 050	801 709 941	3 375 024	27 954	412
70.8	0.405 051 163 991	805 084 965	3 402 978	28 366	416
70.9	0.405 856 248 956	808 487 943	3 431 344	28 782	430
71.0	0.406 664 736 899	811 919 287	3 460 126	29 212	442
71.1	0.407 476 656 186	815 379 413	3 489 338	29 654	444
71.2	0.408 292 035 599	818 868 751	3 518 992	30 098	453
71.3	0.409 110 904 350	822 387 743	3 549 090	30 551	471
71.4	0.409 933 292 093	825 936 833	3 579 641	31 022	472
71.5	0.410 759 228 926	829 516 474	3 610 663	31 494	484
71.6	0.411 588 745 400	833 127 137	3 642 157	31 978	494
71.7	0.412 421 872 537	836 769 294	3 674 135	32 472	505
71.8	0.413 258 641 831	840 443 429	3 706 607	32 977	517
71.9	0.414 099 085 260	844 150 036	3 739 584	33 494	531
72.0	0.414 943 235 296	847 889 620	3 773 078	34 025	536
72.1	0.415 791 124 916	851 662 698	3 807 103	34 561	551
72.2	0.416 642 787 614	855 469 801	3 841 664	35 111	561
72.3	0.417 498 257 415	859 311 465	3 876 775	35 672	581
72.4	0.418 357 568 880	863 188 240	3 912 447	36 253	585
72.5	0.419 220 757 120	867 100 687	3 948 700	36 838	597
72.6	0.420 087 857 807	871 049 387	3 985 538	37 435	614
72.7	0.420 958 907 194	875 034 925	4 022 973	38 049	630
72.8	0.421 833 942 119	879 057 898	4 061 022	38 679	644
72.9	0.422 713 000 017	883 118 920	4 099 701	39 323	654
73.0	0.423 596 118 937	887 218 621	4 139 024	39 977	671
73.1	0.424 483 337 558	891 357 645	4 179 001	40 648	689
73.2	0.425 374 695 203	895 536 646	4 219 649	41 337	702
73.3	0.426 270 231 849	899 756 295	4 260 986	42 039	720
73.4	0.427 169 988 144	904 017 281	4 303 025	42 759	738
73.5	0.428 074 005 425	908 320 306	4 345 784	43 497	751
73.6	0.428 982 325 731	912 666 090	4 389 281	44 248	773
73.7	0.429 894 991 821	917 055 371	4 433 529	45 021	786
73.8	0.430 812 047 192	921 488 900	4 478 550	45 807	813
73.9	0.431 733 536 092	925 967 450	4 524 357	46 620	833
74.0	0.432 659 503 542	930 491 807	4 570 977	47 453	842
74.1	0.433 589 995 349	935 062 784	4 618 430	48 295	868
74.2	0.434 525 058 133	939 681 214	4 666 725	49 163	894
74.3	0.435 464 739 547	944 347 939	4 715 888	50 057	919
74.4	0.436 409 087 286	949 063 827	4 765 945	50 976	931
74.5	0.437 358 151 113	953 829 772	4 816 921	51 907	959
74.6	0.438 311 980 885	958 646 693	4 868 828	52 866	983
74.7	0.439 270 627 578	963 515 521	4 921 694	53 849	1 010
74.8	0 440 234 143 099	968 437 215	4 975 543	54 859	1 037
74.9	0.441 202 580 314	973 412 758	5 030 402	55 896	1 062
75.0	0.442 175 993 072	978 443 160	5 086 298	56 958	1 084

θ.	Log. E¹.	Diff. I.	II.	III.	IV.
75°0	0.031 975 752 056.78	318 854 179	680 666	9 891	82
75.1	0.031 656 897 878.27	318 173 513	690 557	9 973	78
75.2	0.031 338 724 364.79	317 482 956	700 530	10 051	83
75.3	0.031 021 241 408.98	316 782 426	710 581	10 134	80
75.4	0.030 704 458 983.05	316 071 845	720 715	10 214	84
75.5	0.030 388 387 138.55	315 351 130	730 929	10 298	81
75.6	0.030 073 036 008.50	314 620 201	741 227	10 379	88
75.7	0.029 758 415 807.37	313 878 974	751 606	10 467	83
75.8	0.029 444 536 832.54	313 127 368	762 073	10 550	89
75.9	0.029 131 409 464.85	312 365 295	772 623	10 639	84
76.0	0.028 819 044 169.78	311 592 672	783 262	10 723	92
76.1	0.028 507 451 498.27	310 809 410	793 985	10 815	88
76.2	0.028 196 642 087.82	310 015 425	804 800	10 903	89
76.3	0.027 886 626 663.35	309 210 625	815 703	10 992	95
76.4	0.027 577 416 038.35	308 394 922	826 695	11 087	90
76.5	0.027 269 021 115.79	307 568 227	837 782	11 177	96
76.6	0.026 961 452 889.14	306 730 445	848 959	11 273	93
76.7	0.026 654 722 444.08	305 881 486	860 232	11 366	97
76.8	0.026 348 840 958.11	305 021 254	871 598	11 463	99
76.9	0.026 043 819 703.87	304 149 656	883 061	11 562	96
77.0	0.025 739 670 047.81	303 266 595	894 623	11 658	102
77.1	0.025 436 403 453.31	302 371 972	906 281	11 760	100
77.2	0.025 134 031 481.05	301 465 691	918 041	11 860	102
77.3	0.024 832 565 790.31	300 547 650	929 901	11 962	106
77.4	0.024 532 018 140.38	299 617 749	941 863	12 068	103
77.5	0.024 232 400 391.38	298 675 886	953 931	12 171	107
77.6	0.023 933 724 505.45	297 721 955	966 102	12 278	109
77.7	0.023 636 002 550.26	296 755 853	978 380	12 387	107
77.8	0.023 339 246 697.07	295 777 473	990 767	12 494	115
77.9	0.023 043 469 224.18	294 786 706	1 003 261	12 609	108
78.0	0.022 748 682 517.70	293 783 445	1 015 870	12 717	117
78.1	0.022 454 899 073.33	292 767 575	1 028 587	12 834	114
78.2	0.022 162 131 497.60	291 738 988	1 041 421	12 948	118
78.3	0.021 870 392 509.65	290 697 567	1 054 369	13 066	120
78.4	0.021 579 694 942.50	289 643 198	1 067 435	13 186	119
78.5	0.021 290 051 744.75	288 575 753	1 080 621	13 305	122
78.6	0.021 001 475 982.41	287 495 142	1 093 926	13 427	126
78.7	0.020 713 980 840.09	286 401 216	1 107 353	13 553	126
78.8	0.020 427 579 623.70	285 293 863	1 120 906	13 679	126
78.9	0.020 142 285 760.95	284 172 957	1 134 585	13 805	132
79.0	0.019 858 112 804.32	283 038 372	1 148 390	13 937	131
79.1	0.019 575 074 431.54	281 889 982	1 162 327	14 068	135
79.2	0.019 293 184 449.58	280 727 655	1 176 395	14 203	135
79.3	0.019 012 456 794.62	279 551 260	1 190 598	14 338	140
79.4	0.018 732 905 534.98	278 360 662	1 204 936	14 478	139
79.5	0.018 454 544 873.05	277 155 726	1 219 414	14 617	143
79.6	0.018 177 389 147.44	275 936 312	1 234 031	14 760	147
79.7	0.017 901 452 835.17	274 702 281	1 248 791	14 907	145
79.8	0.017 623 750 553.87	273 453 490	1 263 698	15 052	153
79.9	0.017 353 297 064.05	272 189 792	1 278 750	15 205	153
80.0	0.017 081 107 271.63	270 911 042	1 293 955	15 358	153

0.	Log. F ¹ .	Diff. I.	II.	III.	IV.
75.0	0.442 175 993 072.45	978 443 160	5 086 298	56 958	1 086
75.1	0.443 154 436 232.65	983 529 458	5 143 256	58 044	1 122
75.2	0.444 137 965 691.21	988 672 714	5 201 300	59 166	1 145
75.3	0.445 126 638 404.69	993 874 014	5 260 466	60 311	1 179
75.4	0.446 120 512 419.32	999 134 480	5 320 777	61 490	1 209
75.5	0.447 119 646 899.26	1 004 455 257	5 382 267	62 699	1 243
75.6	0.448 124 102 156.17	1 009 837 524	5 444 966	63 942	1 276
75.7	0.449 133 939 679.94	1 015 282 490	5 508 908	65 218	1 310
75.8	0.450 140 222 169.97	1 020 791 398	5 574 126	66 528	1 348
75.9	0.451 170 013 567.98	1 026 365 524	5 640 654	67 876	1 384
76.0	0.452 196 379 091.74	1 032 006 178	5 708 530	69 260	1 424
76.1	0.453 228 385 269.83	1 037 714 708	5 777 790	70 684	1 462
76.2	0.454 266 099 977.90	1 043 492 498	5 848 474	72 146	1 506
76.3	0.455 309 592 476.22	1 049 340 972	5 920 620	73 652	1 546
76.4	0.456 358 933 448.08	1 055 261 592	5 994 272	75 198	1 596
76.5	0.457 414 195 040.13	1 061 255 864	6 069 470	76 794	1 634
76.6	0.458 475 450 903.74	1 067 325 334	6 146 264	78 428	1 691
76.7	0.459 542 776 238.29	1 073 471 598	6 224 692	80 119	1 734
76.8	0.460 616 247 835.51	1 079 696 290	6 304 811	81 853	1 788
76.9	0.461 695 944 125.99	1 086 001 101	6 386 664	83 641	1 844
77.0	0.462 781 945 226.85	1 092 387 765	6 470 305	85 485	1 894
77.1	0.463 874 332 991.74	1 098 858 070	6 555 790	87 379	1 957
77.2	0.464 973 191 062.35	1 105 413 860	6 643 169	89 336	2 014
77.3	0.466 078 604 921.92	1 112 057 029	6 732 505	91 350	2 078
77.4	0.467 190 661 950.90	1 118 789 534	6 823 855	93 428	2 142
77.5	0.468 309 451 484.80	1 125 613 389	6 917 283	95 570	2 209
77.6	0.469 435 064 874.01	1 132 530 672	7 012 853	97 779	2 280
77.7	0.470 567 595 546.24	1 139 543 525	7 110 632	100 059	2 352
77.8	0.471 707 139 071.25	1 146 654 157	7 210 691	102 411	2 429
77.9	0.472 853 793 228.33	1 153 864 848	7 313 102	104 840	2 505
78.0	0.474 007 658 076.26	1 161 177 950	7 417 942	107 345	2 593
78.1	0.475 168 836 026.21	1 168 595 892	7 525 287	109 938	2 673
78.2	0.476 337 431 917.67	1 176 121 179	7 635 225	112 611	2 765
78.3	0.477 513 553 097.26	1 183 756 404	7 747 836	115 376	2 857
78.4	0.478 697 309 501.24	1 191 504 240	7 863 212	118 233	2 956
78.5	0.479 888 813 741.19	1 199 367 452	7 981 445	121 189	3 056
78.6	0.481 088 181 192.91	1 207 348 897	8 102 634	124 245	3 160
78.7	0.482 295 530 090.28	1 215 451 531	8 226 879	127 405	3 274
78.8	0.483 510 981 621.47	1 223 678 410	8 354 284	130 679	3 387
78.9	0.484 734 660 030.94	1 232 032 694	8 484 963	134 066	3 508
79.0	0.485 966 692 724.94	1 240 517 657	8 619 029	137 574	3 633
79.1	0.487 207 210 381.62	1 249 136 686	8 756 603	141 207	3 768
79.2	0.488 456 347 067.79	1 257 893 289	8 897 810	144 975	3 900
79.3	0.489 714 240 356.58	1 266 791 099	9 042 786	148 875	4 051
79.4	0.490 981 031 456.26	1 275 833 885	9 191 661	152 926	4 198
79.5	0.492 256 865 340.61	1 285 025 546	9 344 587	157 124	4 358
79.6	0.493 541 890 886.92	1 294 370 133	9 501 711	161 482	4 520
79.7	0.494 836 261 020.22	1 303 871 844	9 663 193	166 002	4 701
79.8	0.496 140 132 864.48	1 313 535 037	9 829 195	170 703	4 876
79.9	0.497 453 667 900.84	1 323 364 232	9 999 898	175 579	5 073
80.0	0.498 777 032 133.31	1 333 364 130	10 175 477	180 652	5 269

θ.	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
80°0	0.017 081 107 271.63	270 911 042	1 293 955	15 358	153
80.1	0.016 810 196 230.04	269 617 087	1 309 313	15 511	160
80.2	0.016 540 579 143.42	268 307 775	1 324 824	15 671	159
80.3	0.016 272 271 358.49	266 982 951	1 340 495	15 830	168
80.4	0.016 005 288 417.33	265 642 456	1 356 325	15 998	163
80.5	0.015 739 645 960.70	264 286 131	1 372 323	16 161	173
80.6	0.015 475 359 830.22	262 913 808	1 388 484	16 334	171
80.7	0.015 212 446 021.67	261 525 324	1 404 818	16 505	180
80.8	0.014 950 920 697.80	260 120 506	1 421 323	16 685	178
80.9	0.014 690 800 191.58	258 699 183	1 438 008	16 863	182
81.0	0.014 432 101 009.44	257 261 175	1 454 871	17 045	191
81.1	0.014 174 839 834.36	255 806 304	1 471 916	17 236	189
81.2	0.013 919 033 529.63	254 334 388	1 489 152	17 425	195
81.3	0.013 664 699 142.11	252 845 236	1 506 577	17 620	200
81.4	0.013 411 853 906.49	251 338 659	1 524 197	17 820	202
81.5	0.013 160 515 246.78	249 814 462	1 542 017	18 022	210
81.6	0.012 910 700 784.83	248 272 445	1 560 039	18 232	210
81.7	0.012 662 428 339.69	246 712 406	1 578 271	18 442	218
81.8	0.012 415 715 934.32	245 134 135	1 596 713	18 660	221
81.9	0.012 170 581 799.27	243 537 422	1 615 373	18 881	228
82.0	0.011 927 044 377.36	241 922 049	1 634 254	19 109	231
82.1	0.011 685 122 328.24	240 287 795	1 653 363	19 340	237
82.2	0.011 444 834 533.42	238 634 432	1 672 703	19 577	246
82.3	0.011 206 200 101.23	236 961 729	1 692 280	19 823	245
82.4	0.010 969 238 371.92	235 269 449	1 712 103	20 068	259
82.5	0.010 733 968 923.41	233 557 346	1 732 171	20 327	259
82.6	0.010 500 411 576.80	231 825 175	1 752 498	20 586	270
82.7	0.010 268 586 402.22	230 072 677	1 773 084	20 856	275
82.8	0.010 038 513 725.00	228 299 593	1 793 940	21 131	280
82.9	0.009 810 214 132.22	226 505 653	1 815 071	21 411	295
83.0	0.009 583 708 479.23	224 690 582	1 836 482	21 706	293
83.1	0.009 359 017 896.54	222 854 100	1 858 188	21 999	309
83.2	0.009 136 163 797.30	220 995 912	1 880 187	22 308	315
83.3	0.008 915 167 884.65	219 115 725	1 902 495	22 623	323
83.4	0.008 696 052 159.72	217 213 230	1 925 118	22 946	334
83.5	0.008 478 838 930.08	215 288 112	1 948 064	23 280	343
83.6	0.008 263 550 818.09	213 340 048	1 971 344	23 623	355
83.7	0.008 050 210 770.16	211 368 704	1 994 967	23 978	364
83.8	0.007 838 842 066.17	209 373 737	2 018 945	24 342	376
83.9	0.007 629 468 329 53	207 354 792	2 043 287	24 718	390
84.0	0.007 422 113 537.40	205 311 505	2 068 005	25 108	400
84.1	0.007 216 802 032.29	203 243 500	2 093 113	25 508	415
84.2	0.007 013 558 532.49	201 150 387	2 118 621	25 923	429
84.3	0.006 812 408 145.18	199 031 766	2 144 544	26 352	445
84.4	0.006 613 376 378.88	196 887 222	2 170 896	26 797	459
84.5	0.006 416 489 156.87	194 716 326	2 197 693	27 256	475
84.6	0.006 221 772 831.25	192 518 633	2 224 949	27 731	498
84.7	0.006 029 254 198.30	190 293 684	2 252 680	28 229	509
84.8	0.005 838 960 513.83	188 041 004	2 280 909	28 738	536
84.9	0.005 650 919 510.43	185 760 095	2 309 647	29 274	553
85.0	0.005 465 159 414.92	183 450 448	2 338 921	29 827	576

θ.	Log. F ¹ .	Diff. I.	II.	III.	IV.
80.0	0.498 777 032 133.31	1 333 364 130	10 175 477	180 652	5 269
80.1	0.500 110 396 262.94	1 343 539 607	10 356 129	185 921	5 487
80.2	0.501 453 935 869.83	1 353 895 736	10 542 050	191 408	5 703
80.3	0.502 807 831 606.17	1 364 437 786	10 733 458	197 111	5 938
80.4	0.504 172 269 391.86	1 375 171 244	10 930 569	203 049	6 186
80.5	0.505 547 440 636.00	1 386 101 813	11 133 618	209 235	6 443
80.6	0.506 933 542 448.78	1 397 235 431	11 342 853	215 678	6 714
80.7	0.508 330 777 880.10	1 408 578 284	11 558 531	222 392	7 004
80.8	0.509 739 356 164.30	1 420 136 815	11 780 923	229 396	7 306
80.9	0.511 159 492 978.79	1 431 917 738	12 010 319	236 702	7 626
81.0	0.512 591 410 716.56	1 443 928 057	12 247 021	244 328	7 960
81.1	0.514 035 338 773.59	1 456 175 078	12 491 349	252 288	8 323
81.2	0.515 491 513 851.50	1 468 666 427	12 743 637	260 611	8 695
81.3	0.516 960 180 277.50	1 481 410 064	13 004 248	269 306	9 096
81.4	0.518 441 590 341.65	1 494 414 312	13 273 554	278 402	9 517
81.5	0.519 936 004 653.61	1 507 687 866	13 551 956	287 919	9 965
81.6	0.521 443 692 519.75	1 521 239 822	13 839 875	297 884	10 440
81.7	0.522 964 932 341.63	1 535 079 697	14 137 759	308 324	10 941
81.8	0.524 500 012 038.64	1 549 217 456	14 446 083	319 265	11 475
81.9	0.526 049 229 495.04	1 563 663 539	14 765 348	330 740	12 046
82.0	0.527 612 893 033.96	1 578 428 887	15 096 088	342 786	12 644
82.1	0.529 191 321 920.70	1 593 524 975	15 438 874	355 430	13 289
82.2	0.530 784 846 896.40	1 608 963 849	15 794 304	368 719	13 970
82.3	0.532 393 810 745.33	1 624 758 153	16 163 023	382 689	14 702
82.4	0.534 018 568 898.22	1 640 921 176	16 545 712	397 391	15 476
82.5	0.535 659 490 073.64	1 657 466 888	16 943 103	412 867	16 306
82.6	0.537 316 956 961.91	1 674 409 991	17 355 970	429 173	17 194
82.7	0.538 991 366 953.05	1 691 765 961	17 785 143	446 367	18 139
82.8	0.540 683 132 914.02	1 709 551 104	18 231 510	464 506	19 158
82.9	0.542 392 684 018.13	1 727 782 614	18 696 016	483 664	20 245
83.0	0.544 120 466 631.80	1 746 478 630	19 179 680	503 909	21 409
83.1	0.545 866 945 262.03	1 765 658 310	19 683 589	525 318	22 665
83.2	0.547 632 603 572.34	1 785 341 899	20 208 907	547 983	24 011
83.3	0.549 417 945 471.37	1 805 550 806	20 756 890	571 994	25 466
83.4	0.551 223 496 276.87	1 826 307 696	21 328 884	597 460	27 017
83.5	0.553 049 803 972.58	1 847 636 580	21 926 344	624 477	28 715
83.6	0.554 897 440 553.47	1 869 562 924	22 550 821	653 192	30 525
83.7	0.556 767 003 477.33	1 892 113 745	23 204 013	683 717	32 501
83.8	0.558 659 117 221.78	1 915 317 758	23 887 730	716 218	34 625
83.9	0.560 574 434 979.55	1 939 205 488	24 603 948	750 843	36 936
84.0	0.562 513 640 468.45	1 963 809 436	25 354 791	787 779	39 453
84.1	0.564 477 449 904.33	1 989 164 227	26 142 570	827 232	42 168
84.2	0.566 466 614 130.75	2 015 306 797	26 969 802	869 400	45 145
84.3	0.568 481 920 927.65	2 042 276 599	27 839 202	914 545	48 373
84.4	0.570 524 197 527.00	2 070 115 801	28 753 747	962 918	51 929
84.5	0.572 594 313 327.99	2 098 869 548	29 716 665	1 014 847	55 775
84.6	0.574 693 182 875.56	2 128 586 213	30 731 512	1 070 622	60 050
84.7	0.576 821 769 089.25	2 159 317 725	31 802 134	1 130 652	64 678
84.8	0.578 981 086 813.51	2 191 119 859	32 932 786	1 195 333	69 797
84.9	0.581 172 206 672.75	2 224 052 645	34 128 119	1 265 130	75 444
85.0	0.583 396 259 318.33	2 258 180 764	35 393 249	1 340 574	81 666

θ .	Log. E'.	Diff. I.	II.	III.	IV.
85.0	0.005 465 159 414.92	183 450 448	2 338 921	29 827	576
85.1	0.005 281 708 967.11	181 111 527	2 368 748	30 403	602
85.2	0.005 100 597 439.91	178 742 779	2 399 151	31 005	628
85.3	0.004 921 854 660.81	176 343 628	2 430 156	31 633	650
85.4	0.004 745 511 032.70	173 913 472	2 461 789	32 283	687
85.5	0.004 571 597 561.43	171 451 683	2 494 072	32 970	712
85.6	0.004 400 145 877.98	168 957 611	2 527 042	33 682	750
85.7	0.004 231 188 267.47	166 430 569	2 560 724	34 432	782
85.8	0.004 064 757 698.28	163 869 845	2 595 156	35 214	827
85.9	0.003 900 887 853.32	161 274 689	2 630 370	36 041	862
86.0	0.003 739 613 163.78	158 644 319	2 666 411	36 903	914
86.1	0.003 580 968 845.28	155 977 908	2 703 314	37 817	959
86.2	0.003 424 990 936.97	153 274 594	2 741 131	38 776	1 012
86.3	0.003 271 716 343.47	150 533 463	2 779 907	39 788	1 075
86.4	0.003 121 182 880.46	147 753 556	2 819 695	40 863	1 133
86.5	0.002 973 429 323.82	144 933 861	2 860 558	41 996	1 205
86.6	0.002 828 495 463.13	142 073 303	2 902 554	43 201	1 281
86.7	0.002 686 422 159.80	139 170 749	2 945 755	44 482	1 364
86.8	0.002 547 251 410.76	136 224 994	2 990 237	45 846	1 456
86.9	0.002 411 026 416.56	133 234 757	3 036 083	47 302	1 558
87.0	0.002 277 791 659.68	130 198 674	3 083 385	48 860	1 671
87.1	0.002 147 592 985.62	127 115 289	3 132 245	50 531	1 797
87.2	0.002 020 477 696.43	123 983 044	3 182 776	52 328	1 938
87.3	0.001 896 494 652.10	120 800 268	3 235 104	54 266	2 097
87.4	0.001 775 694 383.73	117 565 164	3 289 370	56 363	2 275
87.5	0.001 658 129 219.50	114 275 794	3 345 733	58 638	2 477
87.6	0.001 543 853 425.72	110 930 061	3 404 371	61 115	2 710
87.7	0.001 432 923 364.99	107 525 690	3 465 486	63 825	2 974
87.8	0.001 325 397 674.99	104 060 204	3 529 311	66 799	3 279
87.9	0.001 221 337 471.22	100 530 893	3 596 110	70 078	3 641
88.0	0.001 120 806 578.23	96 934 783	3 666 188	73 719	4 051
88.1	0.001 023 871 794.77	93 268 595	3 739 907	77 770	4 553
88.2	0.000 930 603 200.30	89 528 688	3 817 677	82 323	5 138
88.3	0.000 841 074 511.80	85 711 011	3 900 000	87 461	5 858
88.4	0.000 755 363 500.95	81 811 011	3 987 461	93 319	6 727
88.5	0.000 673 552 489.53	77 823 550	4 080 780	100 046	7 816
88.6	0.000 595 728 940.02	73 742 770	4 180 826	107 862	9 186
88.7	0.000 521 986 169.93	69 561 944	4 288 688	117 048	10 956
88.8	0.000 452 424 225.98	65 273 256	4 405 736	128 004	13 285
88.9	0.000 387 150 969.90	60 867 520	4 533 740	141 289	16 454
89.0	0.000 326 283 450.30	56 333 780	4 675 029	157 743	20 910
89.1	0.000 269 949 669.93	51 658 751	4 832 772	178 653	27 462
89.2	0.000 218 290 918.50	46 825 979	5 011 425	206 115	37 702
89.3	0.000 171 464 939.28	41 814 554	5 217 540	243 817	55 040
89.4	0.000 129 650 384.72	36 597 014	5 461 357	298 857	88 250
89.5	0.000 093 053 371.21	31 135 657	5 760 214	387 107	166 636
89.6	0.000 061 917 714.25	25 375 443	6 147 321	553 743	485 160
89.7	0.000 036 542 270.57	19 228 122	6 701 064	1 038 903	
89.8	0.000 017 314 148.93	12 527 058	7 739 967		
89.9	0.000 004 787 090.76	4 787 091			
90.0	0.000 000 000 000.00				

0.	Log. F.	Diff. I.	II.	III.	IV.
85.0	0.583 396 259 318.23	2 258 180 764	35 393 249	1 340 574	81 666
85.1	0.585 634 440 081.87	2 293 574 013	36 733 823	1 422 240	88 568
85.2	0.587 948 014 094.62	2 330 307 836	38 156 063	1 510 808	96 201
85.3	0.590 278 321 930.83	2 368 463 899	39 666 871	1 607 009	104 701
85.4	0.592 646 785 830.41	2 408 130 770	41 273 880	1 711 710	114 159
85.5	0.595 054 916 599.81	2 449 404 650	42 985 590	1 825 869	124 729
85.6	0.597 504 321 249.91	2 492 390 240	44 811 459	1 950 598	136 553
85.7	0.599 996 711 489.80	2 537 201 699	46 762 057	2 087 151	149 843
85.8	0.602 533 913 189.34	2 583 963 756	48 849 208	2 236 994	164 791
85.9	0.605 117 876 944.55	2 632 812 964	51 086 202	2 401 785	181 677
86.0	0.607 750 689 909.07	2 683 899 166	53 487 987	2 583 462	200 807
86.1	0.610 434 589 075.25	2 737 387 153	56 071 449	2 784 269	222 546
86.2	0.613 171 976 227.83	2 793 458 602	58 855 718	3 006 815	247 338
86.3	0.615 965 434 829.71	2 852 314 320	61 862 533	3 254 153	275 723
86.4	0.618 817 749 149.84	2 914 176 853	65 116 686	3 529 876	308 365
86.5	0.621 731 926 002.75	2 979 293 539	68 646 562	3 838 241	345 845
86.6	0.624 711 219 542.37	3 047 940 101	72 484 803	4 184 086	389 781
86.7	0.627 759 159 643.37	3 120 424 904	76 668 889	4 573 867	440 241
86.8	0.630 879 584 546.62	3 197 093 793	81 242 756	5 014 108	499 840
86.9	0.634 076 678 340.46	3 278 336 549	86 256 864	5 513 948	569 711
87.0	0.637 355 014 889.22	3 364 593 413	91 770 812	6 083 659	652 415
87.1	0.640 719 608 301.93	3 456 364 225	97 854 471	6 736 074	750 851
87.2	0.644 175 972 527.05	3 554 218 696	104 590 545	7 486 925	868 774
87.3	0.647 730 191 223.11	3 658 809 241	112 077 470	8 355 699	1 011 048
87.4	0.651 389 000 464.21	3 770 886 711	120 433 169	9 366 747	1 183 991
87.5	0.655 159 887 174.84	3 891 319 880	129 799 916	10 550 738	1 395 981
87.6	0.659 051 207 055.09	4 021 119 796	140 350 654	11 946 719	1 658 136
87.7	0.663 072 326 850.57	4 161 470 450	152 297 373	13 604 855	1 985 559
87.8	0.667 233 797 301.26	4 313 767 823	165 902 228	15 590 414	2 398 879
87.9	0.671 547 565 123.66	4 479 670 051	181 492 642	17 989 293	2 926 862
88.0	0.676 027 235 174.92	4 661 162 693	199 481 935	20 916 155	3 610 219
88.1	0.680 688 397 868.16	4 860 644 628	220 398 090	24 526 374	4 507 666
88.2	0.685 549 042 495.79	5 081 042 718	244 924 464	29 034 040	5 705 744
88.3	0.690 630 085 213.94	5 325 967 182	273 958 504	34 739 784	7 334 955
88.4	0.695 956 052 395.61	5 599 925 686	308 698 288	42 074 739	9 597 554
88.5	0.701 555 978 081.90	5 908 623 974	350 773 027	51 672 293	12 816 450
88.6	0.707 464 602 056.00	6 259 397 001	402 445 320	64 488 743	17 526 167
88.7	0.713 723 999 056.99	6 661 842 321	466 934 063	82 014 910	24 647 731
88.8	0.720 385 841 378.02	7 128 776 384	548 948 973	106 662 641	35 848 123
88.9	0.727 514 617 762.00	7 677 725 357	655 611 614	142 510 764	54 325 287
89.0	0.735 192 343 119.46	8 333 336 971	798 122 378	196 836 051	86 673 151
89.1	0.743 525 680 090.22	9 131 459 349	994 958 429	285 509 202	145 776 655
89.2	0.752 657 139 439.03	10 126 417 778	1 278 467 631	429 285 857	277 514 949
89.3	0.762 783 557 217.10	11 404 885 409	1 709 753 488	706 800 806	583 579 753
89.4	0.774 188 442 626.41	13 114 638 897	2 416 554 294	1 290 380 551	1 510 248 283
89.5	0.787 303 081 523.20	15 531 193 191	3 705 934 853	2 800 628 842	5 706 908 065
89.6	0.802 834 274 714.46	19 238 128 044	6 507 563 695	8 507 536 907	
89.7	0.822 072 402 757.80	25 745 691 739	15 015 100 602		
89.8	0.847 818 094 497.21	40 760 792 341			
89.9	0.888 578 886 838.43				
90.0	Infini.				

$$c = \sin 45^\circ$$

TABLE II.

Valeurs des Fonctions E, calculées à douze décimales, pour toutes les amplitudes ϕ , de demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 90° , l'angle du module étant de 45° .

ϕ	E	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
$0^\circ 0$	0.00000 00000 00	872 65908 79	3322 70	3322 07	126	65
0.5	0.00872 65908 79	872 62586 09	6644 77	3320 81	191	61
1.0	0.01745 28494 88	872 55941 32	9965 58	3318 90	252	65
1.5	0.02617 84436 20	872 45975 74	13284 48	3316 38	317	62
2.0	0.03490 30411 94	872 32691 26	16600 86	3313 21	379	66
2.5	0.04362 63103 20	872 16090 40	19914 07	3309 42	445	59
3.0	0.05234 79193 60	871 96176 33	23223 49	3304 97	504	70
3.5	0.06106 75369 93	871 72952 84	26528 46	3299 93	574	55
4.0	0.06978 48322 77	871 46424 38	29828 39	3294 19	629	69
4.5	0.07849 94747 15	871 16595 99	33122 58	3287 90	698	66
5.0	0.08721 11343 14	870 83473 41	36410 48	3280 92	764	56
5.5	0.09591 94816 55	870 47062 93	39691 40	3273 28	820	72
6.0	0.10462 41879 48	870 07371 53	42964 68	3265 08	892	57
6.5	0.11332 49251 01	869 64406 85	46229 76	3256 16	949	68
7.0	0.12202 13657 86	869 18177 09	49485 92	3246 67	1017	64
7.5	0.13071 31834 95	868 68691 17	52732 59	3236 50	1081	61
8.0	0.13940 00526 12	868 15958 58	55969 09	3225 69	1142	65
8.5	0.14808 16484 70	867 59989 49	59194 78	3214 27	1207	68
9.0	0.15675 76474 19	867 00794 71	62409 05	3202 20	1275	69
9.5	0.16542 77268 90	866 38385 66	65611 25	3189 45	1344	57
10.0	0.17409 15654 56	865 72774 41	68800 70	3176 09	1401	63
10.5	0.18274 88428 97	865 03973 71	71976 79	3162 08	1464	70
11.0	0.19139 92402 68	864 31996 92	75138 87	3147 44	1534	57
11.5	0.20004 24399 60	863 56858 05	78286 31	3132 10	1591	74
12.0	0.20867 81257 65	862 78571 74	81418 41	3116 19	1665	55
12.5	0.21730 59829 39	861 97153 33	84534 60	3099 54	1720	75
13.0	0.22592 56982 72	861 12618 73	87634 14	3082 34	1795	59
13.5	0.23453 69601 45	860 24984 59	90716 48	3064 39	1854	69
14.0	0.24313 94586 04	859 34268 11	93780 87	3045 85	1923	61
14.5	0.25173 28854 15	858 40487 24	96826 72	3026 62	1984	71
15.0	0.26031 69341 39	857 43660 52	99853 34	3006 78	2055	64
15.5	0.26889 13001 91	856 43807 18	1 02860 12	2986 23	2119	68
16.0	0.27745 56809 09	855 40947 06	1 05846 35	2965 04	2187	61
16.5	0.28600 97756 15	854 35100 71	1 08811 39	2943 17	2248	74
17.0	0.29455 32856 86	853 26289 32	1 11754 56	2920 69	2322	58
17.5	0.30308 59146 18	852 14534 76	1 14675 25	2897 47	2380	75
18.0	0.31160 73680 94	850 99859 51	1 17572 72	2873 67	2455	61
18.5	0.32011 73540 45	849 82286 79	1 20446 39	2849 12	2516	72
19.0	0.32861 55827 24	848 61840 40	1 23295 51	2823 96	2588	65
19.5	0.33710 17667 64	847 38544 89	1 26119 47	2798 08	2653	68
20.0	0.34557 56212 53	846 12425 42	1 28917 55	2771 55	2721	65
20.5	0.35403 68637 95	844 83507 87	1 31689 10	2744 34	2786	72
21.0	0.36248 52145 82	843 51818 77	1 34433 44	2716 48	2858	68

TABLE II.

Valeurs des Fonctions F, calculées à douze décimales, pour toutes les amplitudes φ , de demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 90° , l'angle du module étant de 45° .

φ	F	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
0°	0.00000 00000 00	872 67016 41	3322 89	3323 02	25	
0.5	0.00872 67016 41	872 70339 30	6645 91	3323 27	38	
1.0	0.01745 37355 71	872 76985 21	9969 18	3323 65	51	
1.5	0.02618 14340 92	872 86954 39	13292 83	3324 16	61	
2.0	0.03491 01295 31	873 00247 22	16616 99	3324 77	74	
2.5	0.04364 01542 53	873 16864 21	19941 76	3325 51	90	
3.0	0.05237 18406 74	873 36805 97	23267 27	3326 41	95	
3.5	0.06110 55212 71	873 60073 24	26593 68	3327 36	111	
4.0	0.06984 15285 95	873 86666 92	29921 04	3328 47	119	
4.5	0.07858 01952 87	874 16587 96	33249 51	3329 66	135	
5.0	0.08732 18540 83	874 49837 47	36579 17	3331 01	139	
5.5	0.09606 68378 30	874 86416 64	39910 18	3332 40	152	
6.0	0.10481 54794 94	875 26326 82	43242 58	3333 92	162	
6.5	0.11356 81121 76	875 69569 40	46576 50	3335 54	170	
7.0	0.12232 50691 16	876 16145 90	49912 04	3337 24	179	
7.5	0.13108 66837 06	876 66057 94	53249 28	3339 03	185	
8.0	0.13985 32895 00	877 19307 22	56588 31	3340 88	194	
8.5	0.14862 52202 22	877 75895 53	59929 19	3342 82	202	
9.0	0.15740 28097 75	878 35824 72	63272 01	3344 84	203	
9.5	0.16618 63922 47	878 99096 73	66616 85	3346 87	215	
10.0	0.17497 63019 20	879 65713 58	69963 72	3349 02	212	
10.5	0.18377 28732 78	880 35677 30	73312 74	3351 14	220	
11.0	0.19257 64410 08	881 08990 04	76663 88	3353 34	221	
11.5	0.20138 73400 12	881 85653 92	80017 22	3355 55	226	
12.0	0.21020 59054 04	882 65671 14	83372 77	3357 81	221	
12.5	0.21903 24725 18	883 49043 91	86730 58	3360 02	224	
13.0	0.22786 73769 09	884 35774 49	90090 60	3362 26	221	
13.5	0.23671 09543 58	885 25865 09	93452 86	3364 47	223	
14.0	0.24556 35408 67	886 19317 95	96817 33	3366 70	212	
14.5	0.25442 54726 62	887 16135 28	1 00184 03	3368 82	213	
15.0	0.26329 70861 90	888 16319 31	1 03552 85	3370 95	205	
15.5	0.27217 87181 21	889 19872 16	1 06923 80	3373 00	195	
16.0	0.28107 07053 37	890 26795 96	1 10296 80	3374 95	187	
16.5	0.28997 33849 33	891 37092 76	1 13671 75	3376 82	182	
17.0	0.29888 70942 09	892 50764 51	1 17048 57	3378 64	158	
17.5	0.30781 21706 60	893 67813 08	1 20427 21	3380 22	157	
18.0	0.31674 89519 68	894 88240 29	1 23807 43	3381 79	133	
18.5	0.32569 77759 97	896 12047 72	1 27189 22	3383 12	122	
19.0	0.33465 89807 69	897 39236 94	1 30572 34	3384 34	97	
19.5	0.34363 29044 63	898 69809 28	1 33956 68	3385 31	82	
20.0	0.35261 98853 91	900 03765 96	1 37341 99	3386 13	52	
20.5	0.36162 02619 87	901 41107 95	1 40728 12	3386 65	35	
21.0	0.37063 43727 82	902 81836 07	1 44114 77	3387 00	5	

φ.	E.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
21.0	0.36248 52145 82	843 51818 77	1 34433 44	2716 48	2858	68
21.5	0.37092 03964 59	842 17385 31	1 37149 92	2687 90	2926	66
22.0	0.37934 21349 90	840 80235 39	1 39837 82	2658 64	2992	69
22.5	0.38775 01585 29	839 40397 57	1 42496 46	2628 72	3061	72
23.0	0.39614 41982 86	837 97901 11	1 45125 18	2598 11	3133	65
23.5	0.40452 39883 97	836 52775 93	1 47723 29	2566 78	3198	64
24.0	0.41288 92659 90	835 05052 64	1 50290 07	2534 80	3262	79
24.5	0.42123 97712 54	833 54762 57	1 52824 87	2502 12	3341	64
25.0	0.42957 52475 11	832 01937 70	1 55326 99	2468 71	3405	74
25.5	0.43789 54412 81	830 46610 71	1 57795 70	2434 66	3479	69
26.0	0.44620 01023 52	828 88815 01	1 60230 36	2399 87	3548	69
26.5	0.45448 89838 53	827 28584 65	1 62630 23	2364 39	3617	73
27.0	0.46276 18423 18	825 65954 42	1 64994 62	2328 22	3690	67
27.5	0.47101 84377 60	824 00959 80	1 67322 84	2291 32	3757	75
28.0	0.47925 85337 40	822 35636 96	1 69614 16	2253 75	3832	68
28.5	0.48748 18974 36	820 64022 80	1 71867 91	2215 43	3900	72
29.0	0.49568 82997 16	818 92154 89	1 74083 34	2176 43	3972	72
29.5	0.50387 75152 05	817 18071 55	1 76259 77	2136 71	4044	71
30.0	0.51204 93223 60	815 41811 78	1 78396 48	2096 27	4115	72
30.5	0.52020 35035 38	813 63415 30	1 80492 75	2055 12	4187	72
31.0	0.52833 98450 68	811 82922 55	1 82547 87	2013 25	4259	71
31.5	0.53645 81373 23	810 00374 68	1 84561 12	1970 66	4330	75
32.0	0.54455 81747 91	808 15813 56	1 86531 78	1927 36	4405	70
32.5	0.55263 97561 47	806 29281 78	1 88459 14	1883 31	4475	74
33.0	0.56070 26843 25	804 40822 64	1 90342 45	1838 56	4549	69
33.5	0.56874 67665 89	802 50480 19	1 92181 01	1793 07	4618	78
34.0	0.57677 18146 08	800 58299 18	1 93974 08	1746 89	4696	67
34.5	0.58477 76445 26	798 64325 10	1 95720 97	1699 93	4763	79
35.0	0.59276 40770 36	796 68604 13	1 97420 90	1652 30	4842	70
35.5	0.60073 09374 49	794 71183 23	1 99073 20	1603 88	4912	70
36.0	0.60867 80557 72	792 72110 03	2 00677 08	1554 76	4982	79
36.5	0.61660 52667 75	790 71432 95	2 02231 84	1504 94	5061	69
37.0	0.62451 24100 70	788 69201 11	2 03736 78	1454 33	5130	73
37.5	0.63239 93301 81	786 65464 33	2 05191 11	1403 03	5203	76
38.0	0.64026 58766 14	784 60273 22	2 06594 14	1351 00	5279	70
38.5	0.64811 19039 36	782 53679 08	2 07945 14	1298 21	5349	74
39.0	0.65593 72718 44	780 45733 94	2 09243 35	1244 72	5423	70
39.5	0.66374 18452 38	778 36490 59	2 10488 07	1190 49	5493	78
40.0	0.67152 54942 97	776 26002 52	2 11678 56	1135 56	5571	66
40.5	0.67928 80945 49	774 14323 96	2 12814 12	1079 85	5637	79
41.0	0.68702 95269 45	772 01509 84	2 13893 97	1023 48	5716	65
41.5	0.69474 96779 29	769 87615 87	2 14917 45	966 32	5781	78
42.0	0.70244 84395 16	767 72698 42	2 15883 77	908 51	5859	65
42.5	0.71012 57093 58	765 56814 65	2 16792 28	849 92	5924	75
43.0	0.71778 13908 23	763 40022 37	2 17642 20	790 68	5999	70
43.5	0.72541 53930 60	761 22380 17	2 18432 88	730 69	6069	69
44.0	0.73302 76310 77	759 03947 29	2 19163 57	670 00	6138	71
44.5	0.74061 80258 06	756 84783 72	2 19833 57	608 62	6209	66
45.0	0.74818 65041 78	754 64950 15	2 20442 19	546 53	6275	73

φ.	F.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
21°0	0.37063 43727 82	902 81836 07	1 44114 77	3387 00	+ 5	31
21.5	0.37966 25563 89	904 25950 84	1 47501 77	3387 05	-26	29
22.0	0.38870 51514 73	905 73452 61	1 50888 82	3386 79	55	35
22.5	0.39776 24967 34	907 24341 43	1 54275 61	3386 24	90	35
23.0	0.40683 49308 77	908 78617 04	1 57661 85	3385 34	125	40
23.5	0.41592 27925 81	910 36278 89	1 61047 19	3384 09	165	37
24.0	0.42502 64204 70	911 97326 08	1 64431 28	3382 44	202	52
24.5	0.43414 61530 78	913 61757 36	1 67813 72	3380 42	254	40
25.0	0.44328 23288 14	915 29571 08	1 71194 14	3377 88	294	54
25.5	0.45243 52859 22	917 00765 22	1 74572 02	3374 94	348	50
26.0	0.46160 53624 44	918 75337 24	1 77946 96	3371 46	398	55
26.5	0.47079 28961 68	920 53284 20	1 81318 42	3367 48	453	61
27.0	0.47999 82245 88	922 34602 62	1 84685 90	3362 95	514	63
27.5	0.48922 16848 50	924 19288 52	1 88048 85	3357 81	577	63
28.0	0.49846 36137 02	926 07337 37	1 91406 66	3352 04	640	71
28.5	0.50772 43474 39	927 98744 03	1 94758 70	3345 64	711	73
29.0	0.51700 42218 42	929 93502 73	1 98104 34	3338 53	784	74
29.5	0.52630 35721 15	931 91607 07	2 01442 87	3330 69	858	84
30.0	0.53562 27328 22	933 93049 94	2 04773 56	3322 11	942	82
30.5	0.54496 20378 16	935 97823 50	2 08095 67	3312 69	1024	89
31.0	0.55432 18201 66	938 05919 17	2 11408 36	3302 45	1113	91
31.5	0.56370 24120 83	940 17327 53	2 14710 81	3291 32	1204	100
32.0	0.57310 41448 36	942 32038 34	2 18002 13	3279 28	1304	98
32.5	0.58252 73486 70	944 50040 47	2 21281 41	3266 24	1402	108
33.0	0.59197 23527 17	946 71321 89	2 24547 65	3252 22	1510	109
33.5	0.60143 94849 06	948 95869 54	2 27799 87	3237 12	1619	117
34.0	0.61092 90718 60	951 23669 41	2 31036 99	3220 93	1736	118
34.5	0.62044 14388 01	953 54706 40	2 34257 92	3203 57	1854	126
35.0	0.62997 69094 41	955 88964 32	2 37461 49	3185 03	1980	130
35.5	0.63953 58058 73	958 26425 81	2 40646 52	3165 23	2110	137
36.0	0.64911 84484 54	960 67072 33	2 43811 75	3144 13	2247	138
36.5	0.65872 51556 87	963 10884 08	2 46955 88	3121 66	2385	148
37.0	0.66835 62440 95	965 57839 96	2 50077 54	3097 81	2533	152
37.5	0.67801 20280 91	968 07917 50	2 53175 35	3072 48	2685	158
38.0	0.68769 28198 41	970 61092 85	2 56247 83	3045 63	2843	174
38.5	0.69739 89291 26	973 17340 68	2 59293 46	3017 20	3017	159
39.0	0.70713 06631 94	975 76634 14	2 62310 66	2987 17	3176	173
39.5	0.71688 83266 08	978 38944 80	2 65297 83	2955 41	3349	182
40.0	0.72667 22210 88	981 04242 63	2 68253 24	2921 92	3531	188
40.5	0.73648 26453 51	983 72495 87	2 71175 16	2886 61	3719	193
41.0	0.74631 98949 38	986 43671 03	2 74061 77	2849 42	3912	200
41.5	0.75618 42620 41	989 17732 80	2 76911 19	2810 30	4112	205
42.0	0.76607 60353 21	991 94643 99	2 79721 49	2769 18	4317	219
42.5	0.77599 54997 20	994 74365 48	2 82490 67	2726 01	4536	211
43.0	0.78594 29362 68	997 56856 15	2 85216 68	2680 65	4747	230
43.5	0.79591 86218 83	1000 42072 83	2 87897 33	2633 18	4977	234
44.0	0.80592 28291 66	1003 29970 16	2 90530 51	2583 41	5211	238
44.5	0.81595 58261 82	1006 20500 67	2 93113 92	2531 30	5449	245
45.0	0.82601 78762 49	1009 13614 59	2 95645 22	2476 81	5694	255

φ.	E.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
45° 0	0.74818 65041 78	754 64950 15	2 20442 19	546 53	6275	73
45.5	0.75573 29991 93	752 44507 96	2 20988 72	483 78	6348	63
46.0	0.76325 74499 89	750 25519 24	2 21472 50	420 30	6411	70
46.5	0.77075 98019 13	748 02046 74	2 21892 80	356 19	6481	65
47.0	0.77824 00065 87	745 80153 94	2 22248 99	291 58	6546	67
47.5	0.78569 80219 81	743 57904 95	2 22540 37	225 92	6613	60
48.0	0.79313 38124 76	741 35364 58	2 22766 29	159 79	6673	70
48.5	0.80054 73489 34	739 12598 29	2 22926 08	93 06	6743	57
49.0	0.80793 86087 63	736 89672 21	2 23019 14	+ 25 63	6800	61
49.5	0.81530 75759 84	734 66653 07	2 23044 77	- 42 37	6861	66
50.0	0.82265 42412 91	732 43608 30	2 23002 40	110 98	6927	53
50.5	0.82997 86021 21	730 20605 90	2 22891 42	180 25	6980	57
51.0	0.83728 06627 11	727 97714 48	2 22711 17	250 05	7037	62
51.5	0.84456 04341 59	725 75003 31	2 22461 12	320 42	7099	46
52.0	0.85181 79344 90	723 52542 19	2 22140 70	391 41	7145	60
52.5	0.85905 31887 09	721 30401 49	2 21749 29	462 86	7205	47
53.0	0.86626 62288 58	719 08652 20	2 21286 43	534 91	7252	48
53.5	0.87345 70940 78	716 87365 77	2 20751 52	607 43	7300	51
54.0	0.88062 58306 55	714 66614 25	2 20144 09	680 43	7351	42
54.5	0.88777 24920 80	712 46470 16	2 19463 66	753 94	7393	44
55.0	0.89489 71390 96	710 27006 50	2 18709 72	827 87	7437	37
55.5	0.90199 98397 46	708 08296 78	2 17881 85	902 24	7474	45
56.0	0.90908 06694 24	705 90414 93	2 16979 61	976 98	7519	32
56.5	0.91613 97109 17	703 73435 32	2 16002 63	1052 17	7551	30
57.0	0.92317 70544 49	701 57432 69	2 14950 46	1127 68	7581	34
57.5	0.93019 27977 18	699 42482 23	2 13822 78	1203 49	7615	27
58.0	0.93718 70459 41	697 28559 45	2 12619 29	1279 64	7642	22
58.5	0.94415 99118 86	695 16040 16	2 11339 65	1356 06	7664	24
59.0	0.95111 15159 02	693 04700 51	2 09983 59	1432 70	7688	17
59.5	0.95804 19859 53	690 94716 92	2 08550 89	1509 58	7705	12
60.0	0.96495 14576 45	688 86166 03	2 07041 31	1586 63	7717	13
60.5	0.97184 00742 48	686 79124 72	2 05454 68	1663 80	7730	8
61.0	0.97870 79867 20	684 73670 04	2 03790 88	1741 10	7738	1
61.5	0.98555 53537 24	682 69879 16	2 02049 78	1818 48	7739	+ 3
62.0	0.99238 23416 40	680 67829 38	2 00231 30	1895 87	7742	- 9
62.5	0.99918 91245 78	678 67508 08	1 98335 43	1973 29	7733	7
63.0	1.00597 58843 86	676 69262 65	1 96362 14	2050 62	7726	10
63.5	1.01274 28106 51	674 72900 51	1 94311 52	2127 88	7716	23
64.0	1.01949 01007 02	672 78588 99	1 92183 64	2205 04	7693	20
64.5	1.02621 79596 01	670 86405 35	1 89978 60	2281 97	7673	27
65.0	1.03292 66001 36	668 96426 75	1 87696 63	2358 70	7646	31
65.5	1.03961 62428 11	667 08730 12	1 85337 93	2435 16	7615	40
66.0	1.04628 71158 23	665 23392 19	1 82902 77	2511 31	7575	40
66.5	1.05293 94550 42	663 40489 42	1 80391 46	2587 06	7535	46
67.0	1.05957 35039 84	661 60097 96	1 77804 40	2662 41	7489	55
67.5	1.06618 95137 80	659 82293 56	1 75141 99	2737 30	7434	57
68.0	1.07278 77431 36	658 07151 57	1 72404 69	2811 64	7377	65
68.5	1.07936 84582 93	656 34746 88	1 69593 05	2885 41	7312	69
69.0	1.08593 19329 81	654 65153 83	1 66707 64	2958 53	7243	75

φ.	F.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
45° 0	0.82601 78762 49	1009 13614 59	2 95645 22	2476 81	56 94	255
45.5	0.83610 92377 08	1012 09259 81	2 98122 03	2419 87	59 49	257
46.0	0.84623 01636 89	1015 07381 84	3 00541 90	2360 38	62 06	264
46.5	0.85638 09018 73	1018 07923 74	3 02902 28	2298 32	64 70	276
47.0	0.86656 16942 47	1021 10826 02	3 05200 60	2233 62	67 46	278
47.5	0.87677 27768 49	1024 16026 62	3 07434 22	2166 16	70 24	282
48.0	0.88701 43795 11	1027 23460 84	3 09600 38	2095 92	73 06	296
48.5	0.89728 67255 95	1030 33061 22	3 11696 30	2022 86	76 02	294
49.0	0.90759 00317 17	1033 44757 52	3 13719 16	1946 84	78 96	308
49.5	0.91792 45074 69	1036 58476 68	3 15666 00	1867 88	82 04	303
50.0	0.92829 03551 37	1039 74142 68	3 17533 88	1785 84	85 07	322
50.5	0.93868 77694 05	1042 91676 56	3 19319 72	1700 77	88 29	316
51.0	0.94911 69370 61	1046 10996 28	3 21020 49	1612 48	91 45	329
51.5	0.95957 80366 89	1049 32016 77	3 22632 97	1521 03	94 74	331
52.0	0.97007 12383 66	1052 54649 74	3 24154 00	1426 29	98 05	331
52.5	0.98059 67033 40	1055 78803 74	3 25580 29	1328 24	101 36	349
53.0	0.99115 45837 14	1059 04384 03	3 26908 53	1226 88	104 85	335
53.5	1.00174 50221 17	1062 31292 56	3 28135 41	1122 03	108 20	355
54.0	1.01236 81513 73	1065 59427 97	3 29257 44	1013 83	111 75	343
54.5	1.02302 40941 70	1068 88685 41	3 30271 27	902 08	115 18	362
55.0	1.03371 29627 11	1072 18956 68	3 31173 35	786 90	118 80	349
55.5	1.04443 48583 79	1075 50130 03	3 31960 25	668 10	122 29	365
56.0	1.05518 98713 82	1078 82090 28	3 32628 35	545 81	125 94	351
56.5	1.06597 80804 10	1082 14718 63	3 33174 16	419 87	129 45	364
57.0	1.07679 95522 73	1085 47892 79	3 33594 03	290 42	133 09	359
57.5	1.08765 43415 52	1088 81486 82	3 33884 45	157 33	136 68	358
58.0	1.09854 24902 34	1092 15371 27	3 34041 78	+ 20 65	140 26	357
58.5	1.10946 40273 61	1095 49415 05	3 34062 43	- 119 61	143 83	355
59.0	1.12041 89686 66	1098 83475 48	3 33942 82	263 44	147 38	354
59.5	1.13140 73162 14	1102 17418 30	3 33679 38	410 82	150 92	346
60.0	1.14242 90580 44	1105 51097 68	3 33268 56	561 74	154 38	345
60.5	1.15348 41678 12	1108 84366 24	3 32706 82	716 12	157 83	339
61.0	1.16457 26044 36	1112 17073 06	3 31990 70	873 95	161 22	329
61.5	1.17569 43117 42	1115 49063 76	3 31116 75	1035 17	164 51	327
62.0	1.18681 92181 18	1118 80180 51	3 30081 58	1199 68	167 78	315
62.5	1.19803 72361 69	1122 10262 09	3 28881 90	1367 46	170 93	307
63.0	1.20925 82623 78	1125 39143 99	3 27514 44	1538 39	174 00	295
63.5	1.22051 21767 77	1128 66658 43	3 25976 05	1712 39	176 95	284
64.0	1.23179 88426 20	1131 92634 48	3 24263 66	1889 34	179 79	273
64.5	1.24311 81060 68	1135 16898 14	3 22374 32	2069 13	182 52	259
65.0	1.25446 97958 82	1138 39272 46	3 20305 19	2251 65	185 11	240
65.5	1.26585 37231 28	1141 59577 65	3 18053 54	2436 76	187 51	229
66.0	1.27726 96808 93	1144 77631 19	3 15616 78	2624 27	189 80	209
66.5	1.28871 74440 12	1147 93247 97	3 12992 51	2814 07	191 89	192
67.0	1.30019 67588 09	1151 06240 48	3 10178 44	3005 96	193 81	169
67.5	1.31170 73928 57	1154 16418 92	3 07172 48	3199 77	195 50	155
68.0	1.32324 90347 49	1157 23591 40	3 03972 71	3395 27	197 05	124
68.5	1.33482 13938 89	1160 27554 11	3 00577 44	3592 32	198 29	110
69.0	1.34642 41503 00	1163 28141 55	2 96985 12	3790 61	199 39	80

φ.	E.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
69° 0	1.08593 19329 81	654 65153 83	1 66707 64	2958 53	72 43	75
69.5	1.09247 84483 64	652 98446 19	1 63749 11	3030 96	71 68	80
70.0	1.09900 82929 83	651 34697 08	1 60718 15	3102 64	70 88	87
70.5	1.10552 17626 91	649 73978 93	1 57615 51	3173 52	70 01	97
71.0	1.11201 91605 84	648 16363 42	1 54441 99	3243 53	69 04	91
71.5	1.11850 07969 26	646 61921 43	1 51198 46	3312 57	68 13	111
72.0	1.12496 69890 69	645 10722 97	1 47885 89	3380 70	67 02	110
72.5	1.13141 80613 66	643 62837 08	1 44505 19	3447 72	65 92	118
73.0	1.13785 83450 74	642 18331 89	1 41057 47	3513 64	64 74	121
73.5	1.14427 61782 63	640 77274 42	1 37543 83	3578 38	63 53	130
74.0	1.15068 39057 06	639 39730 59	1 33965 45	3641 91	62 23	136
74.5	1.15707 78787 65	638 05765 14	1 30323 54	3704 14	60 87	146
75.0	1.16345 84552 79	636 75441 60	1 26619 40	3765 01	59 41	140
75.5	1.16982 59994 39	635 48822 20	1 22854 39	3824 42	58 01	158
76.0	1.17618 08816 59	634 25967 81	1 19029 97	3882 43	56 43	164
76.5	1.18252 34784 40	633 06937 84	1 15147 54	3938 86	54 79	158
77.0	1.18885 41722 24	631 91790 30	1 11208 68	3993 65	53 21	177
77.5	1.19517 33512 54	630 80581 62	1 07215 03	4046 86	51 44	178
78.0	1.20148 14094 16	629 73366 59	1 03168 17	4098 30	49 66	178
78.5	1.20777 87460 75	628 70198 42	99069 87	4147 96	47 88	192
79.0	1.21406 57659 17	627 71128 55	94921 91	4195 84	45 96	193
79.5	1.22034 28787 72	626 76206 64	90726 07	4241 80	44 03	201
80.0	1.22661 04994 36	625 85480 57	86484 27	4285 83	42 02	200
80.5	1.23286 90474 93	624 98996 30	82198 44	4327 85	40 02	211
81.0	1.23911 89471 23	624 16797 86	77870 59	4367 87	37 91	215
81.5	1.24536 05269 09	623 38927 27	73502 72	4405 78	35 76	214
82.0	1.25159 45196 36	622 65424 55	69096 94	4441 54	33 62	222
82.5	1.25782 10620 91	621 96327 61	64655 40	4475 16	31 40	231
83.0	1.26404 06948 52	621 31672 21	60180 24	4506 56	29 09	222
83.5	1.27025 38620 73	620 71491 97	55673 68	4535 65	26 87	240
84.0	1.27646 10112 70	620 15818 29	51138 03	4562 52	24 47	231
84.5	1.28266 25930 99	619 64680 26	46575 51	4586 99	22 16	238
85.0	1.28885 90611 25	619 18104 75	41988 52	4609 15	19 78	248
85.5	1.29505 08716 00	618 76116 23	37379 37	4628 93	17 30	235
86.0	1.30123 84832 23	618 38736 86	32750 44	4646 23	14 95	251
86.5	1.30742 23569 09	618 05986 42	28104 21	4661 18	12 44	247
87.0	1.31360 29555 51	617 77882 21	23443 03	4673 62	9 97	245
87.5	1.31978 07437 72	617 54439 18	18769 41	4683 59	7 52	254
88.0	1.32595 61876 90	617 35669 77	14085 82	4691 11	4 98	
88.5	1.33212 97546 67	617 21583 95	9394 71	4696 09		
89.0	1.33830 19130 62	617 12189 24	4698 62			
89.5	1.34447 31319 86	617 07490 62				
90.0	1.35064 38810 48					

φ.	F.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
69° 0	1.34642 41503 00	1163 28141 55	2 96985 12	3790 61	199 39	80
69.5	1.35805 69644 55	1166 25126 67	2 93194 51	3990 00	200 19	53
70.0	1.36971 94771 22	1169 18321 18	2 89204 51	4190 19	200 72	+ 35
70.5	1.38141 13092 40	1172 07525 69	2 85014 32	4390 91	201 07	- 2
71.0	1.39313 20618 09	1174 92540 01	2 80623 41	4591 98	201 05	21
71.5	1.40488 13158 10	1177 73163 42	2 76031 43	4793 03	200 84	61
72.0	1.41665 86321 52	1180 49194 85	2 71238 40	4993 87	200 23	81
72.5	1.42846 35516 37	1183 20433 25	2 66244 53	5194 10	199 42	120
73.0	1.44029 55949 62	1185 86677 78	2 61050 43	5393 52	198 22	146
73.5	1.45215 42627 40	1188 47728 21	2 55656 91	5591 74	196 76	181
74.0	1.46403 90355 61	1191 03385 12	2 50065 17	5788 50	194 95	218
74.5	1.47594 93740 73	1193 53450 29	2 44276 67	5983 45	192 77	244
75.0	1.48788 47191 02	1195 97726 96	2 38293 22	6176 22	190 33	278
75.5	1.49984 44917 98	1198 36020 18	2 32117 00	6366 55	187 55	322
76.0	1.51182 80938 16	1200 68137 18	2 25750 45	6554 10	184 33	348
76.5	1.52383 49075 34	1202 93887 63	2 19196 35	6738 43	180 85	384
77.0	1.53586 42962 97	1205 13083 98	2 12457 92	6919 28	177 01	415
77.5	1.54791 56046 95	1207 25541 90	2 05538 64	7096 29	172 81	453
78.0	1.55998 81588 85	1209 31080 54	1 98442 35	7269 10	168 29	492
78.5	1.57208 12669 39	1211 29522 89	1 91173 25	7437 39	163 37	515
79.0	1.58419 42192 28	1213 20696 14	1 83735 86	7600 76	158 22	560
79.5	1.59632 62888 42	1215 04432 00	1 76135 10	7758 98	152 62	586
80.0	1.60847 67320 42	1216 80567 10	1 68376 12	7911 60	146 76	615
80.5	1.62064 47887 52	1218 48943 22	1 60464 52	8058 36	140 61	664
81.0	1.63282 96830 74	1220 09407 74	1 52406 16	8198 97	134 05	673
81.5	1.64503 06238 48	1221 61813 90	1 44207 19	8333 02	127 32	715
82.0	1.65724 68052 38	1223 06021 09	1 35874 17	8460 34	120 17	733
82.5	1.66947 74073 47	1224 41895 26	1 27413 83	8580 51	112 84	757
83.0	1.68172 15968 73	1225 69309 09	1 18833 32	8693 35	105 27	793
83.5	1.69397 85277 82	1226 88142 41	1 10139 97	8798 62	97 34	807
84.0	1.70624 73420 23	1227 98282 38	1 01341 35	8895 96	89 27	830
84.5	1.71852 71702 61	1228 99623 73	92445 39	8985 23	80 97	845
85.0	1.73081 71326 34	1229 92069 12	83460 16	9066 20	72 52	874
85.5	1.74311 63395 46	1230 75529 28	74393 96	9138 72	63 78	881
86.0	1.75542 38924 74	1231 49923 24	65255 24	9202 50	54 97	892
86.5	1.76773 88847 98	1232 15178 48	56052 74	9257 47	46 05	907
87.0	1.78006 04026 46	1232 71231 22	46795 27	9303 52	36 98	922
87.5	1.79238 72557 68	1233 18026 49	37491 75	9340 50	27 76	918
88.0	1.80471 93284 17	1233 55518 24	28151 25	9368 26	18 58	
88.5	1.81705 48802 41	1233 83669 49	18782 99	9386 84		
89.0	1.82939 32471 90	1234 02452 48	9396 15			
89.5	1.84173 34924 38	1234 11848 63				
90.0	1.85407 46773 01					

TABLE III,

Contenant les Sinus naturels à quinze décimales, et leurs Logarithmes à quatorze décimales, pour tous les arcs de quinze en quinze minutes, depuis 0° jusqu'à 90°.

Arc.	Sinus.	Pr. Log-Sinus.	Arc.	Sinus.	Log-Sinus.
0° 00'	0.00000 00000 00000	Infini-négatif.	90° 00'	1.00000 00000 00000	0.00000 00000 00000
0.15	0.00436 33092 84747	7.63981 59982 0304	89.45	0.99999 04807 20734	9.99999 58658 0985
0.30	0.00872 65354 98374	7.94084 18596 7687	89.30	0.99996 19230 64171	9.99998 34630 8204
0.45	0.01308 95955 71345	8.11692 62283 8061	89.15	0.99991 43275 74007	9.99996 27913 4424
1.00	0.01745 24064 37284	8.24185 53184 2289	89.00	0.99984 76951 56391	9.99993 38498 0922
1.15	0.02181 48850 34561	8.33875 29285 7723	88.45	0.99976 20270 79909	9.99989 66373 7472
1.30	0.02617 69483 07873	8.41791 90153 8883	88.30	0.99965 73249 75557	9.99985 11526 2321
1.45	0.03053 85132 09823	8.48484 78892 8599	88.15	0.99953 35908 36713	9.99979 73938 2171
2.00	0.03489 94967 02501	8.54281 91638 9609	88.00	0.99939 08270 19096	9.99973 53589 2158
2.15	0.03925 98157 59069	8.59394 82571 8436	87.45	0.99922 90362 40723	9.99966 50455 5811
2.30	0.04361 93873 65336	8.63967 95616 1593	87.30	0.99904 82215 81858	9.99958 64510 5027
2.45	0.04797 81285 21344	8.68104 33034 7541	87.15	0.99884 83864 84951	9.99949 95724 0020
3.00	0.05233 59562 42944	8.71880 01636 7602	87.00	0.99862 95347 54574	9.99940 44062 9272
3.15	0.05669 27875 63378	8.75352 78116 1488	86.45	0.99839 16705 57349	9.99930 09490 9508
3.30	0.06104 85395 34857	8.78567 52787 7168	86.30	0.99813 47984 21867	9.99918 91968 5603
3.45	0.06540 31292 30143	8.81559 85277 5659	86.15	0.99785 89232 38604	9.99906 91453 0554
4.00	0.06975 64737 44125	8.84358 45184 8165	86.00	0.99756 40502 59824	9.99894 07898 5391
4.15	0.07410 84901 95399	8.86986 79655 2043	85.45	0.99725 01850 99486	9.99880 41255 9123
4.30	0.07845 90957 27845	8.89464 32984 0645	85.30	0.99691 73337 33128	9.99865 91472 8658
4.45	0.08280 82075 12204	8.91807 33838 9369	85.15	0.99656 55024 97761	9.99850 58493 8714
5.00	0.08715 57427 47658	8.94029 60083 3018	85.00	0.99619 46980 91740	9.99834 42260 1750
5.15	0.09150 16186 63402	8.96142 87768 0277	84.45	0.99580 49275 74662	9.99817 42709 7863
5.30	0.09584 57525 20224	8.98157 28715 3959	84.30	0.99539 61983 67179	9.99799 59777 4684
5.45	0.10018 80616 12076	9.00081 59741 7702	84.15	0.99496 85182 50912	9.99780 93394 7315
6.00	0.10452 84632 67654	9.01923 45656 3272	84.00	0.99452 18953 68273	9.99761 43489 8185
6.15	0.10886 68748 51965	9.03689 57561 7987	83.45	0.99405 63382 22320	9.99741 09987 6925
6.30	0.11320 32137 67907	9.05385 87563 7394	83.30	0.99357 18556 76588	9.99719 92810 0333
6.45	0.11753 73974 57838	9.07017 60702 2885	83.15	0.99306 84569 54926	9.99697 91875 2158
7.00	0.12186 93434 05148	9.08589 44712 9169	83.00	0.99254 61516 41322	9.99675 07098 3027
7.15	0.12619 89691 35830	9.10105 58073 6095	82.45	0.99200 49496 79715	9.99651 38391 0298
7.30	0.13052 61922 20052	9.11569 76687 2611	82.30	0.99144 48613 73810	9.99626 85661 7928
7.45	0.13485 09302 73723	9.12985 39467 9450	82.15	0.99086 58973 86882	9.99601 48815 6322
8.00	0.13917 31009 60065	9.14355 53039 9954	82.00	0.99026 80687 41570	9.99575 27754 2188
8.15	0.14349 26219 91179	9.15682 95713 7739	81.45	0.98965 13868 19670	9.99548 22375 8389
8.30	0.14780 94111 29611	9.16970 20867 7564	81.30	0.98901 58633 61917	9.99520 32575 3781
8.45	0.15212 33861 89917	9.18219 59840 2341	81.15	0.98836 15104 67761	9.99491 58244 3042
9.00	0.15643 44650 40231	9.19433 24413 5701	81.00	0.98768 83405 95138	9.99461 99270 6508
9.15	0.16074 25656 03826	9.20613 08957 9906	80.45	0.98699 63665 60232	9.99431 55538 9988
9.30	0.16504 76058 60678	9.21760 92289 4481	80.30	0.98628 56015 37231	9.99400 26930 4597
9.45	0.16934 95038 49025	9.22878 39286 1014	80.15	0.98555 60590 58078	9.99368 13322 6553
10.00	0.17364 81776 66930	9.23967 02300 1167	80.00	0.98480 77530 12208	9.99335 14589 6992

Arc.	Sinus.	Log-Sinus.	Arc.	Sinus.	Log-Sinus.
10° 00'	0.17364 81776 66930	9.23967 02300 1167	80° 00'	0.98480 77530 12208	9.99335 14589 6992
10.15	0.17794 35454 73842	9.25028 22395 1085	79.45	0.98404 06976 46291	9.99301 30602 1761
10.30	0.18223 55254 92147	9.26063 30434 4538	79.30	0.98325 49075 63955	9.99266 61227 1221
10.45	0.18652 40360 08734	9.27073 48041 5205	79.15	0.98245 03977 25510	9.99231 06328 0202
11.00	0.19080 89953 76545	9.28059 88449 5041	79.00	0.98162 71834 47664	9.99194 65764 6900
11.15	0.19509 03220 16128	9.29023 57255 7476	78.45	0.98078 52804 03230	9.99157 39393 4436
11.30	0.19936 79344 17197	9.29965 53093 1415	78.30	0.97992 47046 20830	9.99119 27066 8845
11.45	0.20364 17511 40178	9.30886 68229 3232	78.15	0.97904 54724 84584	9.99080 28633 9713
12.00	0.20791 16908 17759	9.31787 89102 7855	78.00	0.97814 76007 33806	9.99040 43939 9773
12.15	0.21217 76721 56446	9.32669 96803 6916	77.45	0.97723 11064 62679	9.98999 72826 4651
12.30	0.21643 96139 38103	9.33533 67506 1310	77.30	0.97629 60071 19933	9.98958 15131 2607
12.45	0.22069 74350 21501	9.34379 72857 5582	77.15	0.97534 23205 08513	9.98915 70688 4262
13.00	0.22495 10543 43865	9.35208 80330 4125	77.00	0.97437 00647 85235	9.98872 39328 2340
13.15	0.22920 03909 22414	9.36021 53540 2532	76.45	0.97337 92584 60448	9.98828 20877 1379
13.30	0.23344 53638 55906	9.36818 52534 1441	76.30	0.97236 99203 97677	9.98783 15157 7460
13.45	0.23768 58923 26173	9.37600 34052 5927	76.15	0.97134 20698 13261	9.98737 21988 7897
14.00	0.24192 18955 99668	9.38367 51767 8594	76.00	0.97029 57262 75997	9.98690 41185 0959
14.15	0.24615 32930 28993	9.39120 56501 2196	75.45	0.96923 09097 06754	9.98643 72557 5545
14.30	0.25038 00040 54442	9.39859 96421 2791	75.30	0.96814 76403 78108	9.98594 15913 0865
14.45	0.25460 19482 05528	9.40586 17225 3708	75.15	0.96704 59389 13943	9.98544 71054 6142
15.00	0.25881 90451 02521	9.41299 62305 6934	75.00	0.96592 58262 89068	9.98494 37781 0270
15.15	0.26303 12144 57975	9.42000 72901 7208	74.45	0.96478 73238 28813	9.98443 15887 1466
15.30	0.26723 83760 78257	9.42689 88240 2170	74.30	0.96363 04532 08623	9.98391 05163 6931
15.45	0.27144 04498 65074	9.43367 45664 0481	74.15	0.96245 52364 53647	9.98338 05397 2518
16.00	0.27563 73558 16999	9.44033 80750 8540	74.00	0.96126 16359 38319	9.98284 16370 2333
16.15	0.27982 90140 30992	9.44689 27422 5119	73.45	0.96004 98543 85929	9.98229 37860 8385
16.30	0.28401 53447 03923	9.45334 18046 2526	73.30	0.95881 97348 68193	9.98173 69643 0211
16.45	0.28819 62681 34089	9.45968 83528 1657	73.15	0.95757 13608 04815	9.98117 11486 4473
17.00	0.29237 17047 22737	9.46593 53399 7743	73.00	0.95630 47559 63036	9.98059 63456 4586
17.15	0.29654 15749 75571	9.47208 55898 3093	72.45	0.95501 99444 57187	9.98001 24414 0283
17.30	0.30070 75995 04273	9.47814 18041 1781	72.30	0.95371 69507 48227	9.97941 95015 7227
17.45	0.30486 42990 28011	9.48410 65695 1812	72.15	0.95239 57996 43278	9.97881 74713 6559
18.00	0.30901 69943 74947	9.48998 23640 8607	72.00	0.95105 65162 95154	9.97820 63255 4501
18.15	0.31316 38064 83750	9.49577 15632 4326	71.45	0.94969 91262 01877	9.97758 60384 1883
18.30	0.31730 46564 05092	9.50147 64453 6292	71.30	0.94832 36552 06200	9.97695 65838 3711
18.45	0.32143 94653 03162	9.50709 91969 7982	71.15	0.94693 01294 95106	9.97631 79351 8679
19.00	0.32556 81544 57157	9.51264 19176 5476	71.00	0.94551 85755 99317	9.97567 00653 8733
19.15	0.32969 06452 62787	9.51810 66245 2142	70.45	0.94408 90203 92784	9.97501 29468 8555
19.30	0.33380 68592 33771	9.52349 52565 3965	70.30	0.94264 14910 92178	9.97434 65516 5086
19.45	0.33791 67180 03327	9.52880 96784 7803	70.15	0.94117 60152 56370	9.97367 08511 7025
20.00	0.34202 01433 25669	9.53405 16846 4555	70.00	0.93969 26207 85908	9.97298 58164 4290
20.15	0.34611 70570 77493	9.53922 30023 9179	69.45	0.93819 13359 22484	9.97229 14179 7541
20.30	0.35020 73812 59468	9.54432 52953 9244	69.30	0.93667 21892 48398	9.97158 76257 7583
20.45	0.35429 10379 97716	9.54936 01667 3518	69.15	0.93513 52096 86012	9.97087 44093 4863
21.00	0.35836 79495 45300	9.55432 91618 2157	69.00	0.93358 04264 97202	9.97015 17376 8881
21.15	0.36243 80382 83702	9.55923 37710 9582	68.45	0.93200 78692 82799	9.96941 95792 7638
21.30	0.36650 12267 24297	9.56407 54326 1623	68.30	0.93041 75679 82025	9.96867 79020 7033
21.45	0.37053 74375 09836	9.56885 55344 7519	68.15	0.92880 95528 71924	9.96792 66735 0290
22.00	0.37460 65934 15912	9.57357 54170 8339	68.00	0.92718 38545 66787	9.96716 58604 7322
22.15	0.37864 86173 52433	9.57823 63753 2332	67.45	0.92554 05040 17566	9.96639 54293 4111
22.30	0.38268 34323 65090	9.58283 96605 8310	67.30	0.92387 95325 11287	9.96561 53459 2094

Arc.	Sinus.	Log-Sinus.	Arc.	Sinus.	Log-Sinus.
22° 30'	0.38268 34323 65090	9.58283 96605 8310	67° 30'	0.92387 95325 11287	9.96561 53459 2094
22.45	0.38671 09616 36821	9.58738 64826 7796	67.15	0.92220 09716 70452	9.96482 55754 7489
23.00	0.39073 11284 89274	9.59187 80116 6658	67.00	0.92050 48534 52440	9.96402 60827 0645
23.15	0.39474 38563 84267	9.59631 53795 6909	66.45	0.91879 12101 48898	9.96321 68317 5360
23.30	0.39874 90689 25246	9.60069 96819 9343	66.30	0.91706 00743 85124	9.96239 77861 8189
23.45	0.40274 66898 58737	9.60503 19796 7602	66.15	0.91531 14791 19447	9.96156 89089 7734
24.00	0.40673 66430 75800	9.60931 32999 4026	66.00	0.91354 54576 42601	9.96073 01625 3927
24.15	0.41071 88526 13477	9.61354 46380 8154	65.45	0.91176 20435 77089	9.95988 15086 7298
24.30	0.41469 32426 56239	9.61772 69586 7965	65.30	0.90996 12708 76543	9.95902 29085 8202
24.45	0.41865 97375 37428	9.62186 11968 4516	65.15	0.90814 31738 25081	9.95815 43228 6078
25.00	0.42261 82617 40699	9.62594 82594 0315	65.00	0.90630 77870 36650	9.95727 57114 8638
25.15	0.42656 87399 01458	9.62998 90260 1791	64.45	0.90445 51454 54368	9.95638 70338 1087
25.30	0.43051 10968 08295	9.63398 43502 6242	64.30	0.90258 52843 49861	9.95548 82485 5286
25.45	0.43444 52574 04417	9.63793 50606 3514	64.15	0.90069 82393 22588	9.95457 93137 8935
26.00	0.43837 11467 89077	9.64184 19615 2863	64.00	0.89879 40462 99167	9.95366 01869 4693
26.15	0.44228 86902 19001	9.64570 58341 5079	63.45	0.89687 27415 32688	9.95273 08247 9333
26.30	0.44619 78131 09809	9.64952 74374 0309	63.30	0.89493 43616 02025	9.95179 11834 2827
26.45	0.45009 84410 37435	9.65330 75087 1710	63.15	0.89297 89434 11137	9.95084 12182 7473
27.00	0.45399 04997 39547	9.65704 67648 5299	63.00	0.89100 65241 88368	9.94988 08840 6900
27.15	0.45787 39151 16957	9.66074 59026 5972	62.45	0.88901 71414 85736	9.94891 01348 5196
27.30	0.46174 86132 25034	9.66440 55998 0202	62.30	0.88701 08331 78222	9.94792 89239 5886
27.45	0.46561 45203 25111	9.66802 65154 5353	62.15	0.88498 76374 63042	9.94693 72040 0958
28.00	0.46947 15627 85891	9.67160 92909 5951	62.00	0.88294 75928 58927	9.94593 49268 9848
28.15	0.47331 96671 84843	9.67515 45504 6912	61.45	0.88089 07382 05385	9.94492 20437 8409
28.30	0.47715 87602 59609	9.67866 29015 4139	61.30	0.87881 71126 61965	9.94389 85050 7857
28.45	0.48098 87689 19388	9.68213 49357 2254	61.15	0.87672 67557 07508	9.94286 42604 3686
29.00	0.48480 95202 46337	9.68557 12291 0054	61.00	0.87461 97071 39396	9.94181 92587 4572
29.15	0.48862 12414 96955	9.68897 23428 3476	60.45	0.87249 60070 72797	9.94076 34481 1231
29.30	0.49242 35601 03467	9.69233 88236 6248	60.30	0.87035 56959 39900	9.93969 67758 5305
29.45	0.49621 65036 75208	9.69567 12043 8578	60.15	0.86819 88144 89142	9.93861 91884 8126
30.00	0.50000 00000 00000	9.69897 00043 3602	60.00	0.86602 54037 84439	9.93753 06316 9585
30.15	0.50377 39770 45526	9.70223 57298 2067	59.45	0.86383 55052 04396	9.93643 10503 6840
30.30	0.50753 83629 60704	9.70546 88745 5072	59.30	0.86162 91604 41526	9.93532 03885 3102
30.45	0.51129 30860 77052	9.70866 99200 5123	59.15	0.85940 64115 01453	9.93419 85893 6336
31.00	0.51503 80749 10054	9.71183 93360 5499	59.00	0.85716 73007 02112	9.93306 55951 7951
31.15	0.51877 32581 60521	9.71497 75808 8030	58.45	0.85491 18706 72947	9.93192 13474 1458
31.30	0.52249 85647 15949	9.71808 51017 9397	58.30	0.85264 01643 54092	9.93076 57866 1105
31.45	0.52621 39236 51870	9.72116 23353 5965	58.15	0.85035 22249 95553	9.92959 88524 0464
32.00	0.52991 92642 33205	9.72420 97077 7271	58.00	0.84804 80961 56426	9.92842 04833 1024
32.15	0.53361 45159 15612	9.72722 76351 8188	57.45	0.84572 78217 03973	9.92723 08177 0700
32.30	0.53729 96083 46824	9.73021 65239 9902	57.30	0.84339 14458 12886	9.92602 91918 2338
32.45	0.54097 44713 67994	9.73317 67711 9604	57.15	0.84103 90129 64393	9.92481 61417 2200
33.00	0.54463 90350 15027	9.73610 87645 9135	57.00	0.83867 05679 45424	9.92359 14022 8394
33.15	0.54829 32295 19914	9.73901 28831 2531	56.45	0.83628 61558 47760	9.92235 49073 9250
33.30	0.55193 69853 12058	9.74188 94971 2528	56.30	0.83388 58220 67168	9.92110 65899 1719
33.45	0.55557 02330 19602	9.74473 89685 6011	56.15	0.83146 96123 02545	9.91984 63816 9685
34.00	0.55919 29034 70747	9.74756 16512 8727	56.00	0.82903 75725 55042	9.91857 42135 2197
34.15	0.56280 49276 95069	9.75035 78912 8829	55.45	0.82658 97491 27189	9.91729 00151 1806
34.30	0.56640 62369 24833	9.75312 80268 9774	55.30	0.82412 61886 22016	9.91599 37151 2709
34.45	0.56999 67625 96303	9.75587 23890 2242	55.15	0.82164 69379 42164	9.91468 52410 8943
35.00	0.57357 64363 51046	9.75859 13013 5406	55.00	0.81915 20442 88992	9.91336 45194 2486

Arc.	Sinus.	Log-Sinus.	Arc.	Sinus.	Log-Sinus.
35° 00'	0.57357 64363 51046	9.75859 13013 5406	55° 00'	0.81915 20442 88992	9.91336 45194 2486
35.15	0.57714 51900 37234	9.76128 50805 7353	54.45	0.81664 15551 61679	9.91203 14754 1335
35.30	0.58070 29557 10940	9.76395 40365 4769	54.30	0.81411 55183 56319	9.91068 60331 7566
35.45	0.58424 96656 37434	9.76659 84725 2028	54.15	0.81157 39819 65012	9.90932 81156 5285
36.00	0.58778 52522 92473	9.76921 86852 9506	54.00	0.80901 69943 74947	9.90795 76445 8597
36.15	0.59130 96483 63582	9.77181 49654 1364	53.45	0.80644 46042 67483	9.90657 45404 9465
36.30	0.59482 27867 51341	9.77438 75973 2607	53.30	0.80385 68606 17217	9.90517 87226 5581
36.45	0.59832 46005 70659	9.77693 68595 5686	53.15	0.80125 38126 91061	9.90377 01090 8127
37.00	0.60181 50231 52048	9.77946 30248 6401	53.00	0.79863 55100 47293	9.90234 86164 9534
37.15	0.60529 39880 42894	9.78196 63603 9399	52.45	0.79600 20025 34622	9.90091 41603 1134
37.30	0.60876 14290 08721	9.78444 71278 3059	52.30	0.79335 33402 91235	9.89946 66546 0810
37.45	0.61221 72800 34449	9.78690 55835 3919	52.15	0.79068 95737 43843	9.89800 60121 0548
38.00	0.61566 14753 25658	9.78934 19787 0607	52.00	0.78801 07536 06722	9.89653 21441 3954
38.15	0.61909 39493 09834	9.79175 65594 7385	51.45	0.78531 69308 80745	9.89504 49606 3677
38.30	0.62251 46366 37620	9.79414 95670 7095	51.30	0.78260 81568 52414	9.89354 43700 8847
38.45	0.62592 34721 84059	9.79652 12379 3908	51.15	0.77988 44830 92882	9.89203 02795 2301
39.00	0.62932 03910 49837	9.79887 18038 5449	51.00	0.77714 59614 56971	9.89050 25944 7926
39.15	0.63270 53285 62516	9.80120 14920 4656	50.45	0.77439 26440 82186	9.88896 12189 7791
39.30	0.63607 82202 77764	9.80351 05253 1226	50.30	0.77162 45833 87720	9.88740 60554 9276
39.45	0.63943 90019 80585	9.80579 91221 2705	50.15	0.76884 18320 73460	9.88583 70049 2118
40.00	0.64278 76096 86539	9.80806 74967 5243	50.00	0.76604 44431 18978	9.88425 39665 5351
40.15	0.64612 39796 42964	9.81031 58593 3976	49.45	0.76323 24697 82529	9.88265 68380 4223
40.30	0.64944 80483 30184	9.81254 44160 3118	49.30	0.76040 59556 00031	9.88104 55153 6992
40.45	0.65275 97524 62723	9.81475 33690 5738	49.15	0.75756 49843 84050	9.87941 98928 1645
41.00	0.65605 90289 90507	9.81694 29168 3225	49.00	0.75470 95802 22772	9.87777 98629 2565
41.15	0.65934 58151 00069	9.81911 32540 4471	48.45	0.75183 98074 78977	9.87612 53164 7059
41.30	0.66262 00482 15738	9.82126 45717 4779	48.30	0.74895 57207 89002	9.87445 61424 1850
41.45	0.66588 16660 00834	9.82339 70574 4506	48.15	0.74605 73750 61700	9.87277 22278 9429
42.00	0.66913 06063 58858	9.82551 08951 7436	48.00	0.74314 48254 77394	9.87107 34581 4351
42.15	0.67236 68074 34668	9.82760 62655 8868	47.45	0.74021 81274 86832	9.86935 97164 9418
42.30	0.67559 02076 15660	9.82968 33460 3618	47.30	0.73727 73368 10124	9.86763 08843 1734
42.45	0.67880 07455 52942	9.83174 23106 3545	47.15	0.73432 25094 35686	9.86588 68409 8715
43.00	0.68199 83600 62499	9.83378 33303 5054	47.00	0.73135 37016 19171	9.86412 74638 3939
43.15	0.68518 29903 26359	9.83580 65730 6302	46.45	0.72837 09698 82400	9.86235 26281 2903
43.30	0.68835 45756 93754	9.83781 22036 4207	46.30	0.72537 43710 12288	9.86056 22069 8667
43.45	0.69151 30557 82269	9.83980 03840 1245	46.15	0.72236 39620 59756	9.85875 60713 7384
44.00	0.69465 83704 58997	9.84177 12732 2059	46.00	0.71933 98003 38651	9.85693 40900 3701
44.15	0.69779 04598 41680	9.84372 50274 9899	45.45	0.71630 19434 24654	9.85509 61294 6024
44.30	0.70090 92642 99851	9.84566 18003 2841	45.30	0.71325 04491 54182	9.85324 20538 1683
44.45	0.70401 47244 55969	9.84758 17424 9879	45.15	0.71018 53756 23285	9.85137 17249 1927
45.00	0.70710 67811 86548	9.84948 50021 6801	45.00	0.70710 67811 86548	9.84948 50021 6801

TABLE IV.

Valeurs de $\log\text{-tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \phi)$ pour tous les angles ϕ de 30 en 30 minutes, depuis 0° jusqu'à 90° , calculées à douze décimales, avec leurs différences premières, secondes, troisièmes, quatrièmes et cinquièmes.

ϕ	$\log\text{-tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \phi)$	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
$0^\circ 00'$	0.00000 00000 00	872 67570 24	06646 36	06648 87	5 09	251
0.30	0.00872 67570 24	872 74216 60	13295 23	6653 96	7 60	253
1.00	0.01745 41786 84	872 87511 83	19949 19	6661 56	10 13	259
1.30	0.02618 29298 67	873 07461 02	26610 75	6671 69	12 72	254
2.00	0.03491 36759 69	873 34071 77	33282 44	6684 41	15 26	261
2.30	0.04364 70831 46	873 67354 21	39966 85	6699 67	17 87	256
3.00	0.05238 38185 67	874 07321 06	46666 52	6717 54	20 43	264
3.30	0.06112 45506 73	874 53987 58	53384 06	6737 97	23 07	263
4.00	0.06986 99494 31	875 07371 64	60122 03	6761 04	25 70	269
4.30	0.07862 06865 95	875 67493 67	66883 07	6786 74	28 39	264
5.00	0.08737 74359 62	876 34376 74	73669 81	6815 13	31 03	276
5.30	0.09614 08736 36	877 08046 55	80484 94	6846 16	33 79	272
6.00	0.10491 16782 91	877 88531 49	87331 10	6879 95	36 51	282
6.30	0.11369 05314 40	878 75862 59	94211 05	6916 46	39 33	281
7.00	0.12247 81176 99	879 70073 64	1 01127 51	6955 79	42 14	284
7.30	0.13127 51250 63	880 71201 15	1 08083 30	6997 93	44 98	294
8.00	0.14008 22451 78	881 79284 45	1 15081 23	7042 91	47 92	294
8.30	0.14890 01736 23	882 94365 68	1 22124 14	7090 83	50 86	299
9.00	0.15772 96101 91	884 16489 82	1 29214 97	7141 69	53 85	311
9.30	0.16657 12591 73	885 45704 79	1 36356 66	7195 54	56 96	304
10.00	0.17542 58296 52	886 82061 45	1 43552 20	7252 50	60 00	320
10.30	0.18429 40357 97	888 25613 65	1 50804 70	7312 50	63 20	327
11.00	0.19317 65971 62	889 76418 35	1 58117 20	7375 70	66 47	325
11.30	0.20207 42389 97	891 34535 55	1 65492 90	7442 17	69 72	341
12.00	0.21098 76925 52	893 00028 45	1 72935 07	7511 89	73 13	340
12.30	0.21991 76953 97	894 72963 52	1 80446 96	7585 02	76 53	359
13.00	0.22886 49917 49	896 53410 48	1 88031 98	7661 55	80 12	355
13.30	0.23783 03327 97	898 41442 46	1 95693 53	7741 67	83 67	372
14.00	0.24681 44770 43	900 37135 99	2 03435 20	7825 34	87 39	373
14.30	0.25581 81906 42	902 40571 19	2 11260 54	7912 73	91 17	388
15.00	0.26484 22477 61	904 51831 73	2 19173 27	8003 90	95 05	399
15.30	0.27388 74309 34	906 71005 00	2 27177 17	8098 95	99 04	407
16.00	0.28295 45314 34	908 98182 17	2 35276 12	8197 99	103 11	421
16.30	0.29204 43496 51	911 33458 29	2 43474 11	8301 10	107 32	435
17.00	0.30115 76954 80	913 76932 40	2 51775 21	8408 42	111 67	436
17.30	0.31029 53887 20	916 28707 61	2 60183 63	8520 09	116 03	465
18.00	0.31945 82594 81	918 88891 24	2 68703 72	8636 12	120 68	464
18.30	0.32864 71486 05	921 57594 96	2 77339 84	8756 80	125 32	492
19.00	0.33786 29081 01	924 34934 80	2 86096 64	8882 12	130 24	491
19.30	0.34710 64015 81	927 21031 44	2 94978 76	9012 36	135 15	520
20.00	0.35637 85047 25	930 16010 20	3 03991 12	9147 51	140 35	529

ϕ	$l \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \phi)$	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
20° 00'	0.35637 85047 25	930 16010 20	3 03991 12	9144 51	140 35	531
20.30	0.36568 01057 45	933 20001 32	3 13138 63	9287 86	145 66	547
21.00	0.37501 21058 77	936 33139 95	3 22426 49	9433 52	151 13	570
21.30	0.38437 54198 72	939 55566 44	3 31860 01	9584 65	156 83	579
22.00	0.39377 09765 16	942 87426 45	3 41444 66	9741 48	162 62	613
22.30	0.40319 97191 61	946 28871 11	3 51186 14	9904 10	168 75	621
23.00	0.41266 26062 72	949 80057 25	3 61090 24	10072 85	174 96	650
23.30	0.42216 06119 97	953 41147 49	3 71163 09	10247 81	181 46	670
24.00	0.43169 47267 46	957 12310 58	3 81410 90	10429 27	188 16	697
24.30	0.44126 59578 04	960 93721 48	3 91840 17	10617 43	195 13	719
25.00	0.45087 53299 52	964 85561 65	4 02457 60	10812 56	202 32	743
25.30	0.46052 38861 17	968 88019 25	4 13270 16	11014 88	209 75	782
26.00	0.47021 26880 42	973 01289 41	4 24285 04	11224 63	217 57	799
26.30	0.47994 28169 83	977 25574 45	4 35509 67	11442 20	225 56	835
27.00	0.48971 53744 28	981 61084 12	4 46951 87	11667 76	233 91	869
27.30	0.49953 14828 40	986 08035 99	4 58619 63	11901 67	242 60	899
28.00	0.50939 22864 39	990 66655 62	4 70521 30	12144 27	251 59	937
28.30	0.51929 89520 01	995 37176 92	4 82665 57	12395 86	260 96	977
29.00	0.52925 26696 93	1000 19842 49	4 95061 43	12656 82	270 73	1008
29.30	0.53925 46539 42	1005 14903 92	5 07718 25	12927 55	280 81	1063
30.00	0.54930 61443 34	1010 22622 17	5 20645 80	13208 36	291 44	1095
30.30	0.55940 84065 51	1015 43267 97	5 33854 16	13499 80	302 39	1145
31.00	0.56956 27333 48	1020 77122 13	5 47353 96	13802 19	313 84	1198
31.30	0.57977 04455 61	1026 24476 09	5 61156 15	14116 03	325 82	1243
32.00	0.59003 28931 70	1031 85632 24	5 75272 18	14441 85	338 25	1301
32.30	0.60035 14563 94	1037 60904 42	5 89714 03	14780 10	351 26	1356
33.00	0.61072 75468 36	1043 50618 45	6 04494 13	15131 36	364 82	1419
33.30	0.62116 26086 81	1049 55112 58	6 19625 49	15496 18	379 01	1481
34.00	0.63165 81199 39	1055 74738 07	6 35121 67	15875 19	393 82	1547
34.30	0.64221 55937 46	1062 09859 74	6 50996 86	16269 01	409 29	1619
35.00	0.65283 65797 20	1068 60856 60	6 67265 87	16678 30	425 48	1700
35.30	0.66352 26653 80	1075 28122 47	6 83944 17	17103 78	442 48	1767
36.00	0.67427 54776 27	1082 12066 64	7 01047 95	17546 26	460 15	1863
36.30	0.68509 66842 91	1089 13114 59	7 18594 21	18006 41	478 78	1947
37.00	0.69598 79957 50	1096 31708 80	7 36600 62	18485 19	498 25	2042
37.30	0.70695 11666 30	1103 68309 42	7 55085 81	18983 44	518 67	2142
38.00	0.71798 79975 72	1111 23395 23	7 74069 25	19502 11	540 09	2248
38.30	0.72910 03370 95	1118 97464 48	7 93571 36	20042 20	562 57	2364
39.00	0.74029 00835 43	1126 91035 84	8 13613 56	20604 77	586 21	2480
39.30	0.75155 91871 27	1135 04649 40	8 34218 33	21190 98	611 01	2605
40.00	0.76290 96520 67	1143 38867 73	8 55409 31	21801 99	637 06	2749
40.30	0.77434 35388 40	1151 94277 04	8 77211 30	22439 05	664 55	2884
41.00	0.78586 29665 44	1160 71488 34	8 99650 35	23103 60	693 39	3039
41.30	0.79747 01153 78	1169 71138 69	9 22753 95	23796 99	723 78	3210
42.00	0.80916 72292 47	1178 93892 64	9 46550 94	24520 77	755 88	3370
42.30	0.82095 66185 11	1188 40443 58	9 71071 71	25276 65	789 58	3568
43.00	0.83284 06628 69	1198 11515 29	9 96348 36	26066 23	825 26	3758
43.30	0.84482 18143 98	1208 07863 65	10 22414 59	26891 49	862 84	3971
44.00	0.85690 26007 63	1218 30278 24	10 49306 08	27754 33	902 55	4201
44.30	0.86908 56285 87	1228 79584 32	10 77060 41	28656 88	944 56	4437
45.00	0.88137 35870 19	1239 56644 73	11 05717 29	29601 44	988 93	4695

ϕ	$\log \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \phi)$	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
45° 00'	0.88137 35870 19	1239 56644 73	11 05717 29	29601 44	988 93	46 95
45.30	0.89376 92514 92	1250 62362 02	11 35318 73	30590 37	1035 88	49 80
46.00	0.90627 54876 94	1261 97680 75	11 65909 10	31626 25	1085 68	52 67
46.30	0.91889 52557 69	1273 63589 85	11 97535 35	32711 93	1138 35	55 90
47.00	0.93163 16147 54	1285 61125 20	12 30247 28	33850 28	1194 25	59 31
47.30	0.94448 77272 74	1297 91372 48	12 64097 56	35044 53	1253 56	62 99
48.00	0.95746 68645 22	1310 55470 04	12 99142 09	35298 09	1316 55	66 96
48.30	0.97057 24115 26	1323 54612 13	13 35440 18	37614 64	1383 51	71 14
49.00	0.98380 78727 39	1336 90052 31	13 73054 82	38998 15	1454 65	75 81
49.30	0.99717 68779 70	1350 63107 13	14 12052 97	40452 80	1530 44	80 71
50.00	1.01068 31886 83	1364 75160 10	14 52505 77	41983 26	1611 17	86 01
50.30	1.02433 07046 93	1379 27665 87	14 94489 03	43594 43	1697 18	91 87
51.00	1.03812 34712 80	1394 22154 90	15 38083 46	45291 61	1789 05	98 03
51.30	1.05206 56867 70	1409 60238 36	15 83375 07	47080 66	1887 08	104 78
52.00	1.06616 17106 06	1425 43613 43	16 30455 73	48967 74	1991 86	112 14
52.30	1.08041 60719 49	1441 74069 16	16 79423 47	50959 60	2104 01	120 05
53.00	1.09483 34788 65	1458 53492 63	17 30383 07	53063 61	2224 06	128 71
53.30	1.10941 88281 28	1475 83875 70	17 83446 68	55287 67	2352 77	138 07
54.00	1.12417 72156 98	1493 67322 38	18 38734 35	57640 44	2490 84	148 29
54.30	1.13911 39479 36	1512 06056 73	18 96374 79	60131 28	2639 13	159 46
55.00	1.15423 45536 09	1531 02431 52	19 56506 07	62770 41	2798 59	171 59
55.30	1.16954 47967 61	1550 58937 59	20 19276 48	65569 00	2970 18	184 89
56.00	1.18505 06905 20	1570 78214 07	20 84845 48	68539 18	3155 07	199 47
56.30	1.20075 85119 27	1591 63059 55	21 53384 66	71694 25	3354 54	215 41
57.00	1.21667 48178 82	1613 16444 21	22 25078 91	75048 79	3569 95	232 86
57.30	1.23280 64623 03	1635 41523 12	23 00127 70	78618 74	3802 81	252 17
58.00	1.24916 06146 15	1658 41650 82	23 78746 44	82421 55	4054 98	273 34
58.30	1.26574 47796 97	1682 20397 26	24 61167 99	86476 53	4328 32	296 67
59.00	1.28256 68194 23	1706 81565 25	25 47644 52	90804 85	4624 99	322 47
59.30	1.29963 49759 48	1732 29209 77	26 38449 37	95429 84	4947 46	351 02
60.00	1.31695 78969 25	1758 67659 14	27 33879 21	1 00377 30	5298 48	382 65
60.30	1.33454 46628 39	1786 01538 35	28 34256 51	1 05675 78	5681 13	417 71
61.00	1.35240 48166 74	1814 35794 86	29 39932 29	1 11356 91	6098 84	456 73
61.30	1.37054 83961 60	1843 7527 15	30 51289 20	1 17455 75	6555 57	500 33
62.00	1.38898 59688 75	1874 27016 35	31 68744 95	1 24011 32	7055 90	548 83
62.30	1.40772 86705 10	1905 95761 30	32 92756 27	1 31067 22	7604 73	603 17
63.00	1.42678 82466 40	1938 88517 57	34 23823 49	1 38671 95	8207 90	664 08
63.30	1.44617 70983 97	1973 12341 06	35 62495 44	1 46879 85	8871 98	732 63
64.00	1.46590 83325 03	2008 74836 50	37 09375 29	1 55751 83	9604 61	809 72
64.30	1.48599 58161 53	2045 84211 79	38 65127 12	1 65356 44	10414 33	896 69
65.00	1.50645 42373 32	2084 49338 91	40 30483 56	1 75770 77	11311 02	995 46
65.30	1.52729 91712 23	2124 79822 47	43 06254 33	1 87081 79	12306 48	1107 12
66.00	1.54854 71534 70	2166 86076 80	45 93336 12	1 99388 27	13413 60	1234 50
66.30	1.57021 57611 50	2210 79412 92	48 92724 39	2 12801 87	14648 10	1379 78
67.00	1.59232 37024 42	2256 72137 31	48 05526 26	2 27449 97	16027 88	1546 00
67.30	1.61489 09161 73	2304 77663 57	50 32976 23	2 43477 85	17573 88	1736 91
68.00	1.63793 86825 30	2355 10639 80	52 76454 08	2 61051 73	19310 79	1956 92
68.30	1.66148 97465 10	2407 87093 88	55 37505 81	2 80362 52	21267 71	2211 02
69.00	1.68556 84558 98	2463 24599 69	58 17868 33	3 01630 23	23478 73	2506 02
69.30	1.71020 09158 67	2521 42468 02	61 19498 56	3 25108 96	25984 75	2849 29
70.00	1.73541 51626 69	2582 61956 58	64 44607 52	3 51093 71	28834 04	3250 93

ϕ .	$\log \tan (45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
70° 00'	1.73541 51626 69	2582 61966 58	64 44607 52	3 51093 71	28834 04	3250 93
70.30	1.76124 13593 27	2647 06574 10	67 95701 23	3 79927 75	32084 97	3722 04
71.00	1.78771 20167 37	2715 02275 33	71 75628 98	4 12012 72	35807 01	4278 00
71.30	1.81486 22442 70	2786 77904 31	75 87641 70	4 47819 73	40085 01	4936 24
72.00	1.84273 00347 01	2862 65546 01	80 35461 43	4 87904 74	45021 25	5720 31
72.30	1.87135 65893 02	2943 01007 44	85 23366 17	5 32925 99	50741 56	6658 38
73.00	1.90078 66900 46	3028 24373 61	90 56292 16	5 83667 55	57399 94	7787 60
73.30	1.93106 91274 07	3118 80665 77	96 39959 71	6 41067 49	65187 54	9154 58
74.00	1.96225 71939 84	3215 20625 48	102 81027 20	7 06255 03	74342 12	10820 05
74.30	1.99440 92565 32	3318 01652 68	109 87282 23	7 80597 15	85162 17	12862 92
75.00	2.02758 94218 00	3427 88934 91	117 67879 38	8 65759 32	98025 09	15386 80
75.30	2.06186 83152 91	3545 56814 29	126 33638 70	9 63784 41	1 13411 89	18529 35
76.00	2.09732 39967 20	3671 90452 99	135 97423 11	10 77196 30	1 31941 24	22475 00
76.30	2.13404 30420 19	3807 87876 10	146 74619 41	12 09137 54	1 54416 24	27473 89
77.00	2.17212 18296 29	3954 62495 51	158 83756 95	13 63553 78	1 81890 13	33869 39
77.30	2.21166 80791 80	4113 46252 46	172 47310 73	15 45443 91	2 15759 52	42139 06
78.00	2.25280 27044 26	4285 93563 19	187 92754 64	17 61203 43	2 57898 58	52956 51
78.30	2.29566 20607 45	4473 86317 83	205 53958 07	20 19102 01	3 10855 09	67287 76
79.00	2.34040 06925 28	4679 40275 90	225 73060 08	23 29957 10	3 78142 85	86540 38
79.30	2.38719 47201 18	4905 13335 98	249 03017 18	27 08099 95	4 64683 23	1 12807 06
80.00	2.43624 60537 16	5154 16353 16	276 11117 13	31 72783 18	5 77490 29	1 49262 14
80.30	2.48778 76890 32	5430 27470 29	307 83900 31	37 50273 47	7 26752 43	2 00837 50
81.00	2.54209 04360 61	5738 11370 60	345 34173 78	44 77025 90	9 27589 93	2 75396 08
81.30	2.59947 15731 21	6083 45544 38	390 11199 68	54 04615 83	12 02986 01	3 85852 48
82.00	2.66030 61275 59	6473 56744 06	444 15815 51	66 07601 84	15 88838 49	5 54144 07
82.30	2.72504 18019 65	6917 72559 57	510 23417 35	81 96440 33	21 42982 56	8 19008 51
83.00	2.79421 90579 22	7427 95976 92	592 19857 68	103 39422 89	29 61991 07	
83.30	2.86849 86556 14	8020 15834 60	695 59280 57	133 01413 96	42 13985 01	
84.00	2.94870 02390 74	8715 75115 17	828 60694 53	175 15398 97	62 06509 59	
84.30	3.03585 77505 91	9544 35809 70	1003 76093 50	237 21908 56	95 36517 88	
85.00	3.13130 13315 61	10548 11903 20	1240 98002 06	332 58426 44	154 50926 71	
85.30	3.23678 25218 81	11789 09905 26	1573 56428 50	487 09353 15	268 06588 53	
86.00	3.35467 35124 07	13362 66333 76	2060 65781 65	755 15941 68	509 95271 10	
86.30	3.48830 01457 83	15423 32115 41	2815 81723 33	1265 11212 78	1106 54083 86	
87.00	3.64253 33573 24	18239 13838 74	4080 92936 11	2371 65296 64	2952 79872 23	
87.30	3.82492 47411 98	22320 06774 85	6452 58232 75	5324 45168 87	11665 45216 00	
88.00	4.04812 54186 83	28772 65007 60	11777 03401 62	16989 90384 87		
88.30	4.33585 19194 43	40549 68409 22	28766 93786 49			
89.00	4.74134 87603 65	69316 62195 71				
89.30	5.43451 49799 36					
90.00	Inf. logarithmique.					

ERRATA de la Table de Gardiner, édition d'Avignon.

Nombres.	Corrections du log.	Nombres.	Corrections du log.	Nombres.	Corrections du log.
59	7° chiffre..... 0	1083	10° chiffre..... 6	1115	13° chiffre..... 1
825	8° et 9°..... 48	1085	12° et 13°..... 45	1125	13°..... 3
1071	8°..... 7	1105	13°..... 1	1135	13°..... 1

TABLE V.

Logarithmes à 19 décimales pour tous les nombres impairs de 1163 à 1501, et pour tous les nombres premiers de 1501 à 10000.

Nota. Cette Table fait suite aux logarithmes à 20 décimales des Tables de Gardiner, édit. d'Avignon. Elle est extraite des grandes Tables du Cadastre, déposées au Bureau des Longitudes, et dont la notice se trouve dans le tome V. des Mémoires de l'Institut.

Nomb.	<i>Briggs</i> Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
1163	06557 97147 28448 4114	1243	09447 11286 41644 7635	1323	12155 98441 87500 9753
1165	06632 59253 62037 7769	1245	09516 93514 31755 1459	1325	12221 58782 72826 6552
1167	06707 08560 45370 1735	1247	09586 64534 78542 6137	1327	12287 09228 64435 5119
1169	06781 45111 61840 1107	1249	09656 24383 74135 5120	1329	12352 49809 42731 9975
1171	06855 68950 72363 1299	1251	09725 73096 93419 9551	1331	12417 80554 74675 1223
1173	06929 80121 15529 2447	1253	09795 10709 94149 9998	1333	12483 01494 13859 2061
1175	07003 78666 07755 0740	1255	09864 37258 17056 9441	1335	12548 12657 00594 0268
1177	07077 64628 43434 6816	1257	09933 52776 85957 7472	1337	12613 14072 61984 3683
1179	07151 38050 95089 1354	1259	10002 57301 07862 5975	1339	12678 05770 12008 9744
1181	07224 98976 13514 7991	1261	10071 50865 73081 6210	1341	12742 87778 51598 9129
1183	07298 47446 27930 3691	1263	10140 33505 55330 7447	1343	12807 60126 68715 3565
1185	07371 83503 46122 6701	1265	10209 05255 11836 7244	1345	12872 22843 38426 7849
1187	07445 07189 54591 2204	1267	10277 66148 83441 3410	1347	12936 75957 22985 6122
1189	07518 18546 18691 5818	1269	10346 16220 94704 7763	1349	13001 19496 71904 2476
1191	07591 17614 82777 5032	1271	10414 55505 54008 1742	1351	13065 53490 22030 5913
1193	07664 04436 70341 8728	1273	10482 84036 53655 3957	1353	13129 77965 97622 9726
1195	07736 79052 84156 4898	1275	10551 01847 69973 9754	1355	13193 92952 10424 5343
1197	07809 41504 06410 6668	1277	10619 08972 63415 2866	1357	13257 98476 59737 0691
1199	07881 91830 98848 6760	1279	10687 05444 78653 9226	1359	13321 94567 32494 3114
1201	07954 30074 02906 0489	1281	10754 91297 44686 3019	1361	13385 81252 03334 6909
1203	08026 56273 39844 7438	1283	10822 66563 74928 5036	1363	13449 58558 34673 5517
1205	08098 70469 10887 1889	1285	10890 31276 67313 3420	1365	13513 26513 76774 8420
1207	08170 72700 97349 2145	1287	10957 85469 04386 6846	1367	13576 85145 67822 2790
1209	08242 63008 60771 8862	1289	11025 29173 53403 0241	1369	13640 34481 33989 9936
1211	08314 41431 43052 2453	1291	11092 62422 66420 3088	1371	13703 74547 89512 6597
1213	08386 08008 66572 9742	1293	11159 85248 80394 0381	1373	13767 05372 36755 1114
1215	08457 62779 34330 9913	1295	11226 97684 17270 6323	1375	13830 26981 66281 4550
1217	08529 05782 30064 9888	1297	11293 99760 84080 0814	1377	13893 39402 56923 6777
1219	08600 37056 18381 9245	1299	11360 91510 73027 8800	1379	13956 42661 75849 7581
1221	08671 56639 44882 4749	1301	11427 72965 61586 2544	1381	14019 36785 78631 2844
1223	08742 64570 36285 4633	1303	11494 44157 12584 6916	1383	14082 21801 09310 5824
1225	08813 60887 00551 2710	1305	11561 05116 74299 7667	1385	14144 97734 00467 3586
1227	08884 45627 27004 2409	1307	11627 55875 80544 2978	1387	14207 64610 73084 8627
1229	08955 18828 86454 0856	1309	11693 96465 50755 8000	1389	14270 22457 37615 5730
1231	09025 80529 31316 3078	1311	11760 26916 90084 2777	1391	14332 71299 92046 4100
1233	09096 30765 95731 6432	1313	11826 47260 89479 3435	1393	14395 11164 23963 4808
1235	09166 69575 95684 5355	1315	11892 57528 25776 6738	1395	14457 42076 09616 3591
1237	09236 96996 29120 6536	1317	11958 57749 61783 8079	1397	14519 64061 14181 9050
1239	09307 13063 76063 4583	1319	12024 47955 46365 2965	1399	14581 77144 91827 6288
1241	09377 17814 98729 8296	1321	12090 28176 14527 2041	1401	14643 81352 85774 6000

Nomb.	Logarithmes.					Nomb.	Logarithmes.					Nomb.	Logarithmes.				
1403	14705	76710	28359	9128		1511	17926	44643	39025	3697		1889	27623	19579	21833	5851	
1405	14767	63242	41098	6977		1523	18269	99033	36042	5788		1901	27898	21168	65443	1382	
1407	14829	40974	34745	7022		1531	18497	51906	98261	0274		1907	28035	06930	46005	6229	
1409	14891	09931	09356	4271		1543	18836	59260	63148	2676		1913	28171	49700	27295	8569	
1411	14952	70137	54347	8324		1549	19005	14177	59206	0026		1931	28578	22737	79394	7088	
1413	15014	21618	48558	6114		1553	19117	14557	28558	5244		1933	28623	18540	28553	0108	
1415	15075	64398	60309	0404		1559	19284	61151	88841	6808		1949	28981	18391	17621	4349	
1417	15136	98502	47460	4044		1567	19506	89964	68590	1309		1951	29025	72693	94518	0691	
1419	15198	23954	57474	0045		1571	19617	61850	39973	3305		1973	29512	70852	52191	1870	
1421	15259	40779	27469	7488		1579	19838	21300	08294	2325		1979	29644	57942	06396	2655	
1423	15320	49000	84284	3325		1583	19948	09148	62355	9115		1987	29819	78671	09815	1505	
1425	15381	48643	44529	0084		1597	20330	49161	38482	9323		1993	29950	72987	00487	6032	
1427	15442	39731	14646	9530		1601	20439	13319	19299	7330		1997	30037	80648	70702	5693	
1429	15503	22287	90970	2303		1607	20601	58767	63344	5362		1999	30081	27941	18116	9390	
1431	15563	96337	59776	3575		1609	20655	60440	99029	5498		2003	30168	09492	93576	2274	
1433	15624	61903	97344	4760		1613	20763	43673	88961	5206		2011	30341	20705	96741	9391	
1435	15685	19010	70011	1300		1619	20924	68487	53373	7368		2017	30470	58982	12765	4356	
1437	15745	67681	34225	6571		1621	20978	30148	48514	9447		2027	30685	37486	93008	7091	
1439	15806	07939	36605	1948		1627	21138	75529	36858	7876		2029	30728	20470	33345	9873	
1441	15866	39808	13989	3015		1637	21404	86794	11941	4394		2039	30941	72257	78140	0007	
1443	15926	63310	93494	2033		1657	21932	25084	19336	7421		2053	31238	89493	70591	8735	
1445	15986	78470	92566	6618		1663	22089	22492	19519	2397		2063	31449	92279	73151	5648	
1447	16046	85311	19037	4711		1667	22193	55998	28005	3246		2069	31576	04906	65734	5911	
1449	16106	83854	71174	5842		1669	22245	63366	79246	7111		2081	31827	20802	11626	9347	
1451	16166	74124	37735	8736		1693	22865	69581	08935	2423		2083	31868	92699	47745	8650	
1453	16226	56142	98021	5291		1697	22968	18423	17675	7974		2087	31952	24490	65454	0310	
1455	16286	29933	21926	0938		1699	23019	33788	69045	6078		2089	31993	84399	80308	5790	
1457	16345	95517	69990	1441		1709	23274	20627	20736	8346		2099	32201	24385	82400	4375	
1459	16405	52918	93451	6141		1721	23578	08703	27560	2593		2111	32448	82333	07656	3795	
1461	16465	02159	34296	7697		1723	23628	52774	48028	4915		2113	32489	94970	52313	3675	
1463	16524	43261	25310	8330		1733	23879	85627	13917	0009		2129	32817	56614	38322	5660	
1465	16583	76246	90128	2610		1741	24079	87711	17331	2026		2131	32858	34497	14201	9742	
1467	16643	01138	43282	6822		1747	24229	29049	82930	9396		2137	32980	45221	64069	4114	
1469	16702	17957	90256	4920		1753	24378	19160	93794	9323		2141	33061	66672	94438	3295	
1471	16761	26727	27530	1111		1759	24526	58394	57461	2613		2143	33102	21710	41828	6701	
1473	16820	27468	42630	9101		1777	24968	74278	05301	5254		2153	33304	40298	23487	1907	
1475	16879	20203	14181	7998		1783	25115	13431	75354	6015		2161	33465	47668	83241	3318	
1477	16938	04953	11949	4958		1787	25212	45525	05644	2368		2179	33825	72302	46255	6213	
1479	16996	81739	96892	4532		1789	25261	03405	67372	9990		2203	34301	44971	50767	6114	
1481	17055	50585	21208	4794		1801	25551	37128	19533	3260		2207	34380	23331	61655	0376	
1483	17114	11510	28382	0254		1811	25791	84503	14058	4076		2213	34498	14139	27257	9464	
1485	17172	64536	53231	1574		1823	26078	66686	54976	3014		2221	34654	85585	48473	9562	
1487	17231	09685	21954	2134		1831	26268	83443	01696	4710		2237	34966	59840	96629	6816	
1489	17289	46977	52176	1462		1847	26646	68954	40241	4075		2239	35005	40935	79030	2656	
1491	17347	76434	52994	5541		1861	26974	63731	30767	0114		2243	35082	92735	82967	7382	
1493	17405	98077	25025	4050		1867	27114	43179	49078	3062		2251	35237	54950	00519	9849	
1495	17464	11926	62448	4529		1871	27207	37875	00009	9190		2267	35545	15201	26517	3878	
1497	17522	18003	43052	3515		1873	27253	77773	75237	3705		2269	35583	44958	84935	9774	
1499	17580	16328	48279	4666		1877	27346	42726	21346	3154		2273	35659	94357	24970	8201	
1501	17638	06922	43270	3895		1879	27392	67801	00525	6094		2281	35812	52852	76648	5660	

Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.			
2287	35926	61646	06748	4858	2687	42926	76664	33168	4560	3079	48840	96889	03198	1002
2293	36040	40547	29938	8543	2689	42959	08022	23301	6062	3083	48897	35247	26508	2541
2297	36116	09951	95026	0737	2693	43023	63534	11510	4335	3089	48981	79083	01450	6355
2309	36342	39329	17176	3403	2699	43120	28845	56516	6347	3109	49262	07220	43191	8159
2311	36379	99454	79109	3157	2707	43248	82557	70506	4158	3119	49401	53747	57143	7660
2333	36791	47387	93752	6251	2711	43312	95175	80485	5531	3121	49429	37686	65332	6900
2339	36903	02218	09153	0463	2713	43344	97937	61596	1053	3137	49651	45186	97745	0393
2341	36940	14136	96624	3470	2719	43440	92075	87500	1205	3163	50009	91919	15722	8453
2347	37051	30895	98592	5730	2729	43600	35356	69896	5310	3167	50064	80633	71911	9449
2351	37125	26291	24939	3636	2731	43632	17001	39733	3169	3169	50092	22391	90300	5088
2357	37235	95825	24323	7634	2741	43790	90355	39498	3820	3181	50256	36691	07363	3551
2371	37493	15539	78188	1529	2749	43917	47398	43468	4667	3187	50338	20634	73732	6748
2377	37602	91817	28180	2699	2753	43980	62113	93330	2552	3191	50392	68041	93510	4264
2381	37675	93954	04879	8631	2767	44200	91591	40951	9800	3203	50555	69386	63821	7657
2383	37712	40423	46456	1122	2777	44357	58797	50257	5886	3209	50636	97170	95504	0584
2389	37821	61497	49877	8861	2789	44544	85142	66049	8590	3217	50745	10609	01969	8096
2393	37894	26986	13437	3513	2791	44575	98364	88631	0466	3221	50799	07248	19691	3911
2399	38003	02479	67830	6251	2797	44669	24663	71527	2397	3229	50906	80450	17161	6366
2411	38219	72103	77453	6681	2801	44731	31088	23568	2046	3251	51201	69694	96126	6732
2417	38327	66504	07650	3677	2803	44762	30977	60286	1236	3253	51228	40632	81853	5767
2423	38435	34141	37506	2053	2819	45009	50758	71602	3289	3257	51281	77585	64873	1186
2437	38685	55291	84724	3065	2833	45224	65745	20437	1986	3259	51308	43604	65144	1888
2441	38756	77794	17188	6082	2837	45285	93357	95852	2851	3271	51468	05441	24981	6290
2447	38863	39693	51789	1886	2843	45377	68596	90442	1374	3299	51838	23155	45343	8794
2459	39075	85287	38717	1549	2851	45499	72173	09459	9883	3301	51864	55243	30311	5310
2467	39216	91494	89736	0322	2857	45591	02403	82743	0027	3307	51943	41949	13702	8454
2473	39322	41163	61297	2858	2861	45651	78578	05262	6426	3313	52022	14358	81959	9859
2477	39392	60065	85836	9841	2879	45924	16648	78082	0062	3319	52100	72524	08603	9504
2503	39846	08496	08223	2403	2887	46044	67838	80720	4883	3323	52153	03412	78711	0333
2521	40157	28456	76445	9143	2897	46194	84952	03761	8065	3329	52231	37951	56667	3811
2531	40329	21451	58254	2356	2903	46284	70358	31673	7255	3331	52257	46326	91176	8006
2539	40466	27008	73722	2253	2909	46374	37212	47059	1879	3343	52413	63765	92568	5294
2543	40534	63601	75708	8867	2917	46493	64291	21732	6772	3347	52465	57123	57777	1387
2549	40636	98354	69267	5167	2927	46642	27224	33791	9503	3359	52621	00038	41664	2840
2551	40671	04586	09790	0289	2939	46819	95860	72612	5652	3361	52646	85124	69477	4396
2557	40773	07280	26335	4522	2953	47026	34469	65078	4423	3371	52775	87525	20971	9209
2579	41145	13421	37937	4993	2957	47085	13245	26117	6377	3373	52801	63411	89201	4567
2591	41346	74129	85824	8130	2963	47173	16514	80051	0901	3389	53007	15688	37378	2488
2593	41380	25167	69351	4828	2969	47261	01975	96044	6380	3391	53032	77897	78086	3029
2609	41647	40791	00220	7695	2971	47290	26518	03664	0482	3407	53237	21335	67877	4083
2617	41780	37226	39880	9743	2999	47697	64657	59527	1346	3413	53313	62882	78638	8516
2621	41846	70209	46600	4622	3001	47726	59954	24852	6237	3433	53567	38034	25750	1264
2633	42045	08591	06068	1571	3011	47871	07555	12759	3156	3449	53769	31943	67390	7251
2647	42275	39413	01348	2174	3019	47986	31130	23097	7336	3457	53869	93795	42406	8037
2657	42439	15544	10277	5155	3023	48043	81471	77817	1025	3461	53920	15992	94127	7050
2659	42471	83373	31567	0409	3037	48244	47919	18265	2082	3463	53945	24915	49460	8298
2663	42537	11664	38941	2302	3041	48301	64201	44132	1610	3467	53995	38416	56396	6849
2671	42667	38880	21372	8399	3049	48415	74243	65380	6867	3469	54020	42998	42059	8234
2677	42764	83711	86932	6378	3061	48586	33295	97334	6406	3491	54294	98488	14178	8187
2683	42862	06726	71939	0034	3067	48671	37739	82485	4944	3499	54394	39424	82906	4451

Nomb.	Logarithmes.					Nomb.	Logarithmes.					Nomb.	Logarithmes				
3511	54543	08294	65351	2103		3907	59184	34112	24784	4534		4297	63316	53536	83903	1908	
3517	54617	23683	16942	5803		3911	59228	78159	52130	6928		4327	63618	68951	98724	2773	
3527	54740	54596	67489	6331		3917	59295	35715	47865	8683		4337	63718	94221	48761	9131	
3529	54765	16583	59969	1987		3919	59317	52634	78102	5917		4339	63738	96501	29211	9103	
3533	54814	36374	34845	4904		3923	59361	83081	29535	9103		4349	63838	94076	65335	9626	
3539	54888	05626	37514	8845		3929	59428	20288	11806	1101		4357	63918	75599	35753	9076	
3541	54912	59267	58111	0625		3931	59450	30438	20089	1841		4363	63978	52129	86820	1293	
3547	54986	11884	71942	7498		3943	59582	67770	73223	1805		4373	64077	94775	44856	9996	
3557	55108	38651	85780	3342		3947	59626	71263	95515	3304		4391	64256	34371	04387	7932	
3559	55132	79880	03845	9033		3967	59846	22004	74150	5198		4397	64315	64656	19706	2520	
3571	55278	98501	92781	9423		3989	60086	40363	09839	5628		4409	64434	00988	26322	5795	
3581	55400	43210	11902	9310		4001	60216	85513	78997	1702		4421	64552	05149	05874	0063	
3583	55424	68081	66110	5931		4003	60238	55901	05105	1223		4423	64571	69393	69603	7919	
3593	55545	72172	04649	4896		4007	60281	93424	32699	7829		4441	64748	07731	73675	9412	
3607	55714	61423	18363	1133		4013	60346	91597	33838	7345		4447	64806	71294	48934	6334	
3613	55786	79615	68022	2304		4019	60411	80061	92034	8608		4451	64845	75942	82522	5223	
3617	55834	85087	61619	7283		4021	60433	40731	02911	1042		4457	64904	26340	86176	3636	
3623	55906	83340	34536	8287		4027	60498	16296	07431	5657		4463	64962	68868	40529	4319	
3631	56002	62489	12892	3172		4049	60734	77767	68413	4006		4481	65137	49439	13043	2455	
3637	56074	33010	54711	9111		4051	60756	22431	83588	2304		4483	65156	87388	65791	8703	
3643	56145	91712	41915	9002		4057	60820	50077	04326	1850		4493	65253	64185	93025	3931	
3659	56336	24094	86607	4924		4073	60991	44100	85997	6990		4507	65388	75580	70977	5206	
3671	56478	43845	03986	7736		4079	61055	37053	17094	5850		4513	65446	53335	20145	8404	
3673	56502	09283	45293	7607		4091	61182	94794	98373	7604		4517	65485	00905	61394	2024	
3677	56549	36298	68862	3886		4093	61204	17446	45269	5500		4519	65504	23413	31201	7644	
3691	56714	40451	95657	1723		4099	61267	79183	16501	7500		4523	65542	65877	45918	6342	
3697	56784	94505	73106	7959		4111	61394	74767	80349	7610		4547	65772	49542	05108	2015	
3701	56831	90850	95111	7809		4127	61563	44688	77415	9649		4549	65791	59368	29955	1800	
3709	56925	68333	28610	1425		4129	61584	48828	74702	1328		4561	65906	00722	40938	2990	
3719	57042	61783	58972	5899		4133	61626	54052	81708	1904		4567	65963	10116	07000	6003	
3727	57135	93927	53839	6579		4139	61689	54264	00759	9660		4583	66114	98572	44786	6096	
3733	57205	79899	26304	5400		4153	61836	19311	09878	1650		4591	66190	72927	66020	7865	
3739	57275	54651	54219	6154		4157	61878	00245	06214	7633		4597	66247	45037	50309	6185	
3761	57530	33334	22399	1155		4159	61898	89203	64933	6199		4603	66304	09748	93924	2393	
3767	57599	56202	03267	6301		4177	62086	44752	65121	1164		4621	66473	59685	18704	9792	
3769	57622	61374	49604	9556		4201	62335	26815	37991	9779		4637	66623	70958	95804	4304	
3779	57737	68919	17014	5076		4211	62438	52414	20265	0739		4639	66642	43725	18759	6021	
3793	57898	28427	02790	5417		4217	62500	36010	14863	4604		4643	66679	86836	66174	0623	
3797	57944	05971	39797	1887		4219	62520	95253	81880	9958		4649	66735	95461	83087	0783	
3803	58012	63254	11582	4589		4229	62623	76851	46900	3864		4651	66754	63395	11516	4775	
3821	58217	70376	88408	8355		4231	62644	30253	31294	6565		4657	66810	62379	32731	3193	
3823	58240	42980	19028	1110		4241	62746	82724	59709	6159		4663	66866	54154	54492	0659	
3833	58353	88192	54352	1387		4243	62767	30317	66615	8733		4673	66959	57810	24313	3119	
3847	58512	21863	06815	4900		4253	62869	53827	14023	3003		4679	67015	30451	92180	2386	
3851	58557	35186	22731	1023		4259	62930	76400	73748	8538		4691	67126	54329	47158	3624	
3853	58579	90090	13000	9219		4261	62951	15342	00453	2343		4703	67237	49787	46079	4876	
3863	58662	47081	44820	3325		4271	63052	95714	26824	0577		4721	67403	40004	31254	8991	
3877	58849	58010	07210	0141		4273	63073	28928	17196	5194		4723	67421	79455	76699	9388	
3881	58894	36427	40014	9113		4283	63174	80743	96569	3486		4729	67476	93140	15426	2764	
3889	58983	79431	47459	7475		4289	63235	60462	39073	1953		4733	67513	65044	67994	0115	

Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.			
4751	67678	50304	19205	4734	5179	71424	59110	17894	0319	5639	75120	20945	88353	1618
4759	67751	57047	98757	4844	5189	71508	36706	94927	2405	5641	75135	60997	25393	6692
4783	67970	03808	71964	1482	5197	71575	27168	22859	5060	5647	75181	77877	36879	1783
4787	68006	34274	81948	5629	5209	71675	43574	32697	1761	5651	75212	53072	97898	2690
4789	68024	48370	42607	7033	5227	71825	25000	97750	5634	5653	75227	89854	60118	6960
4793	68060	74289	91787	8750	5231	71858	47200	27436	0050	5657	75258	61787	40409	2184
4799	68115	07499	32421	3927	5233	71875	07347	39665	2449	5659	75273	96939	35328	0310
4801	68133	17059	69165	7458	5237	71908	25739	01485	8954	5669	75350	64569	90970	0438
4813	68241	58616	77358	4900	5261	72106	83017	97159	0950	5683	75457	76560	44730	3446
4817	68277	66463	14434	0372	5273	72205	77713	31464	1389	5689	75503	59337	67771	5346
4831	68403	70374	86519	7603	5279	72255	16620	00958	4506	5693	75534	11838	11547	5755
4861	68672	56210	74542	1603	5281	72271	61674	88494	8051	5701	75595	10410	04131	9518
4871	68761	81295	71769	9250	5297	72402	99729	35597	7071	5711	75671	21601	64771	6249
4877	68815	27555	91566	3287	5303	72452	16271	18562	6797	5717	75716	81922	14272	5567
4889	68922	00372	63835	5893	5309	72501	27253	41156	9734	5737	75868	48498	82441	0039
4903	69046	18932	46178	2536	5323	72615	64661	72754	8590	5741	75898	75468	67619	2841
4909	69099	30320	99869	4272	5333	72697	15836	82876	6352	5743	75913	88162	81166	4735
4919	69187	68225	59331	3221	5347	72811	01841	00340	6120	5749	75959	23086	45974	8534
4931	69293	50025	31137	7324	5351	72843	49509	74254	7878	5779	76185	26944	66383	0639
4933	69311	11154	62141	2286	5381	73086	29920	46493	8842	5783	76215	31923	03594	6213
4937	69346	31272	19531	1363	5387	73134	69755	45954	9362	5791	76275	35649	33373	9618
4943	69399	06104	60776	7830	5393	73183	04202	88162	4017	5801	76350	28654	67597	0365
4951	69469	29263	31484	0807	5399	73231	33274	71242	4935	5807	76395	18260	33324	2017
4957	69521	89189	05150	9206	5407	73295	63695	75624	6482	5813	76440	03229	56388	1536
4967	69609	41599	95223	3420	5413	73343	80270	91061	3260	5821	76499	75992	84880	5853
4969	69626	89967	45532	7954	5417	73375	88355	87202	7034	5827	76544	50180	90150	0528
4973	69661	84592	32224	9426	5419	73391	91510	12390	8985	5839	76633	84752	51287	3046
4987	69783	93682	18363	0155	5431	73487	98027	92627	5336	5843	76663	58863	10267	5225
4993	69836	15660	55109	7364	5437	73535	93330	01710	7747	5849	76708	16213	63322	2621
4999	69888	31367	52590	2237	5441	73567	87259	05904	5559	5851	76723	00981	10718	2821
5003	69923	05028	83409	1514	5443	73583	83343	17073	7650	5857	76767	52240	27960	0404
5009	69975	10316	89514	3236	5449	73631	68079	04108	8249	5861	76797	17213	81618	8469
5011	69992	44027	42476	6996	5471	73806	67147	77469	2694	5867	76841	60882	16331	6542
5021	70079	02213	74346	9111	5477	73854	27429	28785	2045	5869	76856	41095	13573	4561
5023	70096	31781	59549	3096	5479	73870	13004	34709	7691	5879	76930	54601	89081	7334
5039	70234	43583	55768	7083	5483	73901	82458	83480	9097	5881	76945	11794	02037	6191
5051	70337	73085	12349	5472	5501	74044	16449	49765	9683	5897	77063	11277	77806	5864
5059	70406	46794	08567	3620	5503	74059	95128	11156	5125	5903	77107	27832	21194	7373
5077	70560	71634	04605	0364	5507	74091	50764	81282	5450	5923	77254	17326	40943	5210
5081	70594	91949	10295	6715	5519	74186	03940	65263	5418	5927	77283	49272	39018	1375
5087	70646	17376	31354	7002	5521	74201	77471	40138	2700	5939	77371	33252	77021	6222
5099	70748	50119	67473	5829	5527	74248	94645	81775	1396	5953	77473	58825	51753	3540
5101	70765	53235	31186	9120	5531	74280	36584	69165	5752	5981	77677	38024	12107	0439
5107	70816	58578	55540	0645	5557	74484	03967	85379	1774	5987	77720	92581	45684	8434
5113	70867	57927	26536	9761	5563	74530	90599	40827	9784	6007	77865	76319	47355	2452
5119	70918	51295	50245	4248	5569	74577	72178	89759	0674	6011	77894	67279	68616	7433
5147	71155	41682	50169	5456	5573	74608	90430	56200	2049	6029	78024	52838	65352	6101
5153	71206	01424	61074	7488	5581	74671	20225	16660	4418	6037	78082	11758	53472	9465
5167	71323	84615	45661	7155	5591	74748	94922	58672	8673	6043	78125	25942	48456	4214
5171	71357	45377	72069	7653	5623	74996	80835	09402	8802	6047	78153	99686	05941	7129

Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.			
6053	78197	06739	12552	0273	6473	81110	56070	17930	3959	6917	83991	77756	78680	9882
6067	78297	39949	44048	2468	6481	81164	20214	53151	0093	6947	84179	72988	74355	2963
6073	78340	32811	22563	4564	6491	81231	16091	31123	7730	6949	84192	23116	79450	8701
6079	78383	21433	84441	0902	6521	81431	42002	07459	5680	6959	84254	68364	95014	9484
6089	78454	59740	54522	5789	6529	81484	66686	04463	2882	6961	84267	16337	60788	4232
6091	78468	85995	01421	2721	6547	81604	23409	21996	6183	6967	84304	58105	34569	2922
6101	78540	10249	92387	5093	6551	81630	75994	31939	8000	6971	84329	50827	36507	1077
6113	78625	43957	89780	2451	6553	81644	01679	56138	6603	6977	84366	87229	79143	7641
6121	78682	25794	99187	4273	6563	81710	24042	56923	1482	6983	84404	20402	41016	5201
6131	78753	13161	27234	2555	6569	81749	92618	67758	2742	6991	84453	93021	29007	9031
6133	78767	29646	87492	9752	6571	81763	14671	90515	3560	6997	84491	18739	12140	6054
6143	78838	05153	19563	3163	6577	81802	78418	59256	2131	7001	84516	00776	51945	8108
6151	78894	57270	23747	7609	6581	81829	18907	99995	9143	7013	84590	38388	98782	5225
6163	78979	21677	30675	3779	6599	81947	81283	62122	5991	7019	84627	52424	12213	1751
6173	79049	62769	67109	5491	6607	82000	43068	08317	9009	7027	84676	99535	37218	7858
6197	79218	14961	49678	8122	6619	82079	23810	88203	7152	7039	84751	09652	03248	1471
6199	79232	16363	51573	5128	6637	82197	18176	42042	8139	7043	84775	76883	92331	2669
6203	79260	17811	64966	4315	6653	82301	75234	46049	2396	7057	84862	01174	34133	9062
6211	79316	15292	45550	7349	6659	82340	90148	92544	8317	7069	84935	79816	61998	9523
6217	79358	08673	68155	8083	6661	82353	94336	56858	9914	7079	84997	19123	28850	1175
6221	79386	02013	42669	6055	6673	82432	11248	50771	2649	7103	85144	18146	72055	0598
6229	79441	83308	74140	9842	6679	82471	14434	64734	3175	7109	85180	85142	28237	4944
6247	79567	15059	46021	7452	6689	82536	11959	52633	3346	7121	85254	09857	69798	8685
6257	79636	61549	77521	2805	6691	82549	10298	79430	8769	7127	85290	67587	96953	6733
6263	79678	24117	01307	7941	6701	82613	96179	35914	7631	7129	85302	86147	12989	7236
6269	79719	82698	38958	8829	6703	82626	92193	93726	2243	7151	85436	67780	40869	5918
6271	79733	68007	75349	8335	6709	82665	77918	75869	3094	7159	85485	23624	17834	0070
6277	79775	21286	50710	7351	6719	82730	46410	89734	9394	7177	85594	29462	32316	0249
6287	79844	34603	50187	4660	6733	82820	86144	67945	4177	7187	85654	76448	56747	8503
6299	79927	16083	49872	6416	6737	82846	65473	52678	3337	7193	85691	00603	00786	2334
6301	79940	94796	15126	8130	6761	83001	09359	36117	8611	7207	85775	45220	59442	2260
6311	80009	81801	74775	6352	6763	83013	93874	25342	7250	7211	85799	54955	60923	9877
6317	80051	08768	94367	9732	6779	83116	56339	09442	4869	7213	85811	59321	90066	1114
6323	80092	31818	13218	2711	6781	83129	37443	77009	5941	7219	85847	70418	13340	5350
6329	80133	50956	74546	5674	6791	83193	37304	66745	4233	7229	85907	82247	46969	3440
6337	80188	37071	25239	5991	6793	83206	16145	90726	9775	7237	85955	85726	26053	5296
6343	80229	47113	97463	7382	6803	83270	04709	60567	3988	7243	85991	84852	00715	7622
6353	80297	88553	35261	8202	6823	83397	53712	79906	1914	7247	86015	82613	18278	2466
6359	80338	88249	83613	4770	6827	83422	99028	51677	3806	7253	86051	76774	61746	3069
6361	80352	53955	76532	3907	6829	83435	71127	18405	0738	7283	86251	03099	54270	4127
6367	80393	48498	63841	7786	6833	83461	14207	22687	1748	7297	86314	43462	52667	4523
6373	80434	39184	79865	8761	6841	83511	95904	24549	6290	7307	86373	91073	45217	1178
6379	80475	26021	50460	4636	6857	83613	41494	65374	8256	7309	86385	79618	83972	9621
6389	80543	28881	32139	9313	6863	83651	39988	90671	3895	7321	86457	04068	53430	2588
6397	80597	63507	17562	6493	6869	83689	35163	76433	7301	7331	86516	32195	06086	2333
6421	80760	26699	16494	6085	6871	83701	99485	40908	4040	7333	86528	16849	95610	5483
6427	80800	82999	10399	9977	6883	83777	77695	53733	2867	7349	86622	82473	79647	2099
6449	80949	23769	37341	8335	6899	83878	61449	46594	6126	7351	86634	64227	49601	7583
6451	80962	70418	94049	7299	6907	83928	94560	06146	9348	7369	86740	85565	22791	2613
6469	81083	71511	40488	3207	6911	83954	08929	68968	8441	7393	86882	07061	97517	3791

Nomb.	Logarithmes.					Nomb.	Logarithmes.					Nomb.	Logarithmes.				
7411	86987	68132	66766	5706		7829	89370	62930	64713	4813		8291	91860	69151	44981	9302	
7417	87022	82790	11794	4326		7841	89437	14538	56237	6867		8293	91871	16653	82321	2210	
7433	87116	41328	02949	4104		7853	89503	55974	52322	6469		8297	91892	10900	91335	7852	
7451	87221	45633	97585	5381		7867	89580	91501	69130	9601		8311	91965	32823	10364	1971	
7457	87256	41430	90651	5862		7873	89614	02514	42019	5842		8317	91996	67014	83387	1454	
7459	87268	06071	51929	6546		7877	89636	08454	69316	3791		8329	92059	28620	84808	4931	
7477	87372	73806	46679	5095		7879	89647	11004	79277	2328		8353	92184	24814	05857	9354	
7481	87395	96547	43353	1458		7883	89669	15265	62884	0607		8363	92236	20967	84790	0284	
7487	87430	78331	28038	9580		7901	89768	20617	96419	9192		8369	92267	35678	58554	2247	
7489	87442	38305	86501	8596		7907	89801	17387	97501	6439		8377	92308	85154	42399	2479	
7499	87500	33536	00041	0378		7919	89867	03429	65529	8291		8387	92360	66430	17459	1195	
7507	87546	64158	66385	5797		7927	89910	88581	93399	4082		8389	92371	01943	96562	7871	
7517	87604	45502	46095	1077		7933	89943	74542	86177	5637		8419	92526	05095	19435	2624	
7523	87639	10618	19187	5965		7937	89965	63803	05635	6059		8423	92546	68006	91537	8604	
7529	87673	72971	40664	5019		7949	90031	24969	83726	5994		8429	92577	60538	36746	2941	
7537	87719	85152	71789	7640		7951	90042	17534	57737	6041		8431	92587	90893	01500	8211	
7541	87742	89407	88219	7457		7963	90107	67157	26254	8523		8443	92649	67892	73220	3694	
7547	87777	43499	91398	0814		7993	90270	98129	69877	0730		8447	92670	24941	82644	9514	
7549	87788	94253	71483	9906		8009	90357	82936	63054	3891		8461	92742	16950	50418	7062	
7559	87846	43453	41468	9091		8011	90368	67317	36502	4680		8467	92772	95597	71654	5057	
7561	87857	92380	62219	2161		8017	90401	18835	97388	2254		8501	92947	00161	77489	4989	
7573	87926	79568	24612	8067		8039	90520	20286	62318	6417		8513	93008	26333	92371	2241	
7577	87949	72872	49428	5429		8053	90595	76990	92427	0713		8521	93049	05653	06269	5942	
7583	87984	10559	86562	5460		8059	90628	11557	72153	0643		8527	93079	62629	83300	2172	
7589	88018	45528	26433	4408		8069	90681	97154	66545	4602		8537	93130	52814	21673	2321	
7591	88029	89914	25752	5915		8081	90746	51067	65856	1959		8539	93140	70135	56573	4714	
7603	88098	49904	86753	4266		8087	90778	74431	10616	1702		8543	93161	04063	62962	0215	
7607	88121	34162	55019	2197		8089	90789	48354	16282	8982		8563	93262	59440	21782	1916	
7621	88201	19616	26658	6244		8093	90810	95403	92552	1732		8573	93313	28237	26734	2779	
7639	88303	65100	27679	8002		8101	90853	86321	71959	3955		8581	93353	79019	71704	6627	
7643	88326	38595	84973	9862		8111	90907	44014	00904	3115		8597	93434	69267	38255	5848	
7649	88360	46609	22292	4558		8117	90939	55459	67105	5346		8599	93444	79489	48970	0539	
7669	88473	87377	69631	7802		8123	90971	64532	34344	6125		8609	93495	27078	17880	0832	
7673	88496	51982	00732	7035		8147	91099	77163	10642	8093		8623	93565	83861	00634	1531	
7681	88541	77651	10936	0941		8161	91174	33778	55931	6951		8627	93585	97980	37880	4315	
7687	88575	68810	69267	3968		8167	91206	25555	88502	3437		8629	93596	04689	89166	4555	
7691	88598	28113	54973	0938		8171	91227	52104	98812	3276		8641	93656	40051	35265	9525	
7699	88643	43196	28938	2978		8179	91270	02081	90860	3549		8647	93686	54589	75622	5638	
7703	88665	98978	61202	8219		8191	91333	69259	32623	1919		8663	93766	83143	99005	1079	
7717	88744	85002	49953	6908		8209	91429	02556	65949	0549		8669	93796	90029	51452	8369	
7723	88778	60348	38371	5415		8219	91481	89804	47473	1221		8677	93836	95974	51806	3137	
7727	88801	09122	45028	7325		8221	91492	46482	05148	4859		8681	93856	97562	21061	1709	
7741	88879	70674	56680	7607		8231	91545	26016	88478	7585		8689	93896	97972	22890	2373	
7753	88946	97839	69507	4191		8233	91555	81154	11520	4260		8693	93916	96796	25177	4366	
7757	88969	37914	44185	3148		8237	91576	90659	83684	1331		8699	93946	93308	43530	1333	
7759	88980	57518	68085	4232		8243	91608	52998	43702	7256		8707	93986	85444	59509	7175	
7789	89148	17038	39520	0093		8263	91713	77527	56444	2692		8713	94016	77140	34074	9292	
7793	89170	46762	39182	6942		8269	91745	29919	29663	4871		8719	94046	66776	63528	9422	
7817	89304	01119	57117	9356		8273	91766	30243	27374	9431		8731	94106	39882	19902	0168	
7823	89337	33302	46024	9201		8287	91839	73388	43700	1638		8737	94136	23357	11761	1275	

Nomb.	Logarithmes.					Nomb.	Logarithmes.					Nomb.	Logarithmes.				
8741	94156	11202	36070	7866		9173	96251	13935	07596	9014		9587	98168	27273	71285	3752	
8747	94185	91265	25373	5326		9181	96288	99873	91791	1698		9601	98231	64696	92065	2528	
8753	94215	69284	67490	4510		9187	96317	37163	75251	6470		9613	98285	89423	12075	2231	
8761	94255	36803	34209	9240		9199	96374	06188	57884	1033		9619	98312	99247	34700	0795	
8779	94344	50490	25030	4334		9203	96392	94220	26558	4660		9623	98331	04857	94115	5451	
8783	94364	28827	52129	0182		9209	96421	24729	69819	2283		9629	98358	11867	05790	7016	
8803	94463	07018	56278	2405		9221	96477	80220	22376	0392		9631	98367	13828	60196	5746	
8807	94482	79963	43216	2457		9227	96506	05206	11198	5599		9643	98421	21667	61433	8510	
8819	94541	93426	03063	1623		9239	96562	49671	09242	7782		9649	98448	23664	02262	7516	
8821	94551	78220	77839	6193		9241	96571	89702	44220	8809		9661	98502	20821	09535	1666	
8831	94600	98847	65764	8792		9257	96647	02637	29284	4141		9677	98574	07410	50074	5728	
8837	94630	48549	93474	9225		9277	96740	75565	97472	8125		9679	98583	04898	58392	1658	
8839	94640	31338	99054	5994		9281	96759	47726	71889	7507		9689	98627	89559	05991	2176	
8849	94689	41951	02326	7729		9283	96768	83504	53312	6174		9697	98663	73956	10153	8710	
8861	94748	27365	56918	6220		9293	96815	59371	49970	4956		9719	98762	15821	25483	7587	
8863	94758	07493	04322	4964		9311	96899	63266	48312	2539		9721	98771	09431	30305	8792	
8867	94777	67084	64738	2990		9319	96936	93117	33527	4805		9733	98824	67233	75378	3745	
8887	94875	51801	68269	8286		9323	96955	56842	20843	5283		9739	98851	43658	33666	1168	
8893	94904	82923	15663	8105		9337	97020	73588	06854	6392		9743	98869	27025	49816	7652	
8923	95051	08929	85996	5961		9341	97039	33720	79600	1373		9749	98896	00703	90338	0362	
8929	95080	28229	64658	5100		9343	97048	63488	47650	2359		9767	98976	11877	18778	1870	
8933	95099	73339	88804	9762		9349	97076	51597	80767	7041		9769	98985	01096	03180	4153	
8941	95138	60948	80292	8195		9371	97178	59378	79114	4156		9781	99038	32589	06233	5744	
8951	95187	15571	28364	3523		9377	97206	39160	08022	2462		9787	99064	95883	18854	4092	
8963	95245	33964	23033	2332		9391	97271	18405	47066	5330		9791	99082	70505	67478	8512	
8969	95274	40240	14898	3616		9397	97298	92268	55348	7983		9803	99135	90026	37950	2638	
8971	95284	08566	75701	5826		9403	97326	64361	08528	6434		9811	99171	32757	13089	4582	
8999	95419	42518	15862	4479		9413	97372	80586	88027	4147		9817	99197	87909	94583	6252	
9001	95429	07617	01126	9971		9419	97400	47968	97414	6429		9829	99250	93350	67775	4994	
9007	95458	01627	43757	3472		9421	97409	70037	94131	1301		9833	99268	60391	62127	9123	
9011	95477	29896	89717	1012		9431	97455	77448	53579	9180		9839	99295	09605	70446	4446	
9013	95486	93710	66478	2455		9433	97464	98344	38722	0950		9851	99348	03190	69996	5075	
9029	95563	96530	23251	9434		9437	97483	39550	48540	0624		9857	99374	47565	54462	3237	
9041	95621	64692	43390	0833		9439	97492	59860	89762	4482		9859	99383	28666	13986	1431	
9043	95631	25308	41194	5307		9461	97593	70424	83110	6222		9871	99436	11519	08001	0209	
9049	95660	05882	13176	6632		9463	97602	88400	91125	8842		9883	99488	87953	64910	6336	
9059	95708	02596	57899	8612		9467	97621	23771	17377	1089		9887	99506	45341	56141	5338	
9067	95746	36157	29931	2890		9473	97648	75373	05189	9361		9901	99567	90605	11622	1815	
9091	95861	16577	64879	4120		9479	97676	25232	67460	6333		9907	99594	21629	92550	6282	
9103	95918	45427	31191	4869		9491	97731	19733	96925	9941		9923	99664	29913	55472	4740	
9109	95947	07020	75107	1028		9497	97758	64380	03851	1387		9929	99690	55106	95666	1523	
9127	96032	80505	30143	1414		9511	97822	61816	74525	9001		9931	99699	29818	90705	7058	
9133	96061	34576	47908	8154		9521	97868	25651	56944	5443		9941	99743	00737	97471	2019	
9157	96080	36249	11769	7450		9533	97922	95930	22155	3537		9949	99777	94308	65603	9562	
9151	96146	85553	50786	3424		9539	97950	28487	87401	2681		9967	99856	44582	60941	6468	
9157	96175	32141	86782	5731		9547	97986	69225	64902	8239		9973	99882	58190	40286	0476	
9161	96194	28831	41387	2584		9551	98004	88450	64956	7533		10007	00030	38997	84812	4918	

FIN DES TABLES.

Contin. p. 333

EXERCICES

DE CALCUL INTÉGRAL.

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES.

SUITE DU TOME III.

LA détermination des fonctions E et F , selon les diverses valeurs de l'amplitude et du module, est encore l'objet principal que nous nous sommes proposé dans la continuation de ces recherches. On peut y parvenir, soit par le moyen d'une table particulière dressée pour chaque valeur donnée de l'angle du module, soit par le moyen d'un système de tables, qui seraient construites en faisant varier par des intervalles égaux et suffisamment petits, l'amplitude et l'angle du module. Le dernier moyen est celui qu'on jugera le plus commode dans la pratique, quoiqu'il exige dans chaque cas une double interpolation; mais le travail qu'il suppose est une entreprise longue et difficile, dont l'exécution ne peut être que fort éloignée. Nous avons tâché au moins d'en applanir les difficultés par un travail préparatoire dont les Tables VIII et IX contiennent les résultats, et que nous expliquerons avec tous les détails nécessaires. Ces Tables elles-mêmes peuvent déjà suppléer en partie aux Tables plus étendues qui nous restent à désirer; mais, comme elles ne procèdent que de degré en degré, tant pour l'amplitude que pour l'angle du module, leur interpolation sera nécessairement plus difficile ou moins exacte que si ces intervalles étaient plus petits.

Si l'on veut éviter les doubles interpolations, il faudra revenir au premier moyen, c'est-à-dire construire pour chaque module donné, une Table particulière qui étant calculée pour un certain nombre

de valeurs de l'amplitude, puisse faire connaître, avec le moins de travail possible, les fonctions qui répondent à toute autre valeur donnée de l'amplitude. Nous avons déjà indiqué, dans les recherches précédentes, plusieurs méthodes qui remplissent cet objet, et nous avons fait l'application d'une de ces méthodes à la Table particulière pour le module $\sin 45^\circ$, laquelle a été calculée jusqu'à douze décimales, afin de pouvoir être sûr de l'exactitude de la onzième ou au moins de la dixième. Mais on a pu remarquer que le calcul d'une pareille Table, quand il ne serait fait que de degré en degré, est très-long; ce n'est donc que dans le cas où l'on aurait un grand nombre de fonctions à calculer sur le même module, qu'on peut se livrer à un travail préliminaire aussi considérable. En réfléchissant de nouveau sur cette matière, il nous a paru qu'on pouvait plus facilement atteindre le même but par la méthode du § IV, modifiée convenablement. On verra en effet qu'un tableau formé de quelques lignes seulement, d'après un module donné, peut servir à calculer jusqu'à dix décimales ou plus, les fonctions E et F correspondantes à une valeur quelconque de l'amplitude ϕ , et qu'il suffit pour cela d'ajouter au calcul ordinaire de l'interpolation, celui de quelques formules trigonométriques très-simples. La formation de la Table auxiliaire et le calcul qu'exige son application, sont déjà peu compliqués, lorsqu'on ne veut obtenir que dix décimales; ils se simplifieraient encore bien davantage, si l'on se bornait à sept. Au reste, pour faciliter l'usage de cette méthode, nous avons construit la Table VII, qui fournira immédiatement, pour chaque angle du module moindre que 45° , l'élément principal sur lequel le calcul de la Table auxiliaire doit être fondé.

Persuadé, comme nous le sommes, que cette méthode est la plus facile à employer dans la pratique, tant qu'on n'aura pas à sa disposition un système suffisamment étendu de Tables elliptiques, nous l'avons exposée avec détail, et nous l'avons appliquée à divers exemples, en développant quelquefois fort au long les calculs qu'elle exige. Le dernier exemple relatif au module $\sin 81^\circ$, a été calculé surtout avec tous les soins nécessaires pour que l'exactitude des résultats puisse être garantie jusqu'à la quatorzième décimale. Il est à croire qu'on n'aura jamais besoin d'une si grande précision; mais

nous avons donné cet exemple comme la limite du degré d'exactitude auquel on peut parvenir, par les Tables connues, dans un des cas les plus difficiles de la théorie des fonctions elliptiques.

Avant d'exposer ces diverses méthodes d'approximation, nous avons traité de quelques autres objets que nous allons indiquer sommairement.

Le § VIII donne les valeurs des fonctions E et F, telles qu'elles résultent immédiatement de l'intégration par séries. On y trouvera deux Tables qui donnent pour chaque degré du quadrant, la valeur de l'intégrale $\int d\phi \sin^2 \phi$, avec dix décimales, et celle des deux intégrales $\int d\phi \sin^4 \phi$, $\int d\phi \sin^6 \phi$, avec neuf décimales.

Dans le § IX nous avons donné l'intégrale complète des équations différentielles du second ordre auxquelles satisfont les fonctions F et E, considérées dans toute leur généralité.

Dans le § X nous faisons voir que toute fonction rationnelle de $\sin \omega$ et $\cos \omega$, dont le dénominateur est incomplexe, étant développée en série, suivant les puissances de ω , on peut assigner un terme quelconque du développement, par le moyen des coefficients H_n , K_n . Nous donnons en même tems l'expression générale de chacun de ces coefficients, sous deux formes différentes.

Le § XI a pour objet de réduire à la forme la plus simple, la formule générale qui sert à déterminer la fonction $E\phi$, suivant la méthode des modules croissans.

Toutes ces recherches sont terminées par quelques considérations générales sur les moyens qu'il faudrait employer si, dans la détermination des fonctions elliptiques, on voulait obtenir plus de 14 décimales exactes; l'usage de la Table des logarithmes des sinus cesse d'avoir lieu à ce degré; celui de la Table des logarithmes des nombres peut, moyennant quelques artifices de calcul, être prolongé jusqu'à 20 ou 22 décimales, ainsi que nous le faisons voir dans le calcul des fonctions complètes $F'c$, $E'c$, pour le module $c = \sin 45^\circ$. Mais au-delà de ce nombre de décimales, il faut revenir aux calculs arithmétiques ordinaires, par lesquels seuls on peut obtenir un degré d'exactitude indéfini.

Paris, le 1^{er} Juin 1818.

§ VIII. *Formules pour exprimer les fonctions E et F en séries développées suivant les puissances de c^2 .*

138. Si l'on développe, suivant les puissances de c^2 , les valeurs de dE et de dF , savoir : $d\varphi(1 - c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ et $d\varphi(1 - c^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$, on aura immédiatement par l'intégration,

$$E = \varphi - \frac{1}{2} c^2 \int d\varphi \sin^2 \varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} c^4 \int d\varphi \sin^4 \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 \int d\varphi \sin^6 \varphi - \text{etc.},$$

$$F = \varphi + \frac{1}{2} c^2 \int d\varphi \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} c^4 \int d\varphi \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 \int d\varphi \sin^6 \varphi + \text{etc.};$$

donc si l'on fait pour abréger

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi = Z', \quad \int d\varphi \sin^4 \varphi = Z'', \quad \int d\varphi \sin^6 \varphi = Z''', \text{ etc.},$$

ces intégrales étant prises à compter de $\varphi = 0$, on aura

$$E = \varphi - \frac{1}{2} c^2 Z' - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} c^4 Z'' - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 Z''' - \text{etc.},$$

$$F = \varphi + \frac{1}{2} c^2 Z' + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} c^4 Z'' + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 Z''' + \text{etc.};$$

et comme les quantités Z' , Z'' , Z''' , etc., forment une suite décroissante, non-seulement pour toutes les valeurs de φ moindres que $\frac{1}{2}\pi$, mais encore pour la limite $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, où elles deviennent $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$, $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}$, $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}$, etc., il s'ensuit que les valeurs des fonctions E et F seront d'autant plus faciles à calculer, avec un certain degré d'approximation, par les séries précédentes, que le module c sera plus petit.

139. Pour l'usage de ces formules, il est nécessaire d'avoir une Table des fonctions Z' , Z'' , Z''' , etc., calculée au moins de degré en degré. La Table des fonctions Z' ou $Z'(\varphi)$ se déduit aisément des Tables connues, au moyen de la formule $Z'(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)$; cette Table se borne naturellement à la valeur $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; pour la continuer indéfiniment, on a les formules

$$Z'(\pi - \varphi) = \frac{1}{2}\pi - Z'(\varphi),$$

$$Z'(\pi + \varphi) = \frac{1}{2}\pi + Z'(\varphi).$$

Cor. $E + F = 2\varphi + \frac{c^2}{4} Z'' + \frac{c^6}{4} Z''' + \dots$

Quant aux fonctions $Z''\phi$ et $Z'''\phi$, elles se déduisent de la fonction Z' au moyen des formules

$$Z''(\phi) = Z'(\phi) - \frac{1}{8} Z'(2\phi),$$

$$Z'''(\phi) = Z''(\phi) - \frac{1}{16} [Z'(\phi) + Z'(2\phi) - \frac{1}{3} Z'(3\phi)];$$

mais on trouvera peut-être plus simple de mettre la valeur de Z''' sous cette forme

$$Z'''\phi = \frac{1}{6} [5Z''(\phi) - \cos \phi \sin^5 \phi];$$

c'est ainsi que nous avons calculé les deux Tables ci-jointes; l'une donne la fonction Z' exprimée avec dix décimales et trois ordres de différences; l'autre contient les fonctions Z'' et Z''' , exprimées avec neuf décimales seulement et leurs premières différences.

On voit que les différences de la fonction Z' devraient être prolongées jusqu'au cinquième ordre, pour que l'interpolation de la Table donnât dix décimales exactes; mais alors cette opération serait pénible, et il est plus simple de calculer directement la fonction Z' par la formule $Z'(\phi) = \frac{1}{4}(2\phi - \sin 2\phi)$. Pareil inconvénient se fait remarquer, à un plus haut degré encore, dans les deux autres fonctions; et quoique dans les applications, les valeurs rapidement décroissantes de c^2 , c^4 , c^6 , permettent de réduire progressivement le nombre des décimales dans les fonctions Z' , Z'' , Z''' , etc., cependant nous pensons qu'excepté les cas où la valeur de ϕ se trouve immédiatement dans la Table, on devra préférer les formules du § précédent, qui sont beaucoup plus commodes et presque aussi convergentes.

ϕ	$Z' = 3\phi$	Diff. I.	II.	III.	ϕ	Z'	Diff. I.	II.	III.
0°	0.00000 00000	17721	1 06299	1 06170	45°	0.14269 90817	887 89395	30 44010	5566
1	0.00000 17721	1 24030	2 12469	1 05910	46	0.15157 80212	918 33405	30 38444	9263
2	0.00001 41741	3 36489	3 18379	1 05524	47	0.16076 13617	948 71849	30 29181	12960
3	0.00004 78230	6 54868	4 23903	1 05006	48	0.17024 85466	979 01030	30 16221	16628
4	0.00011 33098	10 78771	5 28909	1 04361	49	0.18003 86496	1009 17251	29 99593	20288
5	0.00022 11869	16 07680	6 33270	1 03592	50	0.19013 03747	1039 16844	29 79305	23916
6	0.00038 19549	22 40950	7 36862	1 02692	51	0.20052 20591	1068 96149	29 55389	27515
7	0.00060 60499	29 77812	8 39554	1 01671	52	0.21121 16740	1098 51538	29 27874	31085
8	0.00090 38311	38 17366	9 41225	1 00521	53	0.22219 68278	1127 79412	28 96789	34612
9	0.00128 55677	47 58591	10 41746	99256	54	0.23347 47690	1156 76201	28 62177	38100
10	0.00176 14268	58 00337	11 41002	97862	55	0.24504 23891	1185 38378	28 24077	41541
11	0.00234 14605	69 41339	12 38864	96355	56	0.25689 62269	1213 62455	27 82536	44931
12	0.00303 55944	81 80203	13 35219	94729	57	0.26903 24724	1241 44991	27 37605	48265
13	0.00385 36147	95 15422	14 29948	92984	58	0.28144 69715	1268 82596	26 89340	51545
14	0.00480 51569	109 45370	15 22932	91131	59	0.29413 52311	1295 71936	26 37795	54754
15	0.00589 96939	124 68302	16 14063	89162	60	0.30709 24247	1322 09731	25 83041	57905
16	0.00714 65241	140 82365	17 03225	87090	61	0.32031 33978	1347 92772	25 25136	60980
17	0.00855 47606	157 85590	17 90315	84907	62	0.33379 26750	1373 17908	24 64156	63981
18	0.01013 33196	175 75905	18 75222	82622	63	0.34752 44658	1397 82064	24 00175	66907
19	0.01189 09101	194 51127	19 57844	80237	64	0.36150 26722	1421 82239	23 33268	69750
20	0.01383 60228	214 08971	20 38081	77755	65	0.37572 08961	1445 15507	22 63518	72505
21	0.01597 69199	234 47052	21 15836	75176	66	0.39017 24468	1467 79025	21 91013	75179
22	0.01832 16251	255 62888	21 91012	72506	67	0.40485 03493	1489 70038	21 15834	77751
23	0.02087 79139	277 53900	22 63518	69751	68	0.41974 73531	1510 85872	20 38083	80240
24	0.02365 33039	300 17418	23 33269	66904	69	0.43485 59403	1531 23955	19 57843	82621
25	0.02665 50457	323 50687	24 00173	63984	70	0.45016 83358	1550 81798	18 75222	84907
26	0.02989 01144	347 50860	24 64157	60980	71	0.46567 65156	1569 57020	17 90315	87089
27	0.03336 52004	372 15017	25 25137	57903	72	0.48137 22176	1587 47335	17 03226	89164
28	0.03708 67021	397 40154	25 83040	54755	73	0.49724 69511	1604 50561	16 14062	91129
29	0.04106 07175	423 23194	26 37795	51545	74	0.51329 20072	1620 64623	15 22933	92987
30	0.04529 30369	449 60989	26 89540	48266	75	0.52949 84695	1635 87556	14 29946	94726
31	0.04978 91358	476 50329	27 37606	44929	76	0.54585 72251	1650 17502	13 35220	96355
32	0.05455 41687	503 87935	27 82535	41542	77	0.56235 89753	1663 52722	12 38865	97864
33	0.05959 29622	531 70470	28 24077	38100	78	0.57899 42475	1675 91587	11 41001	99254
34	0.06491 00092	559 94547	28 62177	34612	79	0.59575 34062	1687 32588	10 41747	1 00523
35	0.07050 94639	588 56724	28 96789	31085	80	0.61262 66650	1697 74335	9 41224	1 01670
36	0.07639 51363	617 53513	29 27874	27516	81	0.62960 40985	1707 15559	8 39554	1 02693
37	0.08257 04876	646 81387	29 55390	23914	82	0.64667 56544	1715 55113	7 36861	1 03589
38	0.08903 86263	676 36777	29 79304	20289	83	0.66383 11657	1722 91974	6 33272	1 04364
39	0.09580 23040	706 16081	29 99593	16629	84	0.68106 03631	1729 25246	5 28908	1 05005
40	0.10286 39121	736 15674	30 16222	12957	85	0.69835 28877	1734 54154	4 23903	1 05524
41	0.11022 54795	766 31896	30 29179	9267	86	0.71569 83031	1738 78057	3 18379	1 05909
42	0.11788 86691	796 61075	30 38446	5563	87	0.73308 61088	1741 96436	2 12470	1 06172
43	0.12585 47766	826 99521	30 44009	1856	88	0.75050 57524	1744 c8906	1 06298	1 06298
44	0.13412 47287	857 43530	30 45865	— 1855	89	0.76794 66430	1745 15204	c	1 06298
45	0.14269 90817	887 89395	30 44010	5566	90	0.78539 81634	1745 15204	— 1 06298	

ϕ	$Z'' = \phi$	Diff. I.	$Z'' = \phi$	Diff. I.	ϕ	Z''	Diff. I.	Z''	Diff. I.
0°	0.00000 0000	0	0.00000 0000	0	45°	0.04452 4311	451 7388	0.01627 0259	229 8562
1	0.00000 0000	10	0.00000 0000	0	46	0.04904 1699	483 2410	0.01856 8821	254 3119
2	0.00000 0010	69	0.00000 0000	0	47	0.05387 4109	515 7442	0.02111 1940	280 3937
3	0.00000 0079	252	0.00000 0000	1	48	0.05903 1551	549 2015	0.02391 5877	308 1135
4	0.00000 0331	678	0.00000 0001	5	49	0.06452 3566	583 5601	0.02699 7012	337 4721
5	0.00000 1009	1497	0.00000 0006	14	50	0.07035 9167	618 7632	0.03037 1733	368 4623
6	0.00000 2506	2899	0.00000 0020	37	51	0.07654 6799	654 7487	0.03405 6356	401 0653
7	0.00000 5405	5111	0.00000 0057	89	52	0.08309 4286	691 4502	0.03806 7009	435 2528
8	0.00001 0516	8387	0.00000 0146	185	53	0.09000 8788	728 7967	0.04241 9537	470 9851
9	0.00001 8903	13021	0.00000 0331	357	54	0.09729 6755	766 7135	0.04712 9388	508 2116
10	0.00003 1924	19333	0.00000 0688	646	55	0.10496 3890	805 1215	0.05221 1504	546 8708
11	0.00005 1257	27674	0.00000 1334	1106	56	0.11301 5105	843 9382	0.05768 0212	586 8894
12	0.00007 8931	38419	0.00000 2440	1808	57	0.12145 4487	883 0778	0.06354 9106	628 1836
13	0.00011 7350	51969	0.00000 4248	2844	58	0.13028 5265	922 4510	0.06983 0942	670 6580
14	0.00016 9319	68745	0.00000 7092	4324	59	0.13950 9775	961 9662	0.07653 7522	714 2068
15	0.00023 8064	89189	0.00001 1416	6388	60	0.14912 9437	1001 5291	0.08367 9590	758 7136
16	0.00032 7253	113756	0.00001 7804	9200	61	0.15914 4728	1041 0435	0.09126 6726	804 0519
17	0.00044 1009	142919	0.00002 7004	12953	62	0.16955 5163	1080 4108	0.09930 7245	850 0856
18	0.00058 3928	177154	0.00003 9957	17872	63	0.18035 9271	1119 5320	0.10780 8101	896 6599
19	0.00076 1082	216952	0.00005 7829	24218	64	0.19155 4591	1158 3061	0.11677 4700	943 6608
20	0.00097 8034	262802	0.00008 2047	32283	65	0.20313 7652	1196 6322	0.12621 1308	990 8686
21	0.00124 0836	315198	0.00011 4330	42400	66	0.21510 3974	1234 4087	0.13611 9994	1038 1552
22	0.00155 6034	374627	0.00015 6730	54934	67	0.22744 8061	1271 5342	0.14650 1546	1085 3373
23	0.00193 0661	441575	0.00021 1664	70294	68	0.24016 3403	1307 9080	0.15735 4919	1132 2371
24	0.00237 2236	516513	0.00028 1958	88920	69	0.25324 2483	1343 4301	0.16867 7290	1178 6726
25	0.00288 8749	599906	0.00037 0878	111295	70	0.26667 6784	1378 0019	0.18046 4016	1224 4592
26	0.00348 8655	692199	0.00048 2173	137935	71	0.28045 6803	1411 5266	0.19270 8608	1269 4112
27	0.00418 0854	793820	0.00062 0108	169390	72	0.29457 2069	1443 9092	0.20540 2720	1313 3417
28	0.00497 4674	905172	0.00078 9498	206245	73	0.30901 1161	1475 0576	0.21853 6137	1356 0652
29	0.00587 9846	1026638	0.00099 5743	249111	74	0.32376 1737	1504 8821	0.23209 6789	1397 3980
30	0.00690 6484	1158567	0.00124 4854	298630	75	0.33881 0558	1533 2964	0.24607 0769	1437 1593
31	0.00806 5051	1301284	0.00154 3484	35464	76	0.35414 3522	1560 2177	0.26044 2362	1475 1729
32	0.00936 6335	1455071	0.00189 8948	420291	77	0.36974 5699	1585 5671	0.27519 4091	1511 2681
33	0.01082 1406	1620184	0.00231 9239	493809	78	0.38560 1370	1609 2699	0.29030 6772	1545 2807
34	0.01244 1590	1796832	0.00281 3048	576717	79	0.40169 4069	1631 2558	0.30575 9579	1577 0545
35	0.01423 8422	1885187	0.00338 9765	669720	80	0.41800 6627	1651 4596	0.32153 0124	1606 4421
36	0.01622 3609	2185378	0.00405 9485	773521	81	0.43452 1223	1669 8206	0.33759 4545	1633 3059
37	0.01840 8987	2397486	0.00483 3006	888807	82	0.45121 9429	1686 2840	0.35392 7604	1657 5191
38	0.02080 6473	2621550	0.00572 1813	1016256	83	0.46808 2269	1700 8003	0.37050 2795	1678 9670
39	0.02342 8023	2857556	0.00673 8069	1156514	84	0.48509 0272	1713 3253	0.38729 2465	1697 5465
40	0.02628 5579	3105444	0.00789 4583	1310199	85	0.50222 3525	1723 8216	0.40426 7930	1713 1690
41	0.02939 1023	3365101	0.00920 4782	1477893	86	0.51946 1741	1732 2571	0.42139 9620	1725 7588
42	0.03275 6124	3636365	0.01068 2675	1660127	87	0.53678 4312	1738 6063	0.43865 7208	1735 2550
43	0.03639 2489	3919021	0.01234 2802	1857382	88	0.55417 0375	1742 8499	0.45600 9758	1741 6117
44	0.04031 1510	4212801	0.01420 0184	2070075	89	0.57153 8874	1744 9749	0.47342 5875	1744 7977
45	0.04452 4311	4517388	0.01627 0259	2298562	90	0.58904 8623		0.49087 3852	

§ IX. *Intégrale complète des équations différentielles du second ordre, auxquelles satisfont les fonctions F et E, (art. 45, 1. p.)* 65.

140. Il s'agit d'intégrer complètement les deux équations différentielles du second ordre

$$(1 - c^2) \frac{d^2 y}{dc^2} + \frac{1 - c^2}{c} \cdot \frac{dy}{dc} - y - \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta} = 0 \dots (1),$$

$$(1 - c^2) \frac{d^2 z}{dc^2} + \frac{1 - 3c^2}{c} \cdot \frac{dz}{dc} - z + \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta^3} = 0 \dots (2),$$

dans lesquelles $\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \phi)}$; ϕ étant constant, et c étant la variable par laquelle il faut exprimer les fonctions y et z .

× Puisque nous savons d'avance qu'on satisfait à ces équations, en faisant $y = E(c, \phi)$, $z = F(c, \phi)$, ou simplement $y = E$, $z = F$, nous pourrions faire disparaître le dernier terme de chaque équation, en faisant $y = E + Y$, $z = F + Z$, et nous aurons, pour déterminer Y et Z , les deux équations

$$(1 - c^2) \frac{d^2 Y}{dc^2} + \frac{1 - c^2}{c} \cdot \frac{dY}{dc} + Y = 0 \dots (3),$$

$$(1 - c^2) \frac{d^2 Z}{dc^2} + \frac{1 - 3c^2}{c} \cdot \frac{dZ}{dc} - Z = 0 \dots (4),$$

équations entièrement semblables à celles qui déterminent les fonctions complètes $E^1 c$, $F^1 c$.

$\frac{1}{b^3} du$ Comme on a en général $\frac{du}{dc} = -\frac{c}{b} \cdot \frac{du}{db}$, $\frac{d^2 u}{dc^2} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{d^2 u}{db^2} - \frac{1}{b^3} \cdot \frac{du}{db}$, ces équations différentielles, rapportées immédiatement à la variable b , prendront la forme suivante,

$$(1 - b^2) \frac{d^2 Y}{db^2} - \left(\frac{1 + b^2}{b} \right) \frac{dY}{db} + Y = 0 \dots (5),$$

$$(1 - b^2) \frac{d^2 Z}{db^2} + \frac{1 - 3b^2}{b} \cdot \frac{dZ}{db} - Z = 0 \dots (6).$$

Les fonctions $E^1 c$, $F^1 c$, ne sont que des valeurs particulières de Y et Z ; mais nous allons faire voir qu'au moyen de ces valeurs particulières, on peut trouver les intégrales complètes des équations (3) et (4), contenant chacune deux constantes arbitraires.

141. Puisque l'équation (6) est absolument de même forme que l'équation (4), il s'ensuit que si la fonction $\psi(c)$ est une valeur particulière de Z dans l'équation (4), la fonction $\psi(b)$ sera pareillement une valeur particulière de Z dans l'équation (6); et comme ces deux équations se réduisent à une seule, il s'ensuit que de la valeur particulière $Z = \psi(c)$, on déduira l'intégrale complète de l'équation (4), savoir :

$$Z = m\psi(c) + n\psi(b) \dots (7),$$

m et n étant les deux constantes arbitraires.

La valeur $Z = \psi(c)$ devra satisfaire à l'équation

$$(1 - c^2)\psi'' + \frac{1-3c^2}{c}\psi' - \psi = 0 \dots (8),$$

dans laquelle on suppose $\psi' = \frac{d\psi}{dc}$, $\psi'' = \frac{d^2\psi}{dc^2}$; soit donc

$$\psi = A + A'c^2 + A''c^4 + A'''c^6 + \text{etc.},$$

et en faisant la substitution, on trouvera

$$A' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A, \quad A'' = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A', \quad A''' = \left(\frac{5}{6}\right)^2 A'', \text{ etc.},$$

par conséquent

$$\psi(c) = A \left(1 + \frac{1^2}{2^2} c^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} c^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} c^6 + \text{etc.} \right).$$

Cette valeur, en faisant $A = \frac{1}{2}\pi$, est en effet celle de la fonction complète $F'c$; ainsi de cette fonction complète supposée connue, on déduit très simplement l'intégrale complète de l'équation (4) ou celle de l'équation (6) qui lui est équivalente.

142. Il ne paraît pas aussi facile de trouver l'intégrale complète de l'équation (3) qui n'est pas semblable à sa transformée (5); cependant on y parvient par les considérations suivantes.

Puisque dans le cas particulier où l'on a à la fois $Y = E'c$, $Z = F'c$, ces deux quantités sont liées entr'elles par l'équation

$$Y = b^2 Z + b^2 c \cdot \frac{dZ}{dc},$$

il est évident d'abord que $\psi(c)$ étant la même fonction qui a été développée dans l'article précédent, la supposition de $Z = \psi(c)$, ou

ou simplement $Z = \psi$, donnera exactement

$$Y = b^2 \psi + b^2 c \psi',$$

valeur qui devra satisfaire à l'équation (3).

Essayons maintenant si en faisant $Z = \psi(b)$, la valeur qui en résulte pour Y , savoir :

$$Y = b^2 \psi(b) + b^2 c \frac{d\psi(b)}{dc} = b^2 \psi(b) - bc^2 \cdot \frac{d\psi(b)}{db},$$

satisfera également à l'équation (5). Si cela est, nous connaissons deux valeurs particulières de Y , et de là l'intégrale complète de l'équation différentielle (3).

Or en regardant ψ comme fonction de b , et faisant à l'ordinaire $\frac{d\psi}{db} = \psi'$, $\frac{d^2\psi}{db^2} = \psi''$, la valeur $Y = b^2 \psi - bc^2 \psi'$, donnera d'abord

$$\frac{dY}{db} = -bc^2 \psi'' - (1 - 4b^2) \psi' + 2b \psi;$$

mais si l'on change c en b dans l'équation (8), on aura

$$c^2 \psi'' = - \left(\frac{1 - 3b^2}{b} \right) \psi' + \psi;$$

donc

$$\frac{dY}{db} = b^2 \psi' + b \psi;$$

différenciant de nouveau, on a

$$\frac{d^2Y}{db^2} = b^2 \psi'' + 3b \psi' + \psi;$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (5), on trouve

$$c^2 b^2 \psi'' + b(1 - 3b^2) \psi' - b^2 \psi = 0,$$

équation qui s'accorde avec les précédentes. Donc en effet l'équation (5) est satisfaite par la valeur $Y = b^2 \psi - bc^2 \psi'$.

143. Connaissant ainsi deux valeurs particulières qui satisfont à l'équation (3) et à l'équation (5) qui lui est équivalente, on aura l'intégrale complète de l'une et l'autre équation, savoir :

$$Y = m' \left[b^2 \psi(c) + b^2 c \cdot \frac{d\psi(c)}{dc} \right] + n' \left[b^2 \psi(b) - bc^2 \cdot \frac{d\psi(b)}{db} \right] \dots (9),$$

m' et n' étant deux constantes arbitraires.

Si l'on substitue à $\downarrow(c)$, la fonction $F'c$ qui lui est proportionnelle, l'intégrale (7) pourra s'exprimer ainsi

$$Z = mF'c + nF'b,$$

de même l'intégrale (9) deviendra

$$Y = m' \left(b^2 F'c + b^2 c \cdot \frac{dF'c}{dc} \right) + n' \left(b^2 F'b - bc^2 \cdot \frac{dF'b}{db} \right);$$

mais on a $\frac{dF'c}{dc} = \frac{1}{b^2 c} (E'c - b^2 F'c)$, $\frac{dF'b}{db} = \frac{1}{bc^2} (E'b - c^2 F'b)$; donc l'intégrale complète de l'équation (3) sera

$$Y = m'E'c + n'(F'b - E'b);$$

de là on déduit les intégrales complètes des équations proposées (1) et (2), savoir :

$$\begin{cases} y = E(c, \varphi) + m'E'c + n'(F'b - E'b), \\ z = F(c, \varphi) + mF'c + nF'b. \end{cases}$$

§ X. Développement des quantités $\frac{\sin^m \omega}{\cos^n \omega}$, $\frac{\cos^m \omega}{\sin^n \omega}$, suivant les puissances de l'arc ω , les nombres m et n étant entiers.

144. Dans l'article 160 de la quatrième partie, nous avons donné quatre formules très-remarquables pour développer, suivant les puissances de l'arc ω , les quantités $\tan \omega$, $\cot \omega$, $\frac{1}{\sin \omega}$, $\log \sin \omega$. Ces séries sont formées suivant une loi très-simple, au moyen des coefficients H_1, H_2, H_3 , etc., qui remplacent avec avantage les nombres Bernoulliens, et qui se calculent aisément, soit par la loi des suites récurrentes, soit par l'équation $S_n = H_n \pi^{2n}$.

On a vu ensuite dans l'article 162, que le développement de $\frac{1}{\cos \omega}$ dépend d'une autre suite de coefficients K_1, K_2, K_3 , etc., qui se forment par la loi des suites récurrentes.

Nous nous proposons maintenant de faire voir qu'avec ces deux suites de coefficients, on peut développer très-simplement toutes les quantités comprises dans l'une des formes $\frac{\sin^m \omega}{\cos^n \omega}$, $\frac{\cos^m \omega}{\sin^n \omega}$, m et n étant

des nombres entiers positifs. La quantité $\frac{1}{\sin^m \omega \cos^n \omega}$ se décompose toujours en plusieurs termes de cette forme, par l'application répétée de la formule $\frac{1}{\sin^2 \omega \cos^2 \omega} = \frac{1}{\sin^2 \omega} + \frac{1}{\cos^2 \omega}$; elle est donc susceptible d'un semblable développement. A l'égard du simple produit $\sin^m \omega \cos^n \omega$, il peut se transformer en un nombre fini de termes de la forme $A \sin k\omega$ ou $A \cos k\omega$, dont le développement est connu et ne dépend point des coefficients H et K .

145. On connaît les premières valeurs H_1, H_2, H_3 , etc., par la formule $H_n = S_{2n} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2n}$, et par la Table de l'art. 73, IV. P.; lorsque n surpassera 15, on pourra négliger les termes de l'ordre $\frac{1}{3^{2n}}$, et on aura plus simplement $H_n = \frac{1}{\pi^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\right)$, et $\log H_n = -2n \log \pi + \frac{m}{2^{2n}}$, m étant le nombre 0,43429448, etc.

A l'égard des coefficients K_n , leurs premières valeurs sont

$$K_1 = \frac{1}{2}, K_2 = \frac{5}{24}, K_3 = \frac{61}{720}, K_4 = \frac{277}{8064}, K_5 = \frac{50521}{3628800},$$

$$K_6 = \frac{540553}{95800320}, \text{ etc.}$$

On peut continuer de former ces coefficients par la loi des suites récurrentes, jusqu'à K_9 inclusivement; les suivans, jusqu'à K_{14} , se formeront plus aisément par la formule

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} K_n = 2 - \frac{2}{3^{2n+1}} + \frac{2}{5^{2n+1}} - \frac{2}{7^{2n+1}} + \text{etc.},$$

dont quatre termes, ensuite trois, et deux seulement, donneront $\log K_n$ exact, jusqu'à la quatorzième décimale. Passé K_{14} , il suffira de faire $K_n = 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}$. C'est ainsi que nous avons construit la Table suivante pour trouver, aussi loin qu'on voudra et avec l'exactitude de 14 décimales au moins, les logarithmes des coefficients K_n ; nous y joignons en même temps ceux des coefficients H_n , calculés avec 15 décimales.

n	$\log H_n$	$\log K_n$
1	9,22184 87496 16356	9,69897 00043 3602
2	8,04575 74905 60675	9,31875 87626 2441
3	7,02456 81914 90737	8,92799 73385 7950
4	6,02456 81914 90737	8,53592 92499 6300
5	5,02893 29968 93187	8,14370 89054 0759
6	4,03430 83885 54592	7,75147 13222 2278
7	3,03992 83811 94650	7,35923 18099 5914
8	2,04560 86738 44077	6,96699 20827 8903
9	1,05130 39493 31827	6,57475 23317 1744
10	0,05700 29604 17573	6,18251 25779 8926
11	9,06270 29042 86780	5,79027 28239 2433
12	8,06840 30812 28294	5,39803 30698 6351
13	7,07410 33164 24183	5,00579 33158 0315
14	6,07980 35661 82144	4,61355 35617 4284
15	5,08550 38195 80455	4,22131 38076 8254
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$\frac{m}{2^{2n}} - 2n \log \pi$	$\log 2 - (2n+1) \log \frac{\pi}{2}$

146. La quatrième des équations (d) (n° 160, quatrième Partie), donne le développement de $\log \sin \omega$, comme il suit

$$\log \sin \omega = \log \omega - H_1 \omega^2 - \frac{1}{2} H_2 \omega^4 - \frac{1}{3} H_3 \omega^6 - \text{etc.};$$

pour avoir un développement semblable de $\log \cos \omega$, je fais

$$\log \cos \omega = -N_1 \omega^2 - N_2 \omega^4 - N_3 \omega^6 - \text{etc.};$$

j'en tire par la différenciation

$$\tan \omega = 2N_1 \omega + 4N_2 \omega^3 + 6N_3 \omega^5 + \text{etc.}$$

Mais par la seconde des équations (d), on a

$$\frac{1}{2} \tan \omega = (2^2 - 1)H_1 \omega + (2^4 - 1)H_2 \omega^3 + (2^6 - 1)H_3 \omega^5 + \text{etc.};$$

donc la série des coefficients N_1, N_2, N_3 , etc., se déduit de la série connue H_1, H_2, H_3 , etc., suivant cette loi

$$N_1 = (2^2 - 1)H_1, \quad N_2 = (2^4 - 1)\frac{H_2}{2}, \quad N_3 = (2^6 - 1)\frac{H_3}{3}, \quad \text{etc.},$$

de sorte qu'on a

$$\log \cos \omega = -(2^2 - 1)H_1\omega^2 - (2^4 - 1)\frac{H_2}{2}\omega^4 - (2^6 - 1)\frac{H_3}{3}\omega^6 - \text{etc.};$$

c'est une cinquième formule à ajouter aux formules (d) : elle se déduirait également de l'équation $\sin 2\omega = 2\sin \omega \cos \omega$.

147. Réciproquement si $l \cos \omega$ est donné par la formule

$$l \cos \omega = -N_1\omega^2 - N_2\omega^4 - N_3\omega^6 - \text{etc.},$$

on en déduira immédiatement

$$l \sin \omega = \log \omega - \frac{N_1}{3}\omega^3 - \frac{N_2}{15}\omega^5 - \frac{N_3}{63}\omega^7 - \frac{N_4}{255}\omega^9 - \text{etc.},$$

l'expression générale des diviseurs 3, 15, 63, 255, etc., étant $2^{2n} - 1$.

Ces formules sont utiles pour calculer avec un degré d'approximation déterminé, les logarithmes des sinus et cosinus d'un petit arc ω . Ainsi en supposant que l'arc ω ne surpasse pas 5° , et qu'on n'ait pas besoin de plus de 14 décimales, on aura en logarithmes vulgaires

$$\log N_1 = 9,33675 \ 43156 \ 37$$

$$\log N_2 = 8,55860 \ 30653$$

$$\log N_3 = 7,98457 \ 180$$

$$\log N_4 = 7,46683 \ 3,$$

et par ces coefficients, on connaîtra à la fois $l \sin \omega$ et $l \cos \omega$, d'où l'on déduira $\log \tan \omega$. On a aussi directement

$$l \tan \omega = \log \omega + (2^2 - 2)H_1\omega^2 + (2^4 - 2)\frac{H_2}{2}\omega^4 + (2^6 - 2)\frac{H_3}{3}\omega^6 + \text{etc.}$$

148. La première des équations (d) donnera par des différenciations successives

$$\frac{1}{\sin^2 \omega} = \frac{1}{\omega^2} - 2H_1 - 6H_2\omega^2 - 10H_3\omega^4 - 14H_4\omega^6 - \text{etc.},$$

$$\frac{\cos \omega}{\sin^3 \omega} = \frac{1}{\omega^3} + 2.3 H_1\omega + 4.5 H_2\omega^3 + 6.7 H_3\omega^5 + \text{etc.},$$

$$\frac{3}{\sin^1 \omega} = \frac{3}{\omega^1} + \frac{2}{\omega^2} + 1.2.3H_1 + 3.4.5H_3\omega^2 + 5.6.7H_5\omega^4 + \text{etc.}$$

$$- 4H_1 - 12H_3\omega^2 - 20H_5\omega^4 - \text{etc.};$$

continuant ainsi, on aura en général le développement des quantités de la forme $\frac{1}{\sin^{2k} \omega}$, $\frac{\cos \omega}{\sin^{2k+1} \omega}$, de manière qu'on pourra assigner un terme quelconque du développement en fonction des coefficients H_n . C'est ainsi que dans le développement de $\frac{1}{\sin^1 \omega}$, un terme quelconque $P\omega^{2n}$, aura pour coefficient

$$P = \frac{1}{3}(2n+1)(2n+2)(2n+3)H_{n+1} - \frac{4}{3}(2n+1)H_{n+1}.$$

De même par les différences successives de la seconde des équations (d), on aura le développement des quantités $\frac{1}{\cos^{2k} \omega}$, $\frac{\sin \omega}{\cos^{2k+1} \omega}$;

Et par les différences successives de la troisième des équations (d), on aura le développement des quantités $\frac{1}{\sin^{2k+1} \omega}$, $\frac{\cos \omega}{\sin^{2k} \omega}$.

Tous ces développemens se font par les seuls coefficients H_1, H_2, H_3 , etc., et un terme quelconque de la série peut s'exprimer généralement par un nombre déterminé de coefficients H_n .

149. Si à ces diverses formules on joint celles qui résultent des différences successives de la formule

$$\frac{1}{\cos \omega} = 1 + K_1\omega^2 + K_2\omega^4 + K_3\omega^6 + \text{etc.},$$

et qui en général feront connaître le développement des quantités $\frac{1}{\cos^{2k+1} \omega}$, $\frac{\sin \omega}{\cos^{2k} \omega}$; tous les cas que peuvent présenter les quatre fonctions $\frac{1}{\sin^n \omega}$, $\frac{1}{\cos^n \omega}$, $\frac{\cos \omega}{\sin^n \omega}$, $\frac{\sin \omega}{\cos^n \omega}$, n étant un nombre entier quelconque, seront compris dans ces formules; et comme les deux fonctions proposées $\frac{\sin^m \omega}{\cos^n \omega}$, $\frac{\cos^m \omega}{\sin^n \omega}$, auxquelles on peut joindre la troisième $\frac{1}{\sin^m \omega \cos^n \omega}$, peuvent toujours se décomposer en un certain nombre de termes compris dans les quatre fonctions précédentes, il s'ensuit que le développement de ces quantités sera toujours tel, qu'on

peut assigner un terme quelconque de ce développement par les coefficients H_n et K_n .

150. Soit par exemple la quantité proposée $\frac{1}{\sin^2 \omega \cos^3 \omega}$; il faut lui donner d'abord la forme $\frac{1}{\cos^3 \omega} + \frac{1}{\sin^2 \omega \cos \omega}$, ensuite $\frac{1}{\cos^3 \omega} + \frac{1}{\cos \omega} + \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega}$, et on appliquera les formules

$$\frac{1}{\cos \omega} = 1 + K_1 \omega^2 + K_2 \omega^4 + K_3 \omega^6 + \text{etc.},$$

$$\frac{2}{\cos^3 \omega} = \left\{ \begin{array}{l} 2K_1 + 3.4K_2 \omega^2 + 5.6K_3 \omega^4 + 7.8K_4 \omega^6 + \text{etc.}, \\ + 1 + K_1 \omega^2 + K_2 \omega^4 + K_3 \omega^6 + \text{etc.}, \end{array} \right.$$

$$\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} = \frac{1}{\omega^2} - (2-1)H_1 - \left(\frac{2^3-1}{2^2}\right)3H_2 \omega^2 - \left(\frac{2^5-1}{2^4}\right)5H_3 \omega^4 - \text{etc.},$$

d'où il suit qu'en représentant par $P_n \omega^{2n}$, le terme général du développement de $\frac{1}{\sin^2 \omega \cos^3 \omega}$, on aura

$$P_n = \frac{3}{2} K_n + \frac{2n+1.2n+2}{2} K_{n+1} - \left(\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n}}\right)(2n+1)H_{n+1}.$$

Lorsque n sera devenu assez grand pour qu'on puisse négliger $\frac{1}{2^{2n}}$, relativement à l'unité, on aura simplement $H_n = \frac{1}{\pi^{2n}}$, $K_n = \frac{2^{2n+2}}{\pi^{2n+1}}$, ce qui donne

$$P_n = 5 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} + (2n+1)(2n+2) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+3} - (2n+1) \cdot \frac{2}{\pi^{2n+2}},$$

formule qui pourra même se réduire aux deux premiers termes.

151. Connaissant ainsi le terme général du développement d'un grand nombre de fonctions, lequel, dans son expression, ne contiendra jamais qu'un certain nombre de termes affectés des coefficients K_n , H_n , il ne sera pas inutile, pour compléter ce point d'analyse, de donner ici l'expression générale de ces deux coefficients.

Pour avoir d'abord l'expression générale du coefficient K_n , soit

$$r = 1 - \cos \omega = \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{2.3.4} \omega^4 + \frac{1}{2.3.4.5.6} \omega^6 - \text{etc.}; \text{ on aura}$$

$$\frac{1}{\cos \omega} = \frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \text{etc.}$$

Or, 1°. dans le développement de r , le coefficient de ω^{2n} est $\frac{(-1)^{n+1}}{1.2.3\dots 2n}$, ou $\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(2n+1)}$;

2°. Puisqu'on a $r^2 = \frac{1}{2}(3 - 4\cos\omega + \cos 2\omega)$, le coefficient de ω^{2n} dans r^2 est

$$\frac{(-1)^n}{2\Gamma(2n+1)} (2^{2n} - 4);$$

3°. Puisqu'on a $r^3 = \frac{1}{4}(10 - 15\cos\omega + 6\cos 2\omega - \cos 3\omega)$, le coefficient de ω^{2n} dans r^3 est

$$\frac{(-1)^{n+1}}{4\Gamma(2n+1)} (3^{2n} - 6 \cdot 2^{2n} + 15);$$

continuant ainsi et rassemblant tous les résultats dont la loi est manifeste, on aura le terme général cherché, savoir :

$$\begin{aligned} K_n = & \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(2n+1)} \left[1 - \frac{1}{2} (2^{2n} - 4) + \frac{1}{4} (3^{2n} - 6 \cdot 2^{2n} + \frac{6 \cdot 5}{2}) \right. \\ & - \frac{1}{8} (4^{2n} - 8 \cdot 3^{2n} + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2^{2n} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3}) \\ & + \frac{1}{16} (5^{2n} - 10 \cdot 4^{2n} + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 3^{2n} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot 2^{2n} \\ & \left. + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4}) - \text{etc.} \right]. \end{aligned}$$

152. Pour avoir semblablement l'expression générale de H_n , nous la déduirons du développement de $\frac{\sin \omega}{\cos \omega}$, dont un terme quelconque, suivant la seconde des équations (d), est $(2^{2n} - 1) 2H_n \omega^{2n-1}$.

Et puisqu'on a $\frac{1}{\cos \omega} = 1 + r + r^2 + \text{etc.}$, le développement de $\frac{\sin \omega}{\cos \omega}$ sera donné par celui des différens termes de la série.....
 $\sin \omega + r \sin \omega + r^2 \sin \omega + r^3 \sin \omega + \text{etc.}$

Or 1°. dans le développement de $\sin \omega$, le coefficient de ω^{2n-1} est $\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(2n)}$;

2°. Puisqu'on a $r \sin \omega = \frac{1}{2}(2\sin \omega - \sin 2\omega)$, le coefficient de ω^{2n-1} dans $r \sin \omega$, sera

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2\Gamma(2n)} (2 - 2^{2n-1});$$

3°. Puisqu'on a $r^2 \sin \omega = \frac{1}{4} \left[\frac{4 \cdot 3}{2} \sin \omega - 4 \sin 2\omega + (\sin 3\omega - \sin \omega) \right]$,

le coefficient de ω^{2n-1} dans $r^2 \sin \omega$, sera

$$\frac{(-1)^{n+1}}{4\Gamma(2n)} \left[\frac{4 \cdot 3}{2} - 4 \cdot 2^{2n-1} + (3^{2n+1} - 1) \right];$$

$$4^\circ. \text{ De ce que } r^3 \sin \omega = \frac{1}{8} \left\{ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} \sin \omega - \frac{6 \cdot 5}{2} \sin 2\omega + 6(\sin 3\omega - \sin \omega) \right. \\ \left. - (\sin 4\omega - \sin 2\omega) \right\},$$

il s'ensuit que le coefficient de ω^{2n-1} dans cette quantité sera

$$\frac{(-1)^{n+1}}{8\Gamma(2n)} \left[\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} - \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2^{2n-1} + 6(3^{2n-1} - 1) - (4^{2n-1} - 2^{2n-1}) \right].$$

La loi de toutes ces quantités est facile à saisir, elle dépend de l'expression générale de $r^k \sin \omega$, ou $(1 - \cos \omega)^k \sin \omega$, en sinus des multiples de l'arc ω ; et la somme de tous les coefficients étant égale à $(2^{2n} - 1)2H_n$, on en tire

$$H_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2^{2n} - 1)\Gamma(2n)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (2^{2n} - 2) \right. \\ + \frac{1}{4} (3^{2n-1} - 1 - 4 \cdot 2^{2n-1} + \frac{4 \cdot 3}{2}) \\ - \frac{1}{8} \left[4^{2n-1} - 2^{2n-1} - 6(3^{2n-1} - 1) + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2^{2n-1} - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} \right] \\ + \frac{1}{6} \left[5^{2n-1} - 3^{2n-1} - 8(4^{2n-1} - 2^{2n-1}) + \frac{8 \cdot 7}{2} (3^{2n-1} - 1) \right. \\ \left. \left. - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot 2^{2n-1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right] - \text{etc.} \right\}.$$

Dans les applications, on devra calculer autant de lignes horizontales de la formule, qu'il y a d'unités dans n ; toutes les autres seront nulles.

153. D'autres manières de développer les mêmes fonctions produiraient des résultats d'une autre forme pour l'expression générale des coefficients K_n , H_n . Nous avons trouvé, par exemple,

$$l \cos \omega = -(2^2 - 1) H_1 \omega^2 - (2^4 - 1) \frac{H_2}{2} \omega^4 - (2^6 - 1) \frac{H_3}{3} \omega^6 - \text{etc.};$$

d'un autre côté,

$$l \cos \omega = \frac{1}{2} l (1 - \sin^2 \omega) = -\frac{1}{2} \sin^2 \omega - \frac{1}{4} \sin^4 \omega - \frac{1}{6} \sin^6 \omega - \text{etc.},$$

l'expression générale du coefficient H_n , se trouvera donc par celle du coefficient de ω^{2n} dans la suite $\frac{1}{2} \sin^2 \omega + \frac{1}{4} \sin^4 \omega + \frac{1}{6} \sin^6 \omega + \text{etc.}$

Or, 1°. puisque

$$\frac{1}{2} \sin^2 \omega = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\omega) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 \omega^2 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} 2^4 \omega^4 + \text{etc.} \right),$$

le coefficient de ω^{2n} dans le développement de $\frac{1}{2} \sin^2 \omega$, sera

$$\frac{1}{2^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(2n+1)} \cdot 2^{2n};$$

2°. Puisque $\frac{1}{4} \sin^4 \omega = \frac{1}{2 \cdot 2^4} (3 - 4 \cos 2\omega + \cos 4\omega)$, le coefficient de ω^{2n} dans le développement de cette quantité, sera

$$\frac{1}{2^4 \cdot 2} \cdot \frac{(-1)^n}{\Gamma(2n+1)} (4^{2n} - 4 \cdot 2^{2n});$$

3°. Puisque $\frac{1}{6} \sin^6 \omega = \frac{1}{3 \cdot 2^6} (10 - 15 \cos 2\omega + 6 \cos 4\omega - \cos 6\omega)$, le coefficient de ω^{2n} dans le développement de cette quantité, sera

$$\frac{1}{2^6 \cdot 3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(2n+1)} \left(6^{2n} - 6 \cdot 4^{2n} + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2^{2n} \right).$$

Ces expressions suivent une loi très-simple, et il en résulte immédiatement la valeur du coefficient H_n , savoir :

$$\begin{aligned} H_n = \frac{n(-1)^{n+1}}{(2^{2n}-1) \cdot 4\Gamma(2n+1)} & \left[2^{2n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} (4^{2n} - 4 \cdot 2^{2n}) \right. \\ & + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} \left(6^{2n} - 6 \cdot 4^{2n} + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2^{2n} \right) \\ & - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^6} \left(8^{2n} - 8 \cdot 6^{2n} + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 4^{2n} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot 2^{2n} \right) \\ & \left. + \text{etc.} \right], \end{aligned}$$

et parce que $\Gamma(2n+1) = 2n\Gamma(2n)$, cette formule peut être réduite comme il suit :

$$\begin{aligned} H_n = \frac{2^{2n-3}(-1)^{n+1}}{(2^{2n}-1)\Gamma(2n)} & \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} (2^{2n} - 4) \right. \\ & + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} \left(3^{2n} - 6 \cdot 2^{2n} + \frac{6 \cdot 5}{2} \right) \\ & - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^6} \left(4^{2n} - 8 \cdot 3^{2n} + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2^{2n} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \right) \\ & + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^8} \left(5^{2n} - 10 \cdot 4^{2n} + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 3^{2n} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot 2^{2n} \right. \\ & \left. \left. + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) - \text{etc.} \right], \end{aligned}$$

nouvelle forme à-peu-près aussi simple que celle du coefficient K_n .

154. Considérons encore la formule

$$\int \frac{d\omega}{\cos \omega} = \frac{1}{2} l \left(\frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega} \right) = \omega + \frac{1}{3} K_1 \omega^3 + \frac{1}{5} K_2 \omega^5 + \frac{1}{7} K_3 \omega^7 + \text{etc.},$$

dont le second membre peut être aussi représenté par $\sin \omega + \frac{1}{3} \sin^3 \omega + \frac{1}{5} \sin^5 \omega + \text{etc.}$; pour avoir le terme général de son développement $\frac{K_n}{2n+1} \omega^{2n+1}$, tout se réduit à chercher le coefficient de ω^{2n+1} dans chaque terme de la suite $\sin \omega + \frac{1}{3} \sin^3 \omega + \frac{1}{5} \sin^5 \omega + \text{etc.}$

Or, 1°. dans $\sin \omega$, ce coefficient est $\frac{(-1)^n}{\Gamma(2n+2)}$;

2°. Puisque $\frac{1}{3} \sin^3 \omega = \frac{1}{3 \cdot 2^2} (3 \sin \omega - \sin 3\omega)$, le coefficient de ω^{2n+1} dans le développement de cette quantité, est

$$\frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^2 \cdot \Gamma(2n+2)} (3^{2n+1} - 3);$$

3°. Puisque $\frac{1}{5} \sin^5 \omega = \frac{1}{5 \cdot 2^4} (10 \sin \omega - 5 \sin 3\omega + \sin 5\omega)$, le coefficient de ω^{2n+1} dans ce terme développé, sera

$$\frac{(-1)^n}{5 \cdot 2^4 \Gamma(2n+2)} (5^{2n+1} - 5 \cdot 3^{2n+1} + 10).$$

La loi de ces expressions étant manifeste, on en déduit cette nouvelle valeur du coefficient K_n ,

$$\begin{aligned} K_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(2n+1)} & \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} (3^{2n+1} - 3) \right. \\ & + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} (5^{2n+1} - 5 \cdot 3^{2n+1} + 5 \cdot 4) \\ & - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^6} (7^{2n+1} - 7 \cdot 5^{2n+1} + \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3^{2n+1} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3}) \\ & \left. + \text{etc.} \right], \end{aligned}$$

laquelle comparée à celle de l'art. 151, fournit des identités assez remarquables.

155. La conclusion générale que nous tirerons des formules démontrées dans ce chapitre, est que toute quantité de la forme.....

$\frac{P}{\sin^m \omega \cos^n \omega}$, dans laquelle P est une fonction rationnelle et entière

de $\sin \omega$ et $\cos \omega$, étant développée suivant les puissances de ω , on peut toujours assigner un terme quelconque du développement par le moyen des coefficients K_n , H_n , dont la loi est connue. La même propriété s'étend visiblement à l'intégrale $\int \frac{\omega^{m+i} P d\omega}{\sin^m \omega \cos^n \omega}$, prise depuis $\omega=0$, laquelle comprend une infinité de transcendentes; on suppose les nombres m et n entiers et i positif.

Parmi les plus simples des transcendentes comprises dans cette intégrale générale, se trouvent $l \sin \omega$, $l \cos \omega$, $l \tan \omega$, $l(1 + \cos \omega) = 2l \cos \frac{1}{2} \omega$, $l(1 - \cos \omega) = 2l \sin \frac{1}{2} \omega$, $l(1 + \sin \omega) = l \cos \omega + l \left(\frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega} \right)$, $l(1 - \sin \omega) = l \cos \omega - \frac{1}{2} l \left(\frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega} \right)$, etc.

On pourrait, par de semblables procédés, trouver la loi générale du développement des quantités de la forme $\frac{1}{a + \cos \omega}$, $\frac{\sin \omega}{a + \cos \omega}$, ce qui conduirait à des résultats plus généraux sur le développement d'une fonction rationnelle quelconque de $\sin \omega$ et $\cos \omega$; mais les coefficients par lesquels on pourrait représenter les termes généraux de ces développemens, n'auraient plus rien de commun avec H_n et K_n , si ce n'est la forme de leur expression générale.

§ XI. Réduction de la formule qui exprime la fonction $E\phi$, dans la méthode des modules croissans.

156. LA formule dont il s'agit est celle de l'art. 123 ci-dessus; nous l'avons déjà simplifiée (art. 124), dans la supposition que b'^3 et $b'^3 \tan^3 \phi'$ soient négligeables; mais quand on la laisse dans son état de généralité, pour obtenir tel degré d'exactitude qu'on voudra, le calcul en est long et difficile. Nous avons donc recherché les moyens d'amener cette formule au dernier degré de réduction dont elle est susceptible, et nous y sommes parvenus de la manière suivante.

Après avoir formé la série des modules croissans c , c' , c'' , et celle de leurs complémens b , b' , b'' , il faut calculer la suite des amplitudes décroissantes ϕ , ϕ' , ϕ'' , jusqu'à une limite qui est dé-

terminée, ainsi que celle des modules, par le degré d'exactitude qu'on peut obtenir. Ces amplitudes se calculent directement par les équations $\sin(2\phi' - \phi) = c \sin \phi$, $\sin(2\phi'' - \phi') = c' \sin \phi'$, etc.; mais, quand on est parvenu à celle de ces équations où le c correspondant est trop peu différent de l'unité, il convient de la remplacer par l'équation correspondante de la suite $\tan(\phi - \phi') = b' \tan \phi'$, $\tan(\phi' - \phi'') = b'' \tan \phi''$, etc., d'où l'on peut tirer facilement plus d'exactitude.

Connaissant ainsi la limite Φ de la suite ϕ, ϕ', ϕ'' , que nous supposerons, par exemple, se confondre sensiblement avec le quatrième terme ϕ''' , on aura la valeur de $F\phi$ par l'équation..... $F\phi = K \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi)$, dans laquelle le logarithme est hyperbolique; prenant donc dans les Tables le logarithme vulgaire $\log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi) = H$, on aura $F\phi = KMH$; quant à la valeur de K , elle est, comme on sait, $K = \sqrt{\frac{1}{c} c' c'' c'''}$.

157. Venant ensuite au calcul de $E\phi$, la formule générale de l'art. 123 pourra être représentée ainsi

$$E\phi = L'F\phi + Pc \sin \phi,$$

et il s'agit de calculer les deux termes dont elle est composée.

Le premier se trouve facilement par la valeur déjà connue de $F\phi$ et par le coefficient L' que nous avons déjà réduit à la forme la plus simple dans le calcul des fonctions complètes (art. 19). Tout se réduit donc à chercher la valeur de P .

Or, en faisant $\phi - \phi' = \omega'$, $\phi' - \phi'' = \omega''$, $\phi'' - \phi''' = \omega'''$, etc., on aura les équations $\tan \omega' = b' \tan \phi'$, $\tan \omega'' = b'' \tan \phi''$, etc.; la première donne $\sin \phi = \sin(\phi' + \omega') = (1 + b') \sin \phi' \cos \omega' = \frac{c'}{\sqrt{c}} \sin \phi' \cos \omega'$, et on en déduit successivement

$$\sin \phi' = \frac{\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \omega'}, \quad \sin \phi'' = \frac{\sqrt{c'}}{c''} \cdot \frac{\sin \phi'}{\cos \omega''} = \frac{\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{\sqrt{c'}}{c''} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \omega' \cos \omega''};$$

$$\sin \phi''' = \frac{\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{\sqrt{c'}}{c''} \cdot \frac{\sqrt{c''}}{c'''} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \omega' \cos \omega'' \cos \omega'''}, \text{ etc.};$$

substituant ces valeurs dans la formule de l'art. 123, on aura d'abord

$$\begin{aligned}
 P = & c + \frac{2\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{b' + 1 - \cos \omega'}{\cos \omega'} \\
 & + \frac{2}{c'} \cdot \frac{2\sqrt{c'}}{c''} \cdot \frac{b'' + 1 - \cos \omega''}{\cos \omega' \cos \omega''} \\
 & + \frac{2}{c'} \cdot \frac{2}{c''} \cdot \frac{2\sqrt{c''}}{c'''} \cdot \frac{b''' + 1 - \cos \omega'''}{\cos \omega' \cos \omega'' \cos \omega'''} \\
 & + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Mais la quantité $\frac{2\sqrt{c}}{c'} (b' + 1 - \cos \omega') = 2 - (1 + c) \cos \omega'$, et les autres quantités analogues se transforment de la même manière, de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned}
 P = & c + \frac{2 - (1 + c) \cos \omega'}{\cos \omega'} \\
 & + \frac{2}{c'} \cdot \frac{2 - (1 + c') \cos \omega''}{\cos \omega' \cos \omega''} \\
 & + \frac{2}{c'} \cdot \frac{2}{c''} \cdot \frac{2 - (1 + c'') \cos \omega'''}{\cos \omega' \cos \omega'' \cos \omega'''} \\
 & + \text{etc.};
 \end{aligned}$$

les deux premiers termes $c + \frac{2 - (1 + c) \cos \omega'}{\cos \omega'}$ se réduisent à $\frac{2 - \cos \omega'}{\cos \omega'}$;

en y joignant le terme suivant $\frac{2}{c'} \cdot \frac{2 - (1 + c') \cos \omega''}{\cos \omega' \cos \omega''}$, la somme est

$-1 + \frac{2}{c'} \cdot \frac{2 - \cos \omega''}{\cos \omega' \cos \omega''}$; ajoutant encore le 4^e terme $\frac{4}{c' c''} \cdot \frac{2 - (1 + c'') \cos \omega'''}{\cos \omega' \cos \omega'' \cos \omega'''}$,

la somme est $-1 - \frac{2}{c' \cos \omega'} + \frac{4}{c' c''} \cdot \frac{2 - \cos \omega''}{\cos \omega' \cos \omega'' \cos \omega''}$; un terme de plus donnerait semblablement la somme

$$-1 - \frac{2}{c' \cos \omega'} - \frac{4}{c' c'' \cos \omega' \cos \omega''} + \frac{8(2 - \cos \omega''')}{c' c'' c''' \cos \omega' \cos \omega'' \cos \omega'''}$$

et ainsi de suite.

158. Supposons maintenant qu'à cause de la diminution très-rapide des angles ω' , ω'' , ω''' , etc., la différence $1 - \cos \omega'''$ soit négligeable, on aura en même temps avec une exactitude suffisante $c''' = 1$, $\cos \omega''' = 1$, ce qui donnera

$$P = \frac{4}{r' r''} - \frac{2}{r'} - 1,$$

en faisant pour abrégier $r' = c' \cos \omega'$, $r'' = c'' \cos \omega''$.

Dans la même hypothèse, on doit regarder comme négligeable la

quantité $(1 - r'')^2$, de sorte qu'on pourra faire $1 - 2r'' + r'^2 = 0$, ou $\frac{2}{r''} - 1 = \frac{1}{r'^2}$, ce qui réduit la valeur de P à deux termes seulement, savoir :

$$P = \frac{2}{r'r'^2} - 1.$$

Supposons $\log r'r'' = -t$, t sera presque toujours une quantité fort petite; cette quantité étant donnée, on en tirera $r'r'^2 = e^{-Mt}$;

$P = 2e^{Mt} - 1 = e^{2Mt} [1 - (1 - e^{-Mt})^2]$; donc
 $\log P = 2t - m(1 - e^{-Mt})^2 - \frac{1}{2}m(1 - e^{-Mt})^4 - \frac{1}{3}m(1 - e^{-Mt})^6 - \text{etc.}$;
 et en développant jusqu'aux t^3 seulement,

$$\log P = 2t - Mt^2 + M^2t^3.$$

Cette formule sera très-commode pour calculer le second terme $P \sin \phi$ de la valeur de $F\phi$, si toutefois les quantités de l'ordre t^4 peuvent être négligées.

159. Si l'on veut pousser l'approximation plus loin, et qu'on regarde seulement comme négligeable la quantité $1 - \cos \omega''$, ainsi que $1 - c''$, la valeur de P deviendra

$$P = \frac{8}{r'r''r''^2} - \frac{4}{r'r''} - \frac{2}{r'} - 1;$$

et parce que dans le même cas on peut regarder comme nulle la quantité $(1 - r''')^2$, ce qui donne $\frac{2}{r''} - 1 = \frac{1}{r'^2}$, on aura plus simplement

$$P = \frac{4}{r'r''r'^2} - \frac{2}{r'} - 1.$$

Pour faciliter le calcul de cette formule, on pourra profiter de la réduction indiquée dans l'article précédent, en l'appliquant à la quantité $P' = \frac{2}{r'r'^2} - 1$; on aura ainsi

$$P = \frac{2P'}{r'} - 1;$$

alors le terme $P \sin \phi$ se réduit à $\frac{2P'c \sin \phi}{r'} - c \sin \phi$; et parce que $r' = c' \cos \omega' = \frac{\sqrt{c' \sin \phi}}{\sin \phi}$, on aura simplement $P \sin \phi = P' \cdot 2 \sqrt{c' \sin \phi} - c \sin \phi$,

ce qui dispensera de calculer $\cos \omega'$. De plus, comme $c \sin \phi = \sin \theta \sin \phi = \frac{1}{2} \cos (\theta - \phi) - \frac{1}{2} \cos (\theta + \phi)$, on voit que dans beaucoup de cas, cette quantité pourra se trouver immédiatement par la Table des sinus naturels.

Au reste il est très-remarquable que la valeur de $E\phi$, ainsi réduite par plusieurs transformations successives, se déduirait immédiatement de l'expression de G , tom. I, pag. 105, en faisant $B = -c^2$, et substituant les valeurs $\sin \phi' = \frac{\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \omega'}$, $\sin \phi'' = \frac{\sqrt{c'}}{c''} \cdot \frac{\sin \phi'}{\cos \omega''}$, etc.

Nous observerons enfin que la valeur de P peut aussi s'exprimer par cette série convergente :

$$P = 1 + \frac{2(1-r)}{r'} + \frac{4(1-r'')}{r'r''} + \frac{8(1-r''')}{r'r''r'''} + \text{etc.};$$

au moyen de laquelle l'approximation peut être poussée aussi loin qu'on voudra. Les deux premiers termes se réduisent à $\frac{2}{r} - 1$; quant aux suivans, qui décroissent rapidement, ils sont faciles à calculer par les formules $\log r = -t$, $\log(1-r) = \log(Mt) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{24}Mt^2$.

160. *Exemple I.* Supposons qu'on veuille calculer, avec toute l'exactitude que comportent des Tables à 14 décimales, les fonctions $F\phi$ et $E\phi$, pour le module $c = \sin 81^\circ$ et l'amplitude $\phi = 75^\circ$.

Il faut d'abord tirer de la Table VI (*) l'échelle des modules et le logarithme de K , comme il suit :

$c \dots$	9,99461 99270 6508	$b \dots$	9,19433 24413 5701
$c' \dots$	9,99999 16689 5938	$b' \dots$	7,79196 83022 3974
$c'' \dots$	9,99999 99999 8002	$b'' \dots$	4,98188 49441 5219
$K \dots$	0,00268 58709 3716	$b''' \dots$	9,36170 98969 9640

(*) La Table VI contient l'échelle des modules et le logarithme de K , pour tous les angles du module qui ont servi à construire la Table des fonctions complètes, c'est-à-dire, de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 15° , et de demi-degré en demi-degré, depuis 15° jusqu'à 45° . Cette même Table donne les modules croissans c , c' , c'' , etc., et leurs complémens b , b' , b'' , etc., de 45° à 90° ; il suffit pour cela de prendre, au lieu de l'angle du module, son complément à 90° , et d'échanger entr'elles les lettres c et b , en substituant les signes ' aux signes °, comme on l'a fait dans cet exemple.

On procédera ensuite au calcul de ϕ' par l'équation $\sin(2\phi' - \phi) = c \sin \phi$, et par les formules ordinaires pour l'usage des Tables.

c	9,99461 99270 6508	angle cherch. $2\phi' - \phi = A$,
$\sin \phi$	9,98494 37781 0267	angle approx. $a = 72^\circ 56$;
$\sin(2\phi' - \phi)$	9,97956 37051 6775	$2a = 145.12$,
$\sin a$	9,97956 26352 3206	

$$r = 10699 \ 3569$$

$$l \sin A = l \sin a + r,$$

$$p = \frac{\frac{1}{2} Mr}{\cos^2 a},$$

$$A = a + p \sin 2a \left(1 + p + p^2 \cdot \frac{4 - 2 \cos 2a}{3} \right);$$

r	4,02935 76746	$a + (1) = 72^\circ,56044 \ 93263 \ 4442$
$\frac{1}{2} M$	0,06118 56930 4	(2).... 61 6186
$\sec^2 a$	1,04660 65030 3	(3).... 16
p	5,13714 98706 7	$2\phi' - \phi = 72,56044 \ 93325 \ 0644$
$\sin 2a$	9,75728 93793 8	$\phi = 75$
R°	1,75812 26324 1	$\phi' = 73,78022 \ 46662 \ 5322$
(1).....	6,65256 18824 6	
p	5,13714 987	
(2).....	1,78971 175	
p	5,13714 987	
$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cos 2a$	0,27421 200	
(3).....	7,20107 36.	

La valeur de ϕ' réduite pour les Tables à dix décimales, savoir : $\phi' = 73^\circ 46' 48'',8088$, servira à calculer par l'équation $\sin(2\phi'' - \phi') = c' \sin \phi'$, une première valeur approchée de ϕ'' ; cette valeur $\phi'' = 73^\circ 46' 42'',00876$, étant substituée dans le second membre de l'équation $\tan(\phi' - \phi'') = b'' \tan \phi''$, on en déduira facilement une valeur beaucoup plus approchée de $\phi' - \phi''$; faisant pour cet effet $b'' \tan \phi'' = p$, on aura $\phi' - \phi'' = R^\circ p \left(1 - \frac{p^2}{3} \right)$; en voici le calcul :

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 199

b''	4,98188 49441 5	(1) =	0°,00188 88989 5528
$\text{tang } \phi''$	0,53620 11498 3	(2)	— 68
p	5,51808 60939 8	$\phi' - \phi'' =$	0,00188 88989 546
R°	1,75812 26324 1	$\phi' =$	73,78022 46662 532
(1)	7,27620 87263 9	$\phi'' =$	73,77833 57672 986
p^2	1,03617 2188	$\phi'' - \phi''' =$	45 293
$\frac{1}{3}$	9,52287 8745	$\phi''' =$	73,77833 57627 693;
(2)	7,83525 966		

la différence $\phi'' - \phi'''$ a été calculée semblablement par l'équation $\phi'' - \phi''' = R^\circ b''' \text{ tang } \phi'''$. Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, et on peut prendre ϕ''' pour la limite Φ , ce qui donnera

$$45^\circ + \frac{1}{2} \Phi = 81^\circ,88916 \ 78813 \ 8465.$$

Soit $a = 81^\circ,89$, $x = 0^\circ,00083 \ 21186 \ 1535$, on calculera la valeur de $H = l \text{ tang } (a - x)$ par les formules

$$p = \frac{x}{\sin 2a}, \quad l \text{ tang } (a - x) = l \text{ tang } a - r,$$

$$r = 2mp \left(1 + p \cos 2a + p^2 \cdot \frac{2 + 2 \cos^2 2a}{3} \right);$$

on aura ensuite $F\phi = KMH$; voici ce calcul :

$R^\circ x$	6,92018 52377		
R°	1,75812 26324	$a = 81^\circ,89$ (1).	0,00004 51611 60334
x	5,16206 26053	$2a = 163,78$ (2).	— 22 54633
$\sin 2a$	9,44611 18205	(3).	+ 156
p	5,71595 07848	$r =$	0,00004 51589 0586
$2m$	9,93881 43070	$\text{tang } a$	0,84618 77314 7040
(1)	5,65476 50918	$H =$	0,84614 25725 6454
p	5,71595 07848		
$\cos 2a$	9,98236 00014		
(2)	1,35307 588	$H \dots$	9,92744 35465 6283
.....	5,65476 51	$M \dots$	0,36221 56886 9946
p^2	1,43190 16	$K \dots$	0,00268 58709 3716
$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cos^2 2a$	0,10765 70	$\log F\phi =$	0,29234 51061 9945.
(3)	7,19432 37		

161. Connaissant ainsi $\log F\phi$, nous allons procéder au calcul de $E\phi = L'F\phi + Pc \sin \phi$. La première partie dépend du coefficient L' qui se calcule par les formules

$$L' = \frac{1}{2} b^2 K^{\frac{1}{2}} \cdot (c'')^{\frac{1}{4}} (1 - r), \quad r = \frac{1}{4} \cdot \frac{b'b''}{\sqrt{K}};$$

il en résulte

$$\begin{array}{r} \log L' \dots\dots = 8,08897 \ 78160 \ 8327 \\ LF\phi \dots\dots = 0,29234 \ 51061 \ 9945 \\ \hline 8,38132 \ 29222 \ 8272 \\ L'F\phi \dots\dots = 0,02406 \ 15124 \ 3297 \end{array}$$

Pour avoir la valeur de P , il faut reprendre les valeurs trouvées de ω' , ω'' , ω''' , savoir :

$$\begin{array}{l} \omega' = \phi - \phi' = 1^{\circ}21977 \ 53337 \ 468, \\ \omega'' = \phi' - \phi'' = 0,00188 \ 88989 \ 546, \\ \omega''' = \phi'' - \phi''' = 0,00000 \ 00045 \ 293, \end{array}$$

et calculer les logarithmes de $\cos \omega'$, $\cos \omega''$, $\cos \omega'''$, par la formule du n° 147, voici le calcul du premier :

$$\begin{array}{r} \omega' \ 8,32815 \ 72144 \ 14 \quad \omega'^4 \ 3,31262 \ 88 \quad (1) \dots = 0,00009 \ 84166 \ 87719 \\ \omega'^2 \ 6,65631 \ 44288 \ 28 \quad \quad \quad 8,55860 \ 31 \quad (2) \dots \quad \quad \quad 74 \ 34160 \\ \quad \quad \quad 9,33675 \ 43156 \ 37 \quad (2) \ 1,87123 \ 19 \quad (3) \dots \quad \quad \quad 898 \\ (1) \ 5,99306 \ 87444 \ 65 \quad \omega'^6 \ 9,96894 \quad 1:\cos \omega' \ 0,00009 \ 84241 \ 2278 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 7,98457 \quad 1:c' \dots \quad 0,00000 \ 83310 \ 4062 \\ \quad \quad \quad (3) \ 7,95351 \quad 1:r' \dots \quad 0,00010 \ 67551 \ 6340. \end{array}$$

Le calcul de $\cos \omega''$ se fera par un seul terme, comme il suit :

$$\begin{array}{r} \omega'' \dots\dots 5,51808 \ 609 \quad 1:\cos \omega'' \dots\dots 0,00000 \ 00002 \ 3602 \\ \omega''^2 \dots\dots 1,03617 \ 218 \quad 1:c'' \dots\dots \quad \quad \quad 1998 \\ \quad \quad \quad 9,33675 \ 432 \quad 1:r'' \dots\dots 0,00000 \ 00002 \ 5599. \\ (1) \dots\dots 0,37292 \ 650 \end{array}$$

A l'égard de ω''' , la petitesse de cet angle permet de négliger entièrement $1 - \cos \omega'''$, ainsi que $1 - c'''$, ce qui donne $r''' = 1$. Ainsi la valeur de $Pc \sin \phi$ se réduit, dans ce cas, aux deux seuls termes

$\frac{2c \sin \phi}{r'^{1/2}} = c \sin \phi$. Voici le calcul du premier:

$$\begin{array}{r} 2 \dots\dots\dots 0,30102 \ 99956 \ 6398 \\ c \sin \phi \dots 9,97956 \ 37051 \ 6775 \\ 1:r' \dots\dots\dots 10 \ 67551 \ 6340 \\ 1:r'^{1/2} \dots\dots\dots 5 \ 1198 \end{array}$$

$$Z \dots\dots\dots 0,28070 \ 04565 \ 0711 \quad Z = 1,90853 \ 64403 \ 8184.$$

Le second terme $c \sin \phi$, ou $\sin 81^\circ \sin 75^\circ$, est la même chose que $\frac{1}{2} \sin 84^\circ + \frac{1}{2} \sin 66^\circ$, dont la valeur se trouve immédiatement par la Table III,

de ces deux termes résulte

$$= 0,95403 \ 36765 \ 0544;$$

d'ailleurs on a déjà trouvé

$$Pc \sin \phi = 0,95450 \ 27638 \ 7640$$

$$L'F\phi = 0,02406 \ 15124 \ 3297$$

donc la fonction cherchée

$$E\phi = 0,97856 \ 42763 \ 0937$$

d'ailleurs le logarith. connu de $F\phi$ donne $F\phi = 1,96040 \ 18613 \ 8371$.

Dans cet exemple où le nombre $t = -\log r'/r'^{1/2}$ est assez petit, on aurait pu abréger le calcul de la partie $Pc \sin \phi$ par la formule de l'art. 158 comme il suit :

$$t \dots\dots\dots = 0,00010 \ 67556 \ 7538$$

$$t \dots\dots\dots 6,02839 \ 09724$$

$$2t \dots\dots\dots = 0,00021 \ 35113 \ 5076$$

$$t^2 \dots\dots\dots 2,05678 \ 19448$$

$$Mt^2 \dots\dots\dots - \quad 262 \ 4204$$

$$M \dots\dots\dots 0,36221 \ 56887$$

$$M^2t^3 \dots\dots\dots + \quad 645$$

$$Mt^2 \dots\dots\dots 2,41899 \ 76335$$

$$M^2t^3 \dots\dots\dots 8,80960 \ 43.$$

$$P \dots\dots\dots 0,00021 \ 34851 \ 1517$$

$$c \sin \phi \dots\dots\dots 9,97956 \ 37051 \ 6775$$

$$Pc \sin \phi \dots\dots\dots 0,97977 \ 11092 \ 8292$$

On tire de là $Pc \sin \phi = 0,95450 \ 27638 \ 7645$, résultat qui ne diffère du précédent que dans le quatorzième chiffre dont l'exactitude est toujours incertaine, tant par l'erreur des tables que par celle des parties proportionnelles.

162. Nous remarquerons que lorsque le logarithme t est aussi petit que dans l'exemple précédent, on peut calculer la partie $Pc \sin \phi$ de la valeur de $E\phi$, d'une manière encore plus simple

que par la formule de l'article 158. Car faisant toujours...

$t = -\log(r'r'^2)$, ce qui donne $r'r'^2 = e^{-Mt}$, on aura $\frac{2}{r'r'^2} - 1 = 2e^{Mt} - 1$; soit cette quantité $= 1 + z$, afin qu'on ait $Pc \sin \phi = c \sin \phi + cz \sin \phi$; de la valeur $z = 2(e^{Mt} - 1) = 2e^{\frac{1}{2}Mt}(e^{\frac{1}{2}Mt} - e^{-\frac{1}{2}Mt}) = 2Mt \cdot e^{\frac{1}{2}Mt}(1 + \frac{1}{24}M^2t^2 + \text{etc.})$, on déduira

$$\log z = \log(2Mt) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{24}Mt^2;$$

par cette formule, on calculera facilement le petit terme $cz \sin \phi$ qui doit être ajouté à $c \sin \phi$; en voici l'application

$\log t \dots$	$6,02859 \ 09724$	$(1) \dots$	$0,00046 \ 90873 \ 7106$
$l2M \dots$	$0,66324 \ 56843 \ 6$	$c \sin \phi \dots$	$0,95403 \ 36765 \ 0544$
$\frac{1}{2}t \dots$	$5 \ 33778 \ 4$	$Pc \sin \phi =$	$0,95450 \ 27638 \ 7650$
$\frac{1}{24}Mt^2 \dots$	$10 \ 9$		
$\log z \dots$	$6,69169 \ 00356 \ 9$		
$l(c \sin \phi)$	$9,97956 \ 37051 \ 7$		
$(1) \dots$	$6,67125 \ 37408 \ 6$		

Ce résultat s'accorde encore avec les précédens, aussi bien que cela peut être, en n'employant, pour le calcul des parties accessoires, que des logarithmes à dix décimales.

163. *Exemple II.* Soit proposé de trouver les fonctions $F\phi$, $E\phi$; pour l'amplitude $\phi = 45^\circ$, et le module $\sin 48^\circ$, dont les élémens sont, d'après la Table VI,

$c \dots$	$9,87107 \ 34581 \ 4351$	$b \dots$	$9,82551 \ 08951 \ 7436$
$c' \dots$	$9,99523 \ 32536 \ 9413$	$b' \dots$	$9,16835 \ 48482 \ 6552$
$c'' \dots$	$9,99999 \ 34601 \ 5285$	$b'' \dots$	$7,73940 \ 33718 \ 1465$
$c''' \dots$	$— \ 1231$	$b''' \dots$	$4,87675 \ 32981 \ 2387$
$K \dots$	$0,06207 \ 66278 \ 45585$		

Voici d'abord le calcul de ϕ' et $\sin \phi'$.

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 203

c	9,87107 34581 4351	$a=31^{\circ} 70' \frac{1}{2} r$.	4,66130 52942
$\sin \phi$	9,84948 50021 6801	$2a=63.40$ M.	0,36221 56887
$\sin(2\phi' - \phi)$	9,72055 84063 1152	$\sec^2 a$.	0,14033 36959 1
		p	5,16385 46788 1
$a+(1) = 31^{\circ} 42' 2''$,	68962 8207	$\sin 2a$...	9,95141 24387 4
(2)+(3)	3 9224	R''	5,31442 51331 8
$2\phi' - \phi = 31.42.2$,	68966 7431	(1).....	0,42969 22507 3
$\phi' = 38.21.1$,	34483 37155	p	5,16385 468
		(2).....	5,59354 693
		p	5,16385 47
		$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cos 2a$...	0,01486 78
		(3).....	0,77226 94.

Pour avoir $l \sin \phi'$, on fera $a=38^{\circ} 35'=38^{\circ} 21'$, $x=1''$, 34483 37155, $\phi' = a + x$, et on appliquera la formule $l \sin(a+x) = l \sin a + mx \cot a \left(1 - \frac{x}{\sin 2a} + \frac{x}{\sin 2a} \cdot \frac{1}{3} x \cot a \right)$; en voici le calcul :

$R''x$...	0,12866 85884 8	$\sin a$...	9,79271 63379 4647
R''	5,31442 51331 8	(1)....	+ 35789 6760
x	4,81424 34553	(2)....	— 2398
m	9,63778 43113	$\sin \phi'$..	9,79271 99168 9009
$\cot a$...	0,10173 00005 9	c'	9,99523 32536 9414
(1)....	4,55375 77670 9	$\sin(2\phi'' - \phi')$	9,78795 31705 8423.
x	4,81424 34553		
$1 : \sin 2a$	0,01180 7328		
(2)....	9,37980 855		

D'après cette valeur de $l \sin(2\phi'' - \phi')$, on trouve, en suivant toujours les mêmes procédés,

$$\begin{aligned}
 2\phi'' - \phi' &= 37^{\circ} 51' 25'', 98409 3235 \\
 \phi' &= 38.21.1, 34483 3715 \\
 &\quad \underline{76.12.27, 32892 6950} \\
 \phi'' &= 38. 6.13, 66446 3475;
 \end{aligned}$$

on a ensuite pour déterminer ϕ''' l'équation $\sin(2\phi''' - \phi'') = c' \sin \phi''$;

mais à cause de la petitesse de l'angle $\phi'' - \phi''' = \omega'''$, il est préférable de déterminer ϕ''' par l'équation $\tan(\phi'' - \phi''') = b''' \tan \phi'''$, ou simplement $\phi'' - \phi''' = R'' b''' \tan \phi'''$. Pour cela, on substituera d'abord dans le second membre la valeur approchée $\phi''' = 38^\circ 6' 10''$, ce qui donnera $\omega''' = 1'',2178$, et $\phi''' = 38^\circ 6' 12'',466$. Au moyen de cette seconde valeur, qui a toute l'exactitude nécessaire pour les tables à dix décimales, on trouvera plus exactement $\phi'' - \phi''' = R'' b''' \tan \phi''' = 1'',21787 \ 8424$. Enfin la différence $\phi''' - \phi^{iv} = \omega^{iv}$ se déduira de l'équation $\omega^{iv} = R'' b^{iv} \tan \phi^{iv}$, ou simplement $\omega^{iv} = \omega''' \cdot \frac{1}{4} b'''$; car on peut supposer dans le second membre $\tan \phi^{iv} = \tan \phi'''$, et $b^{iv} = \frac{1}{4} (b''')^2$. Voici ces derniers calculs d'où l'on déduit la valeur de ϕ^{iv} :

$b''' \dots 4,87675 \ 32921 \ 2$	$\phi'' = 38^\circ 6' 13'',66446 \ 3475$
$\tan \phi''' \ 9,89442 \ 55112 \ 5$	$\omega''' = \underline{1,21787 \ 8424}$
$R'' \dots 5,31442 \ 51331 \ 8$	$\phi''' = 38.6.12,44658 \ 5051$
$\omega''' \dots 0,08560 \ 39365 \ 5$	$\omega^{iv} = \underline{22924}$
$\frac{1}{4} b''' \dots 4,27469 \ 33$	$\phi^{iv} = 38.6.12,44658 \ 27586.$
$\omega^{iv} \dots 4,36029 \ 72$	

On peut considérer ϕ^{iv} comme étant la limite des angles décroissans $\phi, \phi', \phi'',$ etc.; ainsi on aura

$$H = \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\phi^{iv}) = l \tan(64^\circ 3' 6'',22329 \ 1379).$$

Pour calculer ce log-tangente, on fera $a = 64^\circ 05' = 64^\circ 3'$, $x = 6'',22329 \ 1379$; et appliquant les formules

$$p = \frac{x}{\sin 2a}, \quad l \tan(a+x) = l \tan a + 2mp[1 - p \cos 2a + \frac{2}{3} p^2 (1 + \cos^2 2a)],$$

on trouvera $H = 0,31281 \ 40842 \ 60705$. Enfin la formule $F\phi = KMH$ donnera les résultats suivans.

$H \dots 9,49528 \ 62986 \ 6865$
$M \dots 0,36221 \ 56886 \ 9946 \ 3$
$K \dots 0,06207 \ 66278 \ 4558 \ 5$
$lF\phi = 9,91957 \ 86152 \ 1370$
$F\phi = 0,83095 \ 71234 \ 6716.$

164. Venons maintenant au calcul de la formule $E\phi = L/F\phi$.

+ $Pc \sin \phi$; la première partie se trouvera après avoir calculé $\log L'$, comme il suit :

$$L' \dots 9,58094 \ 67241 \ 4940$$

$$F\phi \dots 9,91957 \ 86152 \ 1370$$

$$L'F\phi \dots 9,30052 \ 53392 \ 6310 \quad L'F\phi = 0,19976 \ 77321 \ 6029,$$

la seconde partie $Pc \sin \phi = 2\sqrt{c} \sin \phi \cdot P' - c \sin \phi$; et pour avoir P' , il faut connaître $r'' = c'' \cos \omega''$ et $r''' = c''' \cos \omega'''$, or d'après les valeurs déjà connues

$$\omega'' = \phi' - \phi'' = 887'' 68037 \ 024,$$

$$\omega''' = \phi'' - \phi''' = 1,21784 \ 824,$$

on trouve les résultats suivans :

$$1:\cos \omega'' \dots 0,00000 \ 40217 \ 70478 \quad \cos \omega''' \dots - \ 7570$$

$$1:c'' \dots \dots \dots 65398 \ 47146 \quad c''' \dots - \ 12310$$

$$1:r'' \dots \dots \dots 0,00001 \ 05616 \ 17624 \quad r''' \dots - \ 19880$$

$$1:r'''^2 \dots \dots \dots 39760$$

$$t = 0,00001 \ 05616 \ 57384;$$

par le moyen de cette valeur de $t = -\log(r''r'''^2)$, on trouve aisément le terme $Z = 2\sqrt{c} \cdot \sin \phi' \cdot P'$, ensuite on aura $c \sin \phi = \frac{1}{2} \cos 3^\circ + \frac{1}{2} \sin 3^\circ$; d'où l'on conclura la valeur de $E\phi$, comme il suit:

$$2 \dots \dots 0,30102 \ 99956 \ 63981 \quad Z = 1,06981 \ 27381 \ 3605$$

$$\sqrt{c} \dots 9,93553 \ 67290 \ 71755 \quad c \sin \phi \quad 0,52348 \ 27454 \ 9876$$

$$\sin \phi' \dots 9,79271 \ 99168 \ 90090 \quad Pc \sin \phi = 0,54432 \ 99926 \ 3729$$

$$+2t \dots + \ 2 \ 11233 \ 14768 \quad L'F\phi = 0,19976 \ 77321 \ 6029$$

$$-Mt^2 \dots - \quad \quad \quad 2 \ 56850 \quad E\phi = 0,74409 \ 77247 \ 9758$$

$$+Mt^3 \dots + \quad \quad \quad 6$$

$$Z \dots 0,02930 \ 77646 \ 8375.$$

Les calculs de ces deux exemples ont été fort longs, malgré la simplicité des formules, parce qu'on a voulu obtenir des résultats exacts jusqu'à la quatorzième décimale; mais ils s'abrégeraient beaucoup, si l'on se bornait, comme il convient presque toujours, à dix ou à un moindre nombre de décimales.

§ XII. *Méthode pour construire, d'après un module donné, une table composée d'un petit nombre de valeurs des fonctions F et E, au moyen de laquelle on puisse déterminer facilement ces fonctions pour toute valeur donnée de l'amplitude.*

165. LA méthode que nous allons exposer n'est autre chose que celle du § IV, modifiée de manière qu'elle n'exige pas un travail préliminaire trop considérable, au moins lorsqu'on ne veut pas pousser l'approximation au-delà d'un certain degré.

Supposons d'abord que l'on calcule par la méthode générale, l'amplitude α ou α_1 , qui satisfait à l'équation $F\alpha = \frac{1}{10} F'c$ (nous prenons pour exemple la fraction $\frac{1}{10}$; mais une autre fraction telle que $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{6}$, pourrait être plus convenable dans certains cas, comme nous le verrons ci-après); au moyen de cette amplitude, on déterminera successivement celles qui satisfont aux fonctions multiples $F\alpha_2 = 2F\alpha$, $F\alpha_3 = 3F\alpha$, etc. On calculera en même tems les valeurs correspondantes de E, et du tout on formera un petit tableau de dix lignes seulement, contenant les valeurs de ϕ et de $E\phi$, auquel on pourra joindre, pour la facilité des applications, les valeurs correspondantes de $l\sin\phi$, $l\tang\phi$, $l\Delta(\phi)$. Voyez un Tableau de cette sorte, page 215.

Cela posé, ϕ ayant une valeur donnée quelconque, il s'agira de trouver, par le moyen de cette table, les valeurs des fonctions $F\phi$, $E\phi$.

166. Supposons que la valeur de ϕ soit plus grande que α_1 , elle sera comprise entre deux termes consécutifs de la première colonne; soit a le terme le plus proche, ou au moins celui pour lequel la différence $F\phi - Fa$ est la plus petite, et soit $\phi = a + x$, x étant une différence positive ou négative; si l'on fait en même tems $F(a + x) = Fa + Fy$, l'amplitude y se déterminera trigonométriquement par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} c\sin a &= \sin \zeta, & \tang \psi' &= \cos \zeta \tang(a+x), & y &= \psi' - \psi, \\ c\sin(a+x) &= \sin \zeta', & \tang \psi &= \cos \zeta' \tang a. \end{aligned}$$

on voit qu'il faudra d'abord calculer les angles auxiliaires \mathcal{E} , \mathcal{E}' , ensuite les angles ψ' et ψ , dont la différence est l'angle cherché γ .

Connaissant γ qui sera en général du même ordre que x , et peu supérieur à x (excepté dans le seul cas où c et $\sin \phi$ seront tous les deux peu différens de l'unité), on pourra déterminer $F\gamma$ et $E\gamma$ par les formules qui conviennent aux petites amplitudes, et on en déduira les fonctions cherchées

$$\begin{aligned} F\phi &= Fa + F\gamma, \\ E\phi &= Ea + E\gamma - c^2 \sin a \sin \phi \sin \gamma. \end{aligned}$$

Cette sorte d'interpolation n'exigera en général qu'un calcul assez facile et fondé, comme on voit, sur des formules trigonométriques très-simples.

Si x est négatif, γ le sera aussi; mais d'ailleurs le calcul sera toujours le même. Au reste la faculté qu'on a, suivant les différens cas, de prendre x positif ou négatif, permettra toujours de supposer $F\gamma < \frac{1}{2}Fa$, c'est ce qui aura lieu encore, lorsque ϕ sera moindre que a , mais tel cependant qu'on ait $F\phi > \frac{1}{2}Fa$.

Nous remarquerons que si l'on fait $\sin \omega = \frac{\sin x}{\frac{1}{2}\Delta a + \frac{1}{2}\Delta(a+x)}$, on aura exactement $\sin \gamma = \frac{\sin \omega}{1 + \frac{1}{4}c^2 \sin^2 \omega}$. Par les auxiliaires \mathcal{E} et \mathcal{E}' , on a $\Delta a = \cos \mathcal{E}$, $\Delta(a+x) = \cos \mathcal{E}'$, ainsi l'angle ω , troisième auxiliaire, se trouverait par l'équation $\sin \omega = \frac{\sin x}{\cos(\frac{1}{2}\mathcal{E}' + \frac{1}{2}\mathcal{E}) \cdot \cos(\frac{1}{2}\mathcal{E}' - \frac{1}{2}\mathcal{E})}$; mais il sera presque toujours plus simple de se servir des formules précédentes, quoiqu'elles déterminent l'angle γ par la différence de deux angles beaucoup plus grands ψ' et ψ .

167. Nous avons donné dans le § V des formules pour calculer les fonctions $F\phi$, $E\phi$, lorsque l'amplitude ϕ ne passe pas une certaine limite; mais si γ était très-petit, le calcul de ces formules pourrait être sujet à quelques difficultés, surtout si le module c était en même temps très-petit. Il sera plus simple alors de se servir des formules telles que les donne immédiatement l'intégration par séries; ces formules sont, en supposant que les termes de l'ordre

y' peuvent être négligés,

$$Ey = y - \frac{1}{2}c^2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15}\right) - \frac{1}{8}c^4 \cdot \frac{y^5}{5},$$

$$Fy = y + \frac{1}{2}c^2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15}\right) + \frac{3}{8}c^4 \cdot \frac{y^5}{5}.$$

168. Connaissant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, par la multiplication de la fonction $F\alpha$, il faudra que α_5 s'accorde avec la valeur tirée de l'équation $\tan \alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{b}}$. Cette vérification étant faite, on calculera les termes suivans α_6, α_7 , etc., par les équations complémentaires, savoir: $\cot \alpha_6 = b \tan \alpha_4$, $\cot \alpha_7 = b \tan \alpha_3$, $\cot \alpha_8 = b \tan \alpha_2$, $\cot \alpha_9 = b \tan \alpha$. Il faudra ensuite calculer les fonctions $E\alpha_1, E\alpha_2$, etc., ce qu'on fera par les formules

$$\begin{array}{l|l} p_1 = c^2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & 2E\alpha - E\alpha_2 = p_1 \\ p_2 = c^2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & E\alpha + E\alpha_2 - E\alpha_3 = p_2 \\ p_3 = c^2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 & E\alpha + E\alpha_3 - E\alpha_4 = p_3 \\ p_4 = c^2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_4 \sin \alpha_5 & E\alpha + E\alpha_4 - E\alpha_5 = p_4 \end{array}$$

de ces formules résulte

$$E\alpha = \frac{1}{5} (E\alpha_5 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4);$$

et comme on connaît $E\alpha_5 = \frac{1}{2}E' + \frac{1}{2}(1-b)$, on aura par l'équation précédente la valeur de $E\alpha$; ensuite $E\alpha_2, E\alpha_3, E\alpha_4$, seront données par les équations

$$\begin{array}{l} E\alpha_2 = 2E\alpha - p_1, \\ E\alpha_3 = E\alpha + E\alpha_2 - p_2, \\ E\alpha_4 = E\alpha + E\alpha_3 - p_3. \end{array}$$

Ce calcul se continuera pour les autres amplitudes α_6, α_7 , etc., au moyen des formules

$$\begin{array}{l} E\alpha_6 + E\alpha_4 = E' + c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_6, \\ E\alpha_7 + E\alpha_3 = E' + c^2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_7, \\ E\alpha_8 + E\alpha_2 = E' + c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_8, \\ E\alpha_9 + E\alpha = E' + c^2 \sin \alpha \sin \alpha_9. \end{array}$$

Cette méthode va recevoir les développemens nécessaires dans l'exemple suivant, où les calculs sont faits de manière à obtenir au moins dix décimales exactes dans les résultats.

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 209

169. Afin de mieux juger de l'exactitude de la nouvelle méthode, nous prendrons pour exemple le module $\sin 45^\circ$, d'après lequel la table II a été construite. Voici, dans ce cas, l'échelle des modules réduite à douze décimales :

$c \dots 9,84948 \ 50021 \ 68$	$b \dots 9,84948 \ 50021 \ 68$
$c^\circ \dots 9,23444 \ 86293 \ 24$	$b^\circ \dots 9,99351 \ 18092 \ 42$
$c^{\circ\circ} \dots 7,87330 \ 12255 \ 42$	$b^{\circ\circ} \dots 9,99998 \ 78837 \ 31$
$c^{\circ\circ\circ} \dots 5,14455 \ 45759 \ 39$	$b^{\circ\circ\circ} \dots 9,99999 \ 99999 \ 58$
$c^{\circ\circ\circ\circ} \dots 9,68704 \ 91605 \ 93$	

il faut d'abord déterminer α par l'équation $F\alpha = \frac{1}{16}F'$; et comme on a en général $F\phi = \frac{\Phi}{90^\circ} \cdot F'c$, Φ étant la limite de la suite $\phi, \frac{1}{2}\phi, \frac{1}{4}\phi, \dots$, il faudra faire $\Phi = 9^\circ$; or, pour le degré d'exactitude que nous avons en vue, on peut supposer $\Phi = \frac{1}{16}\phi^{\circ\circ\circ}$; ainsi on aura $\phi^{\circ\circ\circ} = 144^\circ$. De cette valeur on déduira successivement celles de $\phi^{\circ\circ}, \phi^\circ, \phi, \dots$, au moyen des équations $\sin(2\phi^{\circ\circ\circ} - \phi^{\circ\circ\circ}) = c^{\circ\circ\circ}\sin\phi^{\circ\circ\circ}$, $\sin(2\phi^{\circ\circ} - \phi^{\circ\circ}) = c^{\circ\circ}\sin\phi^{\circ\circ}$, etc., dont voici le calcul :

$$\begin{array}{ll} c^4 \dots\dots\dots 9,68704 \ 92 & 2\phi^3 - \phi^4 = \quad 0^\circ 0' 0'',00000 \ 5898 \\ \sin \phi^4 \dots\dots\dots 9,76921 \ 87 & \phi^4 = \quad 144 \\ R'' \dots\dots\dots 5,31442 \ 51 & \phi^{\circ\circ} = \quad 72.0.0,00000 \ 2949 \\ 2\phi^3 - \phi^4 \ 4,77069 \ 30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} c^3 \dots\dots\dots 5,14455 \ 45759 \ 4 & 2\phi^{\circ\circ} - \phi^{\circ\circ} = \quad 2,73644 \ 0659 \\ \sin \phi^3 \dots\dots\dots 9,97820 \ 63255 \ 5 & \phi^{\circ\circ} = \quad 36.0.1,36822 \ 1804 \\ R'' \dots\dots\dots 5,31442 \ 51331 \ 8 & \\ 2\phi^{\circ\circ} - \phi^{\circ\circ} \ 0,43718 \ 60347 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} c^{\circ\circ} \dots\dots\dots 7,87330 \ 12255 \ 42 & (1) \dots\dots\dots 905'',62626 \ 4253 \\ \sin \phi^{\circ\circ} \dots\dots\dots 9,76922 \ 26503 \ 72 & (2) \dots\dots\dots + \quad 290 \ 9682 \\ p \dots\dots\dots 7,64252 \ 38759 \ 14 & 2\phi^\circ - \phi^{\circ\circ} = \quad 15' \ 5'',62917 \ 3935 \\ R'' \dots\dots\dots 5,31442 \ 51331 \ 76 & \phi^{\circ\circ} = \quad 36^\circ \ 0. \ 1,36822 \ 1804 \\ (1) \dots\dots\dots 2,95694 \ 90090 \ 90 & \phi^\circ = \quad 18. \ 7.33,49869 \ 7870 \\ \frac{1}{6}p^3 \dots\dots\dots 4,50689 \ 65 & \\ (2) \dots\dots\dots 7,46384 \ 55 & \end{array}$$

c°	9,23444 86293 24	angle cherché $A = 2\phi - \phi^\circ$,
$\sin \phi^\circ$	9,49291 01476 38	angle approach. $a = 3^\circ 06' = 3^\circ 3' 36''$,
$\sin (2\phi - \phi^\circ)$	8,72735 87769 62	équ. à résoudre $l \sin A = l \sin a - r$,
$\sin a$	8,72739 23169 47	Solution. $p = rM \tan a$,
$r =$	3 35399 85	$A = a - p \left(1 - \frac{p}{\sin 2a} \right)$.

r	5,52556 28641	(1) ...	0'',85156 0817
M	0,36221 56887	(2) ...	3 2976
$\tan a$..	8,72801 19841		0,85152 7841
p	4,61579 05369	a	$3^\circ 3' 36''$
R''	5,31442 51332	$2\phi - \phi^\circ =$	3. 3.35,14847 2159
(1).....	9,93021 56701	$\phi^\circ =$	18. 7.33,49869 7870
p	4,61579 053	$2\phi =$	21.11. 8,64717 0029
$1 : \sin 2a$	0,97219 73	$\alpha = \phi =$	10.35.34,32358 50.
(2).....	5,51820 35		

170. Ayant ainsi déterminé la valeur de α ou α_1 , il faut calculer les termes $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, etc., par les formules connues pour la multiplication des fonctions; savoir: $\tan \frac{1}{2} \alpha_2 = \Delta \tan \alpha, \dots$
 $\tan (\frac{1}{2} \alpha_3 + \frac{1}{2} \alpha_1) = \Delta \tan \alpha_2$, etc.; voici d'abord le calcul de $\Delta \alpha$ ou Δ .

c ...	9,84948 50021 68	$a = 7^\circ, 47$	
$\sin a$	9,26441 40026 72	r	5,83197 06609
$\sin A$	9,11389 90048 40	$\tan^2 a$	8,23533 69554
$\sin a$	9,11396 69206 15	$r \tan^2 a$	4,06730 76163
$r =$	6 79157 75	r	— 6 79158
$l \sin A = l \sin a - r$,		$r \tan^2 a$	— 11676
$l \cos A = l \cos a + R$,		R ...	4,06723 85329
$lR = l(r \tan^2 a) - r - r \tan^2 a$.			
		$\cos a$	9,99629 84428 77
		R ...	11674 507
		Δ ...	9,99629 96103 28

Calcul de α_1 .

$\text{tang } \alpha..$	9,27187 89348 79	$a=10^{\circ} 50'$	$r....$	6,32556 58917
$\Delta....$	9,99629 96103 28	$2a=21.00$	$\frac{1}{2}M..$	0,06118 56930
$\text{tang } \frac{1}{2}\alpha..$	9,26817 85452 07		$p....$	6,38675 15847
$\text{tang } a..$	9,26796 69207 33		$\sin 2a..$	9,55432 91618
$r... \quad \quad \quad$	21 16244 74		$R''... \quad \quad \quad$	5,31442 51332
$l \text{ tang } A = l \text{ tang } a + r,$			(1)...	1,25550 58797
$p = \frac{1}{2}Mr,$			$p....$	6,38675 15847
$A - a = p \sin 2a (1 + p \cos 2a + \frac{2}{3}p^2 \cos 4a).$			$\cos 2a$	9,97015 174
			(2)...	7,61240 920
$a + (1) = 10^{\circ} 30' 18'', 00967 517$			(1).....	1,25550 59
(2)...	409 646		$p^2.....$	2,77350 32
(3)...	53		$\frac{2}{3}.....$	9,82390 87
$\frac{1}{2}\alpha_1.... = 10.30.18,01377 216$			$\cos 4a... \quad \quad \quad$	9,87107 35
$\alpha_1.... = 21. 0.36,02754 43$			(3).....	3,72399 13

Calcul de α_3 .

$\text{tang } \alpha_2$	9,58440 41122 28	$a=20^\circ 85'$	r	5,81548 23192	
Δ	9,99629 96103 28	$2a=41.70$	$\frac{1}{2}M$	0,06118 56930
$\text{tang } A$	9,58070 37225 56	$4a=83.40$	p	5,87666 80122	
$\text{tang } a$	9,58076 91081 87		$\sin 2a$	9,82297 20580		
r	$=$	6 53856 31	R''	5,31442 51332	
$l \text{ tang } A = l \text{ tang } a - r$			(1)	1,01406 52034	
$p = \frac{1}{2}Mr$			p	5,87666 801	
$A = a - p \sin 2a (1 - p \cos 2a + \frac{2}{3}p^2 \cos 4a)$			$\cos 2a$	9,87311 02		
			(2)	6,76384 34	
(1).....	$=$	10'',32916 4724	(1)....	1,01406 5		
(2).....	$=$	58 0557	p^2	1,75333 6	
(3).....	$=$	4	$\frac{2}{3} \cos 4a$	8,88436 9		
$a - A$	$=$	10,32858 417	(3)	1,65177 0	
a	$=$	20° 51' 0''				
A	$=$	20.50.49,67141 583				
$\alpha_3 + \alpha$	$=$	41.41.39,34283 17				
α	$=$	10.35.34,52358 50				
α_3	$=$	31. 6. 5,01924 67				

Calcul de α_4 .

$$\text{tang } a_3 \quad 9,78051 \quad 29931 \quad 86$$

$$\Delta \dots \quad 9,99629 \quad 96103 \quad 28$$

$$\text{tang } A \quad 9,77681 \quad 26035 \quad 14$$

$$\text{tang } a \quad 9,77688 \quad 31645 \quad 69$$

$$r = \quad \quad \quad 7 \quad 05610 \quad 55$$

$$l \text{ tang } A = l \text{ tang } a - r.$$

$$a - (1) \dots = 30^\circ 53' \quad 9'', 23545 \quad 5840$$

$$(2) \dots \quad \quad \quad + \quad \quad 56 \quad 7155$$

$$(3) \dots \quad \quad \quad + \quad \quad \quad 36$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_2) = 30.53. \quad 9,23602 \quad 303$$

$$\alpha_4 = 40.45.42,44450 \quad 18$$

$$r \dots \quad 5,84856 \quad 50655$$

$$\frac{1}{2} M \dots \quad 0,06118 \quad 56930$$

$$p \dots \quad 5,90975 \quad 07585$$

$$\sin 2a \dots \quad 9,94504 \quad 41514$$

$$R'' \dots \quad 5,31442 \quad 51332$$

$$(1) \dots \quad 1,16922 \quad 00431$$

$$p \dots \quad 5,90975 \quad 076$$

$$\cos 2a \dots \quad 9,67473 \quad 108$$

$$(2) \dots \quad 6,75370 \quad 188$$

$$(1) \dots \quad 1,16922 \quad 00$$

$$p^2 \dots \quad 1,81950 \quad 15$$

$$\frac{2}{3} \cos 4a \quad 9,56648 \quad 46$$

$$(3) \dots \quad 2,55520 \quad 61$$

Calcul de α_5 .

$$\text{tang } a_4 \quad 9,93551 \quad 41911 \quad 62$$

$$\Delta \dots \quad 9,99629 \quad 96103 \quad 28$$

$$\text{tang } A \quad 9,93181 \quad 38014 \quad 90$$

$$\text{tang } a \dots \quad 9,93180 \quad 58578 \quad 22$$

$$r = \quad \quad \quad 79436 \quad 68$$

$$l \text{ tang } A = l \text{ tang } a + r.$$

$$a \dots \dots = 40^\circ 51' 12'', 00000 \quad 0000$$

$$(1) \dots \quad \quad \quad 1,86537 \quad 2796$$

$$(2) \dots \quad \quad \quad 2654$$

$$\frac{1}{2} \alpha_5 + \frac{1}{2} \alpha_3 = 40.51.13,86337 \quad 545$$

$$81. \quad 2.27,72675 \quad 09$$

$$\alpha_3 \dots \quad 51. \quad 6. \quad 5,01924 \quad 67$$

$$\alpha_5 \dots \dots = 49.56.22,70750 \quad 42.$$

Par l'équation $\cot \alpha_5 = \sqrt{b}$, on trouve directement.....

$\alpha_5 = 49^\circ 56' 22'', 70750 \quad 516$; la différence n'est que d'une unité

décimale du sixième ordre; or, le sixième ordre de décimales dans les secondes, est le douzième chiffre significatif du nombre entier, puisqu'en réduisant tout en secondes, on a $\alpha_5 = 179782'',7075016$. On ne peut donc pas répondre d'un plus grand degré de précision, en ne donnant que douze décimales aux logarithmes, surtout si l'on considère combien il a fallu d'opérations pour obtenir ce résultat.

171. Pour calculer maintenant les quantités p_1, p_2, p_3, p_4 , il faut connaître les log-sinus des angles $\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$; le premier est déjà connu, le dernier se trouve par la formule $\sin \alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{1+b}}$ $= \frac{\sin 45^\circ}{\cos 22\frac{1}{2}^\circ}$; voici ces logarithmes, d'où l'on déduit ceux des quantités p , et ensuite ces quantités elles-mêmes :

$\sin \alpha_1$	9,26441	40026	72	p_1	7,78232	47333	43	p_1	= 0,00605	79367	32
$\sin \alpha_2$	9,55452	67236	63	p_2	8,23102	65983	97	p_2	= 0,01702	26276	04
$\sin \alpha_3$	9,71311	58677	26	p_3	8,49135	69385	46	p_3	= 0,03099	96605	69
$\sin \alpha_4$	9,81485	70638	12	p_4	8,66211	07270	67	p_4	= 0,04593	15104	20
$\sin \alpha_5$	9,88386	96562	47							0,10001	17353 25

Connaissant la fonction complète $E' = 1,35064$ 38810 48, et la quantité $1 - b = 0,29289$ 32188 24, on trouvera par les formules de l'art. 168

$$\begin{aligned} E\alpha_5 &= 0,82176 \ 85499 \ 31 \\ E\alpha_1 &= 0,18435 \ 60570 \ 512 \\ E\alpha_2 &= 0,36265 \ 41773 \ 704 \\ E\alpha_3 &= 0,52998 \ 76068 \ 176 \\ E\alpha_4 &= 0,68534 \ 40032 \ 998. \end{aligned}$$

172. Il faut maintenant prolonger le calcul de toutes ces quantités pour toutes les amplitudes au-delà de α_5 , savoir: $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$. Or, si les amplitudes φ et ψ sont complémens l'une de l'autre, c'est-à-dire, si l'on a $F\varphi + F\psi = F'c$, non-seulement l'amplitude ψ se déduit de φ , par la formule $\cot \psi = b \tan \varphi$, comme on l'a vu dans l'article 168, mais on a en même tems $\Delta\psi = \frac{b}{\Delta\varphi}$, et $\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{\Delta\varphi \cdot \tan \varphi}$; de sorte que connaissant les logarithmes des quantités $\sin \varphi, \tan \varphi, \Delta\varphi$, pour les amplitudes qui précèdent α_5 ,

on aura immédiatement les logarithmes de ces quantités pour les amplitudes qui suivent α_5 .

D'ailleurs de la valeur connue de $\cot \downarrow$, on déduit celle de l'angle \downarrow , ce qui s'applique successivement aux amplitudes $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$; on aura donc de cette manière les résultats suivans :

$\varphi.$	$l \sin \varphi.$	$l \tan \varphi.$
$\alpha_6 = 58^\circ 38' 10'', 31402 \ 70$	$9,93139 \ 67348 \ 58$	$0,21500 \ 08066 \ 70$
$\alpha_7 = 66.53.52 \ ,77456 \ 17$	$9,96369 \ 70659 \ 98$	$0,37000 \ 20046 \ 46$
$\alpha_8 = 74.48.22 \ ,93725 \ 47$	$9,98454 \ 78550 \ 84$	$0,56611 \ 08856 \ 04$
$\alpha_9 = 82.28. \ 0 \ ,82488 \ 73$	$9,99623 \ 54574 \ 65$	$0,87863 \ 60629 \ 53$

Au moyen des valeurs de $\sin \varphi$, on déterminera les fonctions $E\alpha_6, E\alpha_7$, etc., par les formules de l'art. 168, comme il suit :

$$\begin{array}{ll}
 c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_6 = 0,27875 \ 57297 \ 82 & c^2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_7 = 0,23756 \ 52630 \ 146 \\
 E' \dots \dots = 1,35064 \ 38810 \ 48 & E' \dots \dots = 1,35064 \ 38810 \ 48 \\
 \hline
 & 1,62939 \ 96108 \ 30 \\
 E\alpha_4 \dots \dots = 0,68334 \ 40033 \ 00 & E\alpha_3 \dots \dots = 0,52998 \ 76068 \ 176 \\
 \hline
 E\alpha_6 \dots \dots = 0,94605 \ 56075 \ 30 & E\alpha_7 \dots \dots = 1,05822 \ 15372 \ 45 \\
 \\
 c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_8 = 0,17299 \ 93944 \ 95 & c^2 \sin \alpha \sin \alpha_9 = 0,09112 \ 12071 \ 38 \\
 E' \dots \dots = 1,35064 \ 38810 \ 48 & E' \dots \dots = 1,35064 \ 38810 \ 48 \\
 \hline
 & 1,52364 \ 32755 \ 43 \\
 E\alpha_2 \dots \dots = 0,36265 \ 41773 \ 70 & E\alpha \dots \dots = 0,18435 \ 60570 \ 51 \\
 \hline
 E\alpha_8 \dots \dots = 1,16098 \ 90981 \ 73 & E\alpha_9 \dots \dots = 1,25740 \ 90311 \ 35.
 \end{array}$$

173. Nous avons maintenant tous les élémens qui doivent composer la Table auxiliaire que nous voulions construire; mais pour en rendre l'usage plus commode, il sera bon d'y joindre les valeurs correspondantes de $\log \Delta \varphi$.

On connaît déjà $\Delta(\alpha)$ et $\Delta(\alpha_5) = \sqrt{b}$; on calculera les autres termes par les formules $\Delta\alpha_1 = \frac{\tan \frac{1}{2} \alpha_4}{\tan \alpha_2}$, $\Delta\alpha_3 = \frac{\tan \frac{1}{2} \alpha_6}{\tan \alpha_2}$,

$\Delta\alpha_4 = \frac{\tan \frac{1}{2} \alpha_3}{\tan \alpha_4}$, et les termes complémentaires par la formule générale $\Delta\psi = \frac{b}{\Delta\phi}$.

Voici donc la table complète qui résulte de tous les élémens ainsi calculés.

ϕ .	$E\phi$.	$l \sin \phi$.	$l \tan \phi$.	$l\Delta\phi$.
$\alpha_1 = 10^\circ 35' 24'' 32358$ 50	0,18435 60570 51	9,26441 40026 72	9,27187 89348 79	9,99629 96103 28
$\alpha_2 = 21. 0. 36,02754$ 43	0,36265 41773 70	9,55452 67236 63	9,58440 41122 28	9,98557 47563 52
$\alpha_3 = 31. 6. 5,01924$ 67	0,52998 76068 18	9,71311 58677 26	9,78051 29931 86	9,96890 58085 45
$\alpha_4 = 40. 45. 42,44450$ 18	0,68334 40033 00	9,81485 70638 12	9,93551 41911 62	9,94794 61377 95
$\alpha_5 = 49. 56. 22,70750$ 52	0,82176 85499 31	9,88386 96562 47	0,07525 74989 16	9,92474 25010 84
$\alpha_6 = 58. 38. 10,31402$ 70	0,94605 56075 30	9,93139 67348 58	0,21500 08066 70	9,90153 88643 73
$\alpha_7 = 66. 53. 52,77456$ 17	1,05822 15372 45	9,96369 70659 98	0,37000 20046 46	9,88057 91936 23
$\alpha_8 = 74. 48. 22,93725$ 47	1,16098 90981 73	9,98454 78550 84	0,56611 08856 04	9,86391 02458 16
$\alpha_9 = 82. 28. 0,82488$ 73	1,25740 90311 35	9,99623 54574 65	0,87863 60629 53	9,85318 53918 40
$\alpha_{10} = 90. 0. 0,00000$ 00	1,35064 38810 48	0,00000 00000 00	Infini.	9,84948 50021 68

174. Pour faire voir l'usage de cette table, cherchons la valeur des fonctions F et E, lorsque $\phi = 70^\circ$.

L'amplitude qui dans la table approche le plus de 70° , est $a = 66^\circ 53' 52''$, 77456 17; elle répond à la fonction $Fa = \frac{7}{10} Fc$; il faut donc résoudre l'équation $F\phi = Fa + Fy$, ce qui se fera par les formules

$$\tan \psi' = \Delta a \tan \phi, \tan \psi = \Delta \phi \tan a, y = \psi' - \psi;$$

soit $c \sin \phi = \sin \epsilon$, on aura $l \sin \epsilon = 9,82247$ 08186 11, d'où l'on tire $l \cos \epsilon$ ou $l \Delta \phi = 9,87350$ 72687 63. Par la table, on a immédiatement $\tan a$ et Δa , ainsi $l \tan \psi'$ et $l \tan \psi$, seront donnés comme il suit :

Δa	9,88057 91936 23	$\Delta \phi$	9,87350 72687 63
$\tan \phi$	0,43893 41317 97	$\tan a$	0,37000 20046 46
$\tan \psi'$...	0,31951 33254 20	$\tan \psi$...	0,24350 92734 09

il en résulte

$$\psi' = 64^{\circ} 23' 52'', 11076 \text{ 01}$$

$$\psi = 60.16.54, 80887 \text{ 69}$$

$$y = 4. 6.57, 30188 \text{ 32}$$

Il s'agit maintenant de trouver avec le même degré d'approximation la valeur des fonctions Ey , Fy ; c'est ce qu'on obtiendrait par l'interpolation de la table II; mais pour ne rien emprunter de cette table, nous calculerons directement les valeurs de Ey , Fy , par les formules que donne immédiatement l'intégration, lesquelles en négligeant les termes de l'ordre y^9 seulement, sont:

$$Ey = y - \frac{1}{2} c^2 \cdot \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15} + \frac{2y^7}{315} \right) - \frac{1}{8} c^4 \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2y^7}{21} \right) - \frac{1}{16} c^6 \cdot \frac{y^7}{7},$$

$$Fy = y + \frac{1}{2} c^2 \cdot \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15} + \frac{2y^7}{315} \right) + \frac{3}{8} c^4 \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2y^7}{21} \right) + \frac{5}{16} c^6 \cdot \frac{y^7}{7}.$$

Si l'on y substitue la valeur de c^2 dans notre exemple, savoir : $c^2 = \frac{1}{2}$, elles deviennent

$$Ey = y - \frac{1}{12} y^3 + \frac{1}{96} y^5 + \frac{11}{40320} y^7,$$

$$Fy = y + \frac{1}{12} y^3 + \frac{1}{480} y^5 - \frac{71}{40320} y^7;$$

faisant donc $y = 4^{\circ} 6' 57'', 30188 \text{ 32}$, ce qui donne, après avoir réduit cet arc en parties du rayon

$$\log y = 8,85634 \text{ 39959 78}, \quad y = 0,07183 \text{ 63067 020},$$

on trouvera

$$Ey = 0,07180 \text{ 54342 97},$$

$$Fy = 0,07186 \text{ 72030 06}.$$

Maintenant les valeurs cherchées de $F\phi$ et $E\phi$ se tireront des équations $F\phi = Fa + Fy$, $E\phi = Ea + Ey - c^2 \sin a \sin \phi \sin y$, comme il suit :

$$c^2 \sin \phi \dots\dots\dots 9,67195 \text{ 58207 79}$$

$$\sin a \dots\dots\dots 9,96369 \text{ 70659 98}$$

$$\sin y \dots\dots\dots 8,85597 \text{ 04055 19}$$

$$Z \dots\dots\dots 8,49162 \text{ 32922 96}$$

$$Ea = 1,05822 \text{ 15372 45}$$

$$Ey = 0,07180 \text{ 54342 97}$$

$$1,13002 \text{ 69715 42}$$

$$Z = 0,03101 \text{ 86785 59}$$

$$E\phi = 1,09900 \text{ 82929 83}$$

$$Fa = \frac{7}{10} F'c = 1,29785 \text{ 22741 11}$$

$$Fy \dots\dots\dots = 0,07186 \text{ 72030 06}$$

$$F\phi \dots\dots\dots = 1,36971 \text{ 94771 17}$$

Par la table II, on a $F\phi = 1,36971\ 94771\ 22$, et.....
 $E\phi = 1,09900\ 82929\ 83$, ainsi l'accord est parfait sur la valeur de E , et il n'y a de différence sur celle de F que cinq unités décimales du douzième ordre; erreur facile à expliquer tant par la longueur et la multiplicité des calculs de la dernière méthode, que par l'inexactitude qui peut rester dans le dernier chiffre des nombres de la table II, malgré tout le soin qu'on a pu mettre à la construction de cette table.

175. Dans le calcul du tableau de l'art. 173, nous avons poussé le nombre des décimales jusqu'à douze, afin de mieux établir la comparaison des résultats avec ceux de la table II qui comprend un pareil nombre de décimales: mais le calcul s'abrégérait beaucoup, si l'on voulait se borner à dix ou à un moindre nombre de décimales.

En général, quel que soit le degré d'exactitude qu'on veut obtenir, il faut mettre un soin particulier à l'exacte détermination de l'amplitude α d'après laquelle la table est formée. En supposant, comme nous l'avons fait, $F\alpha = \frac{1}{10}Fc$, il est nécessaire, pour connaître α , d'avoir l'échelle des modules qui résulte du module donné c . La Table VI ci-après donne cette échelle pour tous les angles du module, de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 15° , et ensuite de demi-degré en demi-degré, depuis 15° jusqu'à 45° . Mais cette Table n'est pas de nature à être interpolée, et ne serait d'aucun usage pour les angles du module qui n'y sont pas expressément contenus.

176. Pour obvier à cet inconvénient, nous avons pensé qu'il serait utile de construire une table où l'on trouverait, pour tout angle donné du module, au moins de 0° à 45° , la valeur de α qui donne $F\alpha = \frac{1}{10}Fc$. Dans cette vue, nous avons calculé directement la valeur de α pour tout angle du module de demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 45° ; nous avons ensuite interpolé les résultats en insérant quatre moyens entre deux termes consécutifs. C'est ainsi qu'a été formée la Table VII où l'on trouve la valeur de α pour tout angle du module de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 45° . Cette Table, dans laquelle les quantités α

sont accompagnées de trois ordres de différence, le quatrième étant omis comme inutile ou pouvant être pris à vue, servira à déterminer par interpolation la valeur de α qui satisfait à l'équation $F\alpha = \frac{1}{10} F'c$, pour tout angle donné du module de 0° à 45° , sans qu'il soit besoin de connaître l'échelle des modules correspondante.

On n'a pas prolongé la Table VII au-delà de 45° , parce que l'interpolation deviendrait de plus en plus pénible, à mesure que l'angle du module s'éloignerait de ce terme, et aussi parce que passé 45° , il convient de prendre $F\alpha$ plus petit que $\frac{1}{10} F'c$, et de plus en plus petit, à mesure que l'angle du module devient plus grand. En effet, pour que, suivant l'esprit de la méthode, le calcul des fonctions $E\phi$, $F\phi$, soit ramené à celui de deux autres fonctions $E\gamma$, $F\gamma$, dans lesquelles l'amplitude γ n'excède pas 5 à 6 degrés, il faut que α n'excède pas 12° . D'après cette base, on peut faire $F\alpha = \frac{1}{12} F'c$, depuis $\theta = 45^\circ$, jusqu'à $\theta = 70^\circ$, et $F\alpha = \frac{1}{16} F'c$, depuis $\theta = 70^\circ$, jusqu'à $\theta = 82^\circ$. C'est ce qu'on trouve aisément par l'équation approchée $\frac{M}{c} l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} c\alpha) = nF'c$, dans laquelle substituant les valeurs $n = \frac{1}{12}$, $c = \sin 70^\circ$, on trouve $\alpha = 11^\circ 53'$, de même qu'en faisant $n = \frac{1}{16}$, $c = \sin 82^\circ$, on trouve $\alpha = 11^\circ 58'$.

177. Nous remarquerons que lorsqu'il y aura lieu de supposer $F\alpha = \frac{1}{12} F'c$, cette équation peut être résolue par de simples opérations trigonométriques, sans être obligé de former l'échelle des modules. En effet, l'angle α_4 qui satisfait à l'équation $F\alpha_4 = \frac{1}{3} F'c$, pourra se déterminer par la formule du n° 24, I p.; connaissant α_4 , il faudra employer les formules de la bisection, pour trouver successivement α_2 et α_1 ou α . Ensuite on trouvera les autres termes par les formules de la multiplication qui ne supposent pas connue l'échelle des modules. On pourrait même déterminer ces termes par la simple bisection, savoir : α_6 par la formule ordinaire.... $\tan \alpha_6 = \frac{1}{\sqrt{b}}$, et α_3 par la bisection de $F\alpha_6$. Il resterait à trouver par ces mêmes formules la valeur de α_5 , ce qui peut se faire au moyen de l'équation des complémens qui donne d'abord $\cot \alpha_5 = b \tan \alpha_4$, et ensuite α_5 par la bisection de $F\alpha_5$.

Il sera encore plus facile de résoudre l'équation $F\alpha = \frac{1}{16} F'c$,

puisqu'elle n'exigera que les formules ordinaires de la bissection. Nous en donnerons bientôt un exemple pour le module $\sin 81^\circ$.

178. Pour montrer l'usage de la Table VII, supposons qu'on demande la valeur de α pour le module $\sin \theta = \frac{1}{3}$. De cette valeur du sinus on déduira d'abord l'angle correspondant

$$\theta = 19^\circ,47122\ 06344\ 868;$$

on voit ensuite par la Table, qu'à l'angle du module $19^\circ,4$ répond la valeur $\varphi = 9^\circ 15' 37'',83660\ 10$, et les différences toutes positives

$$\delta\varphi = 9,95614\ 40, \delta^2\varphi = 5677\ 85, \delta^3\varphi = 914, \delta^4\varphi = 8;$$

faisant donc $x = 0,71220\ 6345$, et appliquant la formule ordinaire des interpolations, savoir :

$$\alpha = \varphi + x \left(\delta\varphi - \frac{1-x}{2} \left(\delta^2\varphi - \frac{2-x}{3} \left(\delta^3\varphi - \frac{3-x}{4} \delta^4\varphi \right) \right) \right),$$

on aura

$$\alpha = 9^\circ 15' 44'',92161\ 50.$$

179. Non-seulement la Table VII fait connaître pour chaque module moindre que $\sin 45^\circ$, l'angle α qui donne $F\alpha = \frac{r}{10} F'c$; mais on peut facilement tirer de cette même Table, la valeur correspondante de la fonction $E\alpha$. Voici comment on parvient à la formule nécessaire pour cette détermination.

Si on suppose que pour l'angle θ du module, l'amplitude φ satisfait à l'équation $F\varphi = nF'c$, n étant un nombre fractionnaire constant, φ sera en général une fonction de θ ; et comme $F\varphi$ ou F est fonction de θ et φ , on devra faire $dF = \left(\frac{dF}{d\theta} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \right) d\theta \dots$
 $= \left(\frac{dF}{d\theta} + \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \right) d\theta$, ce qui donnera l'équation

$$\frac{dF}{d\theta} + \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} = n \cdot \frac{dF'}{d\theta};$$

mais en faisant $c = \sin \theta$, les formules de l'art. 43, I p. donnent

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{E - F \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta}, \quad \frac{dF'}{d\theta} = \frac{E' - F' \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta};$$

donc on a

$$E - F \cos^2 \theta = n(E' - F' \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta},$$

ou simplement

$$E = nE' + \sin^2 \theta \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}.$$

Or, pour chaque valeur de θ comprise dans la Table VII, on trouvera immédiatement le coefficient différentiel $\frac{d\varphi}{d\theta}$, par la formule

$$360 \frac{d\varphi}{d\theta} = \delta\varphi - \frac{1}{2} \delta^2\varphi + \frac{1}{3} \delta^3\varphi - \frac{1}{4} \delta^4\varphi,$$

où 360 est mis pour la différence $0^\circ, 1$ des valeurs de θ , parce que les différences $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$, etc., sont exprimées en secondes; quant aux valeurs de θ qui ne sont pas comprises dans la Table, on trouvera également par interpolation les valeurs correspondantes de $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$, etc., comme on l'a vu dans la quatrième partie, tome II, art. 91; donc dans tous les cas, on connaîtra la valeur de $E\alpha$ qui répond à l'équation $F\alpha = \frac{1}{10} F'c$.

Dans l'exemple précédent, l'angle du module 45° est compris dans la Table; mais les différences qui répondent à 45° , dans le sens de l'accroissement de la variable θ , n'existant pas, faute de termes ultérieurs, on y suppléera par les différences dans l'ordre inverse, comme on l'expliquera ci-après art. 193.

On aura alors

$$\delta\varphi = 29,80516 \ 98, \quad \delta^2\varphi = -11285 \ 31, \quad \delta^3\varphi = 44 \ 10, \quad \delta^4\varphi = -30,$$

$$\text{ce qui donnera } \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{29,86174 \ 41}{360} = 0,08294 \ 92892.$$

Substituant ces valeurs, ainsi que celles de $\sin \varphi$, $\tan \varphi$, Δ , dans la formule $E = \frac{1}{10} E' + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cot \varphi}{\Delta} - \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}$, on aura.....
 $E = 0,18435 \ 60577$, ce qui s'accorde suffisamment avec la valeur de $E\alpha$, dans le tableau de l'art. 173.

§ XIV. *Application de la méthode précédente au calcul de la Table particulière pour le module $c = \sin 81^\circ$.*

180. Nous supposerons $F\alpha = \frac{1}{16} F'c$, et nous ferons les calculs avec toute l'exactitude que comportent les Tables à quatorze décimales, par la seule méthode de bisection, sans faire usage de l'échelle des modules, quoique cette échelle se trouve dans la Table VI.

La première bisection de la fonction $F'c$ se fait par les formules connues, $\tan \alpha_8 = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $\sin \alpha_8 = \frac{1}{\sqrt{1+b}} = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 40^\circ \frac{1}{2}}$, $\cos \alpha_8 = \sqrt{\left(\frac{b}{1+b}\right)}$, $\Delta \alpha_8 = \sqrt{b}$, et on a immédiatement les logarithmes de ces quantités, savoir :

$l \tan \alpha_8 = 0,40283 \ 37793 \ 2150$, $l \sin \alpha_8 = 9,96843 \ 94867 \ 9809$, $l \Delta \alpha_8 \dots = 9,59716 \ 62206 \ 7850$, $l \cos \alpha_8 = 9,56560 \ 57074 \ 7659$, les quantités semblables pour α_4 , se déduiront de la formule

$\sin \alpha_4 = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_8}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta \alpha_8\right)}}$; et d'abord pour avoir $\sin \frac{1}{2} \alpha_8$, je cherche

$l(1 + \cos \alpha_8)$ par la formule qui sert à déduire $\log(1+A)$ de $\log A$

$\log A = 9,56560 \ 57074 \ 7659$	$a = \frac{185}{503}$	$1+a \dots 0,13602 \ 04531 \ 7958$
$\log a \dots 9,56560 \ 37433 \ 4709$		$R \dots \dots \dots 5281 \ 4616$
$r = \frac{\quad}{19641 \ 2950}$	$1+a = \frac{688}{503}$	$1+\cos \alpha_8 \frac{0,13602 \ 09813 \ 2574}{0,30102 \ 99956 \ 6398}$
$r \dots \dots 4,29317 \ 01185$		$\cos^2 \frac{1}{2} \alpha_8 \frac{9,83499 \ 09856 \ 6176}{9,91749 \ 54928 \ 3088}$
$1+a \dots 0,13602 \ 04532$		$\cos \frac{1}{2} \alpha_8 \frac{9,66740 \ 94911 \ 3411}{9,74991 \ 39983 \ 0323}$
$r' \dots \dots 4,15714 \ 96653$		
$a \dots \dots 9,56560 \ 37433$		
$\frac{1}{2} r' \dots \dots 7180$		
$R \dots \dots 3,72275 \ 41266$		

De la valeur $\Delta \alpha_8 = \sqrt{b}$, on déduira par un calcul semblable

$$\begin{aligned}
 l(1 + \Delta \alpha_8) \dots &= 0,14473 \ 54334 \ 2026 \\
 &\quad 0,30102 \ 99956 \ 6398 \\
 &\quad 9,84370 \ 54377 \ 5628 \\
 l\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta \alpha_8\right)} &= 9,92185 \ 27188 \ 7814 \\
 l \sin \frac{1}{2} \alpha_8 \dots &= 9,74991 \ 39983 \ 0323 \\
 l \sin \alpha_4 \dots &= 9,82806 \ 12794 \ 2509
 \end{aligned}$$

on trouvera $\cos \alpha_4$ d'une manière abrégée par la formule

$$\cos^2 \alpha_4 = \frac{\Delta}{1+\Delta} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+b}} \right] = \frac{\Delta}{1+\Delta} \cdot \frac{\cos^2 \theta + \cos 45^\circ}{\cos^2 \theta} = \frac{2\Delta}{1+\Delta} \cdot \frac{\cos \frac{90^\circ + \theta}{4} \cos \frac{90^\circ - \theta}{4}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

où l'on a $\theta = 81^\circ$; on aura ensuite $\tan \alpha_4$, et $\Delta(\alpha_4) = \frac{\tan \frac{1}{2} \alpha_8}{\tan \alpha_4}$.

Δ	9,59716	62206	7850
$\frac{2}{1+\Delta}$	0,15629	45622	4372
$\cos \frac{1}{4}(90^\circ + \theta)$...	9,86588	68409	8715
$\cos \frac{1}{4}(90^\circ - \theta)$...	9,99966	50455	5811
$1 : \cos \frac{1}{2} \theta$	0,11895	44846	3008
$\cos^2 \alpha_4$	9,73796	71540	9756
$\cos \alpha_4$	9,86898	35770	4878
$\sin \alpha_4$	9,82806	12794	2509
$\tan \alpha_4$	9,95907	77023	7631
$\tan \frac{1}{2} \alpha_8$	9,83241	85054	7235
$\Delta \alpha_4$	9,87334	08030	9604;

on connaît ainsi toutes les quantités $\sin \alpha_4$, $\cos \alpha_4$, $\tan \alpha_4$, $\Delta \alpha_4$, relatives au terme α_4 .

181. Une troisième bisection donnera les quantités relatives à α_2 , par le calcul des formules successives : $\sin \alpha_2 = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1+\Delta \alpha_4}}$, $\tan \alpha_2 = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_4 \sqrt{2}}{\sqrt{(\Delta \alpha_4 + \cos \alpha_4)}}$, $\Delta \alpha_2 = \frac{\tan \frac{1}{2} \alpha_4}{\tan \alpha_2}$; et pour cela, on fera toujours usage des formules qui donnent $\log(1+A)$ par le moyen de $\log A$; en voici les résultats :

$\sin \alpha_4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$...	9,67754	62815	9310	$\sin \alpha_4$	9,82806	12794	2509
$\sqrt{1+\cos \alpha_4}$..	0,12022	18668	3187	$1+\cos \alpha_4$	0,24044	37336	6374
$\sin \frac{1}{2} \alpha_4$	9,55732	44147	6123	$\tan \frac{1}{2} \alpha_4$	9,58761	75457	6135
$\sqrt{2}$	0,15051	49978	3199				
	9,70783	94125	9322				
$\sqrt{1+\Delta \alpha_4}$...	0,12115	07714	8332				
$\sin \alpha_2$	9,58668	86411	0990	$\sqrt{(\Delta \alpha_4 + \cos \alpha_4)}$..	0,08609	88250	7813
$\cos \alpha_2$	9,96494	80535	9481	$\tan \alpha_2$	9,62174	05875	1509
				$\tan \frac{1}{2} \alpha_4$	9,58761	75457	6135
				$\Delta \alpha_2$	9,96587	69582	4626

On procédera de même au calcul des quantités relatives à α_1 , par les formules $\sin \frac{1}{2} \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + \cos \alpha_2}}$, $\tan \frac{1}{2} \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2}{1 + \cos \alpha_2}$, $\sin \alpha_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \Delta \alpha_2}}$, $\tan \alpha_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{(\Delta \alpha_2 + \cos \alpha_2)}}$, $\Delta \alpha_1 = \frac{\tan \frac{1}{2} \alpha_2}{\tan \alpha_1}$; voici les résultats de ce calcul :

$\sin \alpha_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \dots$	9,43617 36432 7791	$\sin \alpha_1 \dots \dots \dots$	9,58668 86411 0990
$\sqrt{1 + \cos \alpha_2} \dots$	0,14192 87786 1774	$1 + \cos \alpha_2 \dots \dots$	0,28385 75572 3548
$\sin \frac{1}{2} \alpha_2 \dots \dots$	9,29424 48646 6017	$\tan \frac{1}{2} \alpha_2 \dots \dots$	9,30283 10838 7442
$\sqrt{2} \dots \dots \dots$	0,15051 49978 3199		
$\sin \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \sqrt{2} \dots$	9,44475 98624 9216		9,44475 98624 9216
$\sqrt{1 + \Delta \alpha_2} \dots \dots$	0,14215 17623 4500	$\sqrt{(\Delta \alpha_2 + \cos \alpha_2)} \dots$	0,13322 13749 6833
$\sin \alpha_1 \dots \dots \dots$	9,30260 81001 4716	$\tan \alpha_1 \dots \dots \dots$	9,31153 84875 2383
		$\tan \frac{1}{2} \alpha_2 \dots \dots$	9,30283 10838 7442
		$\Delta \alpha_1 \dots \dots \dots$	9,99129 25963 5059.

Jusqu'ici nous n'avons point cherché les valeurs en degrés des angles α_3 , α_4 , α_2 , α_1 , et nous avons déterminé toutes les quantités qui en dépendent, par la seule table des logarithmes des nombres, et par l'application de la formule qui sert à trouver $\log(1+A)$ par le moyen de $\log A$; nous continuerons de suivre cette marche, qui semble la meilleure pour obtenir les résultats les plus exacts, en n'employant non plus que les formules de la bissection, et celles qui sont relatives aux fonctions complémentaires.

182. Les quantités déterminées pour α_4 feront connaître immédiatement les quantités analogues pour son complément α_{12} , au moyen des formules générales $\cot \psi = b \tan \phi$, $\Delta \psi = \frac{b}{\Delta \phi}$, $\sin \psi = \frac{\cos \phi}{\Delta \phi}$, dans lesquelles on fera $\phi = \alpha_4$, $\psi = \alpha_{12}$; on aura ainsi pour α_{12} les logarithmes suivans :

$\tan \alpha_{12} \dots \dots \dots$	0,84658 98562 6669
$\sin \alpha_{12} \dots \dots \dots$	9,99564 27739 5274
$\cos \alpha_{12} \dots \dots \dots$	9,14905 29176 8605
$\Delta(\alpha_{12}) \dots \dots \dots$	9,32099 16382 6096.

D'après ces élémens, on calculera ceux qui conviennent à α_6 , ce qui

donnera les résultats suivans :

$\sin \alpha_{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \dots$	9,84512 77761 2075	$\sin \alpha_{12} \dots$	9,99564 27739 5274
$\sqrt{(1 + \cos \alpha_{12})} \dots$	0,02863 25550 9193	$1 + \cos \alpha_{12} \dots$	0,05726 51101 8386
$\sin \frac{1}{2} \alpha_{12} \dots$	9,81649 52210 2882	$\tan \frac{1}{2} \alpha_{12} \dots$	9,93837 76637 6888
	0,15051 49978 3199		
$\sin \frac{1}{2} \alpha_{12} \cdot \sqrt{2} \dots$	9,96701 02188 6081	\dots	9,96701 02188 6081
$\sqrt{(1 + \Delta \alpha_{12})} \dots$	0,04128 62773 4783	$\sqrt{(\Delta \alpha_{12} + \cos \alpha_{12})} \dots$	9,77225 30854 3341
$\sin \alpha_6 \dots$	9,92572 39415 1298	$\tan \alpha_6 \dots$	0,19475 71334 2740
$\cos \alpha_6 \dots$	9,73096 68080 8558	$\tan \frac{1}{2} \alpha_{12} \dots$	9,93837 76637 6888
		$\Delta \alpha_6 \dots$	9,74362 05303 4148

De ces élémens, on déduira encore par une nouvelle bisection, ceux de α_3 , comme il suit :

$\sin \alpha_6 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \dots$	9,77520 89436 8099	$\sin \alpha_6 \dots$	9,92572 39415 1298
$\sqrt{(1 + \cos \alpha_6)} \dots$	0,09351 04473 6726	$1 + \cos \alpha_6 \dots$	0,18702 08947 3452
$\sin \frac{1}{2} \alpha_6 \dots$	9,68169 84963 1373	$\tan \frac{1}{2} \alpha_6 \dots$	9,73870 30467 7846
	0,15051 49978 3199		
$\sin \frac{1}{2} \alpha_6 \cdot \sqrt{2} \dots$	9,83221 34941 4572	\dots	9,83221 34941 4572
$\sqrt{(1 + \Delta \alpha_6)} \dots$	0,09574 52527 8759	$\sqrt{(\Delta \alpha_6 + \cos \alpha_6)} \dots$	0,01918 48742 6726
$\sin \alpha_3 \dots$	9,73646 82413 5813	$\tan \alpha_3 \dots$	9,81302 86198 7846
$\cos \alpha_3 \dots$	9,92343 96214 7967	$\tan \frac{1}{2} \alpha_6 \dots$	9,73870 30467 7846
		$\Delta \alpha_3 \dots$	9,92567 44269 0000

183. Des élémens de α_6 , on déduit ceux de α_{10} par les formules des complémens, savoir :

$\tan \alpha_{10} \dots$	0,61091 04252 1560
$\sin \alpha_{10} \dots$	9,98734 62777 4410
$\cos \alpha_{10} \dots$	9,37643 58525 2850
$\Delta(\alpha_{10}) \dots$	9,45071 19110 1552

et de ces derniers, on déduit par bisection les élémens de α_5 comme il suit :

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 225

$\sin \alpha_{10} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \dots$	9,83683 12799 1211	$\sin \alpha_{10} \dots$	9,98734 62777 4410
$\sqrt{(1+\cos \alpha_{10})} \dots$	0,04634 67607 6243	$1 + \cos \alpha_{10} \dots$	0,09269 35215 2485
$\sin \frac{1}{2} \alpha_{10} \dots$	9,79048 45191 4968	$\tan \frac{1}{2} \alpha_{10} \dots$	9,89465 27562 1925
	0,15051 49978 3199		
$\sin \frac{1}{2} \alpha_{10} \cdot \sqrt{2} \dots$	9,94099 95169 8167		9,94099 95169 8167
$\sqrt{(1+\Delta \alpha_{10})} \dots$	0,05399 49348 2754	$\sqrt{(\Delta \alpha_{10} + \cos \alpha_{10})} \dots$	9,85809 49234 2723
$\sin \alpha_5 \dots$	9,88700 45821 5413	$\tan \alpha_5 \dots$	0,08290 45935 5444
$\cos \alpha_5 \dots$	9,80409 99885 9969	$\tan \frac{1}{2} \alpha_{10} \dots$	9,89465 27562 1925
		$\Delta \alpha_5 \dots$	9,81174 81626 6481

184. Enfin pour trouver les élémens de α_7 , il faudra d'abord prendre le complément des élémens de α_2 , pour avoir ceux de α_{14} , savoir :

$\tan \alpha_{14} \dots$	1,18392 69711 2791
$\sin \alpha_{14} \dots$	9,99907 10953 4855
$\cos \alpha_{14} \dots$	8,81514 41242 2064
$\Delta \alpha_{14} \dots$	9,22845 54831 1074;

on déduira ensuite de la bissection les résultats suivans :

$\sin \alpha_{14} \sqrt{\frac{1}{2}} \dots$	9,84855 60975 1656	$\sin \alpha_{14} \dots$	9,99907 10953 4855
$\sqrt{(1+\cos \alpha_{14})} \dots$	0,01374 30433 6552	$1 + \cos \alpha_{14} \dots$	0,02748 60867 3105
$\sin \frac{1}{2} \alpha_{14} \dots$	9,83481 30541 5104	$\tan \frac{1}{2} \alpha_{14} \dots$	9,97158 50086 1750
	0,15051 49978 3199		
$\sin \frac{1}{2} \alpha_{14} \cdot \sqrt{2} \dots$	9,98532 80519 8303		9,98532 80519 8303
$\sqrt{(1+\Delta \alpha_{14})} \dots$	0,03394 83922 0521	$\sqrt{(\Delta \alpha_{14} + \cos \alpha_{14})} \dots$	9,68512 34689 4358
$\sin \alpha_7 \dots$	9,95137 96597 7782	$\tan \alpha_7 \dots$	0,30020 45830 3945
		$\tan \frac{1}{2} \alpha_{14} \dots$	9,97158 50086 1750
		$\Delta \alpha_7 \dots$	9,67138 04255 7805

185. Si l'on joint à ces résultats ceux que donnent les formules de complémens appliquées aux amplitudes α_1 , α_3 , α_5 , α_7 , on aura les logarithmes des quantités $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\Delta \alpha$, pour tous les termes de la suite α_1 , α_2 , $\alpha_3 \dots \alpha_{16}$. Il faut maintenant chercher les valeurs correspondantes de la fonction $E\alpha$, ce qui se fera aisément par les log-sinus déjà trouvés. Voici le calcul de ces fonctions, où l'on trouvera de nombreuses vérifications qui prouvent l'exactitude de nos résultats.

Par la Table I, on a $\log E' = 0,01443 \ 21010 \ 0944$, ce qui donne $E' = 1,03378 \ 94623 \ 9087$; substituant cette valeur ainsi que celle de $1 - b = 0,84356 \ 55349 \ 5977$, dans l'équation $E\alpha_8 = \frac{1}{2} E' + \frac{1}{2} (1 - b)$, on aura $E\alpha_8 = 0,93867 \ 74986 \ 7532$. Ce terme va servir à calculer tous les autres.

Calcul de $E\alpha_4$ par la formule $2E\alpha_4 - E\alpha_8 = c^2 \sin^2 \alpha_4 \sin \alpha_8$.

$c^2 \dots$	9,98923 98541 3016	$E\alpha_8 \dots =$	0,93867 74986 7532
$\sin^2 \alpha_4 \dots$	9,65612 25588 5018	$p \dots \dots$	0,41096 22209 6138
$\sin \alpha_8 \dots$	9,96843 94867 9809		1,34963 97196 3670
$p \dots \dots$	9,61380 18997 7843	$E\alpha_4 \dots =$	0,67481 98598 1835

Calcul de $E\alpha_2$ par la formule $2E\alpha_2 - E\alpha_4 = c^2 \sin^2 \alpha_2 \sin \alpha_4$.

$c^2 \dots$	9,98923 98541 3016	$E\alpha_4 \dots =$	0,67481 98598 1835
$\sin^2 \alpha_2 \dots$	9,17337 72822 1980	$p \dots \dots$	0,09787 64965 9827
$\sin \alpha_4 \dots$	9,82806 12794 2509		0,77269 63564 1662
$p \dots \dots$	8,99067 84157 7505	$E\alpha_2 \dots =$	0,38634 81782 0831

Calcul de $E\alpha$ par l'équation $2E\alpha - E\alpha_2 = c^2 \sin^2 \alpha \sin \alpha_2$.

$c^2 \dots$	9,98923 98541 3016	$E\alpha_2 \dots =$	0,38634 81782 0831
$\sin^2 \alpha \dots$	8,60521 62002 9432	$p \dots \dots$	0,01517 55589 3074 6
$\sin \alpha_2 \dots$	9,58668 86411 0990		0,40152 37371 3905 6
$p \dots \dots$	8,18114 46955 3438	$E\alpha \dots =$	0,20076 18685 6952 8

Calcul de $E\alpha_{12}$, 1°. par l'équation $E\alpha_4 + E\alpha_{12} = E' + c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_{12}$.

$c^2 \dots$	9,98923 98541 3016	$E' \dots =$	1,03378 94623 9087
$\sin \alpha_4 \dots$	9,82806 12794 2509	$E\alpha_4 \dots =$	0,67481 98598 1835
$\sin \alpha_{12} \dots$	9,99564 27759 5274		0,35896 96025 7252
$p \dots \dots$	9,81294 39075 0799	$p \dots \dots$	0,65004 57264 8663
		$E\alpha_{12} \dots =$	1,00901 53290 5915

2°. Par l'équation $E\alpha_4 + E\alpha_8 = E\alpha_{12} + c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_8 \sin \alpha_{12}$.

$c^2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_{12} \dots$	9,81294 39075 0799	$E\alpha_8 + E\alpha_4 =$	1,61349 73584 9367
$\sin \alpha_8 \dots$	9,96843 94867 9809	$p \dots \dots =$	0,60448 20294 3456
$p \dots \dots$	9,78138 33943 0608	$E\alpha_{12} \dots =$	1,00901 53290 5911

Milieu entre les deux résult.: $E\alpha_{12} \dots = 1,00901 \ 53290 \ 5913$

Calcul de Ea_6 par l'équation $2Ea_6 - Ea_{12} = c^2 \sin^2 \alpha_6 \sin \alpha_{12}$.

$c^2 \dots$	9,98923	98541	3016	$Ea_{12} \dots$	$=$	1,00901	53290	5913
$\sin^2 \alpha_6$	9,85144	78830	2596	$p \dots$		0,68601	01020	8131
$\sin \alpha_{12}$	9,99564	27739	5274			1,69502	54311	4044
$p \dots$	9,83633	05111	0886	$Ea_6 \dots$	$=$	0,84751	27155	7022

Calcul de Ea_3 par l'équation $2Ea_3 - Ea_6 = c^2 \sin^2 \alpha_3 \sin \alpha_6$.

$c^2 \dots$	9,98923	98541	3016	$Ea_6 \dots$	$=$	0,84751	27155	7022
$\sin^2 \alpha_3$	9,47293	64827	1626	$p \dots$		0,24428	69562	5341
$\sin \alpha_6$	9,92572	39415	1298			1,09179	96718	2363
$p \dots$	9,38790	02783	5940	$Ea_3 \dots$	$=$	0,54589	98359	1181

Calcul de Ea_{10} , 1°. par l'équat. $Ea_6 + Ea_{10} = E' + c^2 \sin \alpha_6 \sin \alpha_{10}$.

$c^2 \dots$	9,98923	98541	3016	$E' - Ea_6$	$=$	0,18627	67468	2065
$\sin \alpha_6$	9,92572	39415	1298	$p \dots$		0,79856	46352	6023
$\sin \alpha_{10}$	9,98734	62777	4410	$Ea_{10} \dots$	$=$	0,98484	13820	8088
$p \dots$	9,90231	00733	8724					

2°. Par l'équation $Ea_2 + Ea_8 = Ea_{10} + c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_8 \sin \alpha_{10}$.

$c^2 \sin \alpha_2$	9,57592	84952	4006	$Ea_2 + Ea_8$	$=$	1,32502	56768	8363
$\sin \alpha_8$	9,96843	94867	9809	$p \dots$		0,34018	42948	0271
$\sin \alpha_{10}$	9,98734	62777	4410	$Ea_{10} \dots$	$=$	0,98484	13820	8091
$p \dots$	9,53171	42597	8225					

Milieu entre les deux résultats: $Ea_{10} = 0,98484 \ 13820 \ 8090$.

Calcul de Ea_5 , 1°. par l'équation $2Ea_5 - Ea_{10} = c^2 \sin^2 \alpha_5 \sin \alpha_{10}$.

$c^2 \dots$	9,98923	98541	3016	$Ea_{10} \dots$	$=$	0,98484	13820	8090
$\sin^2 \alpha_5$	9,77400	91643	0826	$p \dots$		0,56311	26662	8236
$\sin \alpha_{10}$	9,98734	62777	4410			1,54795	40483	6326
$p \dots$	9,75059	52961	8252	$Ea_5 \dots$	$=$	0,77397	70241	8163

2°. Par l'équation $Ea_3 + Ea_5 = Ea_8 + c^2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_5 \sin \alpha_8$.

$c^2 \sin \alpha_3$	9,72570	80954	8829	$Ea_8 - Ea_3$	$=$	0,39277	76627	6350
$\sin \alpha_5$	9,88700	45821	5413	$p \dots$		0,38119	93614	1811
$\sin \alpha_8$	9,96843	94867	9809	$Ea_5 \dots$	$=$	0,77397	70241	8162
$p \dots$	9,58115	21644	4051					

Milieu entre les deux résultats: $Ea_5 = 0,77397 \ 70241 \ 8162 \ 7$.

Calcul de Ea_{14} , 1°. par l'équat. $Ea_2 + Ea_{14} = E^1 + c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_{14}$.

$$\begin{array}{r} c^2 \sin \alpha_2 \quad 9,57592 \quad 84952 \quad 4006 \quad E^1 - Ea_2 = 0,64744 \quad 12841 \quad 8256 \\ \sin \alpha_{14} \quad 9,99907 \quad 10953 \quad 4855 \quad p \dots\dots \quad 0,37583 \quad 70499 \quad 8497 \quad 5 \\ \hline p \dots\dots \quad 9,57499 \quad 95905 \quad 8861 \quad Ea_{14} \dots = 1,02327 \quad 83341 \quad 6753 \quad 5 \end{array}$$

2°. Par l'équation $Ea_6 + Ea_8 = Ea_{14} + c^2 \sin \alpha_6 \sin \alpha_8 \sin \alpha_{14}$.

$$\begin{array}{r} c^2 \sin \alpha_6 \quad 9,91496 \quad 37956 \quad 4314 \quad Ea_8 + Ea_6 = 1,78619 \quad 02142 \quad 4554 \\ \sin \alpha_8 \quad 9,96843 \quad 94867 \quad 9809 \quad p \dots\dots = 0,76291 \quad 18800 \quad 7799 \quad 1 \\ \sin \alpha_{14} \quad 9,99907 \quad 10953 \quad 4855 \quad Ea_{14} \dots = 1,02327 \quad 83341 \quad 6754 \quad 9 \\ \hline p \dots\dots \quad 9,88247 \quad 43777 \quad 8978 \end{array}$$

Milieu entre les deux résultats: $Ea_{14} = 1,02327 \quad 83341 \quad 6754 \quad 2$

Calcul de Ea_7 , 1°. par l'équation $2Ea_7 - Ea_{14} = c^2 \sin^2 \alpha_7 \sin \alpha_{14}$.

$$\begin{array}{r} c^2 \dots\dots \quad 9,98923 \quad 98541 \quad 3016 \quad Ea_{14} \dots = 1,02327 \quad 83341 \quad 6754 \quad 2 \\ \sin^2 \alpha_7 \quad 9,90275 \quad 93195 \quad 5564 \quad p \dots\dots \quad 0,77816 \quad 24478 \quad 7389 \quad 7 \\ \sin \alpha_{14} \quad 9,99907 \quad 10953 \quad 4855 \quad \hline \quad \quad \quad 1,80144 \quad 07820 \quad 4143 \quad 9 \\ p \dots\dots \quad 9,89107 \quad 02690 \quad 3435 \quad Ea_7 \dots = 0,90072 \quad 03910 \quad 2072 \quad 0 \end{array}$$

2°. Par l'équation $Ea_2 + Ea_7 = Ea_8 + c^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_7 \sin \alpha_8$.

$$\begin{array}{r} c^2 \sin \alpha_2 \quad 9,29184 \quad 79542 \quad 7732 \quad Ea_8 - Ea_2 = 0,73791 \quad 56301 \quad 0579 \quad 2 \\ \sin \alpha_7 \quad 9,95137 \quad 96597 \quad 7782 \quad p \dots\dots \quad 0,16280 \quad 47609 \quad 1492 \quad 4 \\ \sin \alpha_8 \quad 9,96843 \quad 94867 \quad 9809 \quad Ea_7 \dots = 0,90072 \quad 03910 \quad 2071 \quad 6 \\ \hline p \dots\dots \quad 9,21166 \quad 71008 \quad 5323 \end{array}$$

Milieu: $Ea_7 = 0,90072 \quad 03910 \quad 2071 \quad 8$.

Calcul de Ea_9 , 1°. par l'équat. $Ea_7 + Ea_9 = E^1 + c^2 \sin \alpha_7 \sin \alpha_9$.

$$\begin{array}{r} c^2 \dots\dots \quad 9,98923 \quad 98541 \quad 3016 \quad E^1 \dots\dots = 1,03378 \quad 94623 \quad 9087 \\ \sin \alpha_7 \quad 9,95137 \quad 96597 \quad 7782 \quad Ea_7 \dots\dots \quad 0,90072 \quad 03910 \quad 2071 \quad 8 \\ \sin \alpha_9 \quad 9,97979 \quad 46511 \quad 6032 \quad \hline \quad \quad \quad 0,13306 \quad 90713 \quad 7015 \quad 2 \\ p \dots\dots \quad 9,92041 \quad 41650 \quad 6830 \quad p \dots\dots \quad 0,83255 \quad 73612 \quad 2633 \quad 7 \\ \hline Ea_9 \dots\dots = 0,96562 \quad 64325 \quad 9648 \quad 9 \end{array}$$

2°. Par l'équation $E\alpha + E\alpha_8 = E\alpha_9 + c^2 \sin \alpha \sin \alpha_8 \sin \alpha_9$.

$c^2 \sin \alpha$	9,29184	79542	7732	$E\alpha_8 + E\alpha$	$=$	1,13943	93672	4485
$\sin \alpha_8$	9,96843	94867	9809	$p \dots \dots$		0,17381	29346	4837 3
$\sin \alpha_9$	9,97979	46511	6032	$E\alpha_9 \dots \dots$	$=$	0,96562	64325	9647 7
$p \dots \dots$	9,24008	20922	3573					

Milieu: $E\alpha_9 = 0,96562 \ 64325 \ 9648 \ 4$.

Calcul de $E\alpha_{11}$, 1°. par l'équat. $E\alpha_5 + E\alpha_{11} = E' + c^2 \sin \alpha_5 \sin \alpha_{11}$.

$c^2 \dots$	9,98923	98541	3016	$E' \dots \dots$	$=$	1,03378	94623	9087
$\sin \alpha_5$	9,88700	45821	5413	$E\alpha_5 \dots \dots$		0,77397	70241	8162 7
$\sin \alpha_{11}$	9,99235	18259	3488			0,25981	24382	0924 3
$p \dots \dots$	9,86859	62622	1917	$p \dots \dots$		0,73891	80274	6592 7
				$E\alpha_{11} \dots \dots$	$=$	0,99873	04656	7517

2°. Par l'équation $E\alpha_3 + E\alpha_8 = E\alpha_{11} + c^2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_8 \sin \alpha_{11}$.

$c^2 \sin \alpha_3$	9,72570	80954	8829	$E\alpha_8 + E\alpha_3$	$=$	1,48457	73345	8713 6
$\sin \alpha_8$	9,96843	94867	9809	$p \dots \dots$		0,48584	68689	1194 1
$\sin \alpha_{11}$	9,99235	18259	3488	$E\alpha_{11} \dots \dots$	$=$	0,99873	04656	7519 5
$p \dots \dots$	9,68649	94082	2126					

Milieu: $E\alpha_{11} = 0,99873 \ 04656 \ 7518 \ 2$.

Calcul de $E\alpha_{13}$, 1°. par l'équat. $E\alpha_3 + E\alpha_{13} = E' + c^2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_{13}$.

$c^2 \sin \alpha_3$	9,72570	80954	8829	$E' - E\alpha_3$	$=$	0,48788	96264	7905 4
$\sin \alpha_{13}$	9,99776	51945	7967	$p \dots \dots$		0,52902	14603	8867 2
$p \dots \dots$	9,72347	32900	6796	$E\alpha_{13} \dots \dots$	$=$	1,01691	10868	6772 6

2°. Par l'équation $E\alpha_5 + E\alpha_8 = E\alpha_{13} + c^2 \sin \alpha_5 \sin \alpha_8 \sin \alpha_{13}$.

$c^2 \sin \alpha_5$	9,87624	44362	8429	$E\alpha_8 + E\alpha_5$	$=$	1,71265	45228	5694 7
$\sin \alpha_8$	9,96843	94867	9809	$p \dots \dots$		0,69574	34359	8921 7
$\sin \alpha_{13}$	9,99776	51945	7967	$E\alpha_{13} \dots \dots$	$=$	1,01691	10868	6773
$p \dots \dots$	9,84244	91176	6205					

Milieu: $E\alpha_{13} = 1,01691 \ 10868 \ 67728$.

Calcul de $E\alpha_{15}$, 1°. par l'équat. $E\alpha + E\alpha_{15} = E' + c^2 \sin \alpha \sin \alpha_{15}$.

$$\begin{array}{r} c^2 \sin \alpha \quad 9,29184 \quad 79542 \quad 7732 \quad E'c - E\alpha = 0,83302 \quad 75938 \quad 2134 \\ \sin \alpha_{15} \quad 9,99977 \quad 70162 \quad 7274 \quad p \dots\dots \quad 0,19571 \quad 53868 \quad 3621 \quad 8 \\ p \dots\dots \quad 9,29162 \quad 49705 \quad 5006 \quad E\alpha_{15} \dots\dots = 1,02874 \quad 29806 \quad 5775 \quad 8 \end{array}$$

2°. Par l'équation $E\alpha_7 + E\alpha_8 = E\alpha_{15} + c^2 \sin \alpha_7 \sin \alpha_8 \sin \alpha_{15}$.

$$\begin{array}{r} c^2 \dots\dots \quad 9,98923 \quad 98541 \quad 3016 \quad E\alpha_7 + E\alpha_8 = 1,83939 \quad 78896 \quad 9603 \quad 8 \\ \sin \alpha_7 \dots\dots \quad 9,95157 \quad 96597 \quad 7782 \quad p \dots\dots \quad 0,81065 \quad 49090 \quad 3848 \quad 4 \\ \sin \alpha_8 \dots\dots \quad 9,96843 \quad 94867 \quad 9809 \quad E\alpha_{15} \dots\dots = 1,02874 \quad 29806 \quad 5755 \quad 4 \\ \sin \alpha_{15} \dots\dots \quad 9,99977 \quad 70162 \quad 7274 \\ p \dots\dots \quad 9,90883 \quad 60169 \quad 7881 \end{array}$$

$$\text{Milieu : } E\alpha_{15} = 1,02874 \quad 29806 \quad 5755 \quad 6$$

186. Il ne reste plus, pour compléter notre tableau, qu'à calculer les valeurs de ϕ , qui répondent aux logarithmes connus de leurs sinus ou de leurs tangentes. Il est préférable pour cet objet, d'employer les log-tangentes, principalement depuis 45° jusqu'à 90° ; on se servira donc des formules suivantes, qui paraissent les plus commodes dans la pratique :

$$\begin{aligned} \log \tan \phi &= \log \tan a + r, \quad p = \frac{1}{2} Mr, \\ \phi - a &= p \sin 2a (1 + p \cos 2a + \frac{2}{3} p^2 \cos 4a). \end{aligned}$$

Pour cet effet, on prendra dans la *Trig. brit.*, l'angle a , tel que $\log \tan a$ approche le plus qu'il est possible, en plus ou en moins, de $\log \tan \phi$; on calculera avec les Tables à dix décimales, le premier terme (1) $= p \sin 2a$, qu'on aura soin de multiplier par R° , pour exprimer la correction (1) en parties décimales de degré, jusqu'au douzième ordre au moins; de là on déduira les deux autres corrections (2) $= (1) \cdot p \cos 2a$, (3) $= (1) \cdot \frac{2}{3} p^2 \cos 4a$, et du tout on formera la valeur de $\phi - a$, en observant les signes que doivent avoir les termes, suivant ceux des facteurs p , $\cos 2a$, $\cos 4a$.

C'est ainsi qu'ont été calculées les valeurs de ϕ qu'on voit dans la Table; elles sont bornées à la douzième décimale de degré, ce qui est un degré de précision correspondant aux quatorze décimales des log-tangentes.

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 231

Voici un des calculs de ce genre que nous donnons pour exemple.

$$\begin{array}{rcl} \varphi = \alpha_4 \dots \dots l \operatorname{tang} \varphi & = & 9,95907 \ 77023 \ 7631 \\ \text{angle approx. } a = 42^\circ, 30 \dots l \operatorname{tang} a & = & 9,95900 \ 79781 \ 2573 \\ l \operatorname{tang} A = l \operatorname{tang} a + r \dots r & = & \underline{6 \ 97242 \ 5058} \\ \\ r \dots 5,84338 \ 38549 \ 9 & | & 2a = 84.60 \ | \ a + (1) = 42^\circ 30' 45'' \ 88928 \ 051 \\ \frac{1}{2} M \dots 0,06118 \ 56930 \ 4 & | & 4a = 169.20 \ | \ (2) \ + \ 345 \ 906 \\ p \dots 5,90456 \ 95480 \ 3 & & (3) \ - \ 193 \\ \sin 2a \ 9,99806 \ 82960 \ 5 & & \varphi = 42,30457 \ 89273 \ 764 \\ R^\circ \dots 1,75812 \ 26324 \ 1 \\ \\ (1) \dots 7,66076 \ 04764 \ 9 & \dots \dots & 7,66076 \ 0 \\ p \dots 5,90456 \ 9548 & p^2 \dots & 1,80913 \ 9 \\ \cos 2a \ 8,97362 \ 799 & \frac{2}{3} \cos 4a & 9,81614 \ 7 \\ (2) \dots 2,53895 \ 801 & (3) \dots & 9,28594 \ 6. \end{array}$$

187. La formule dont nous venons de donner une application suppose qu'on peut négliger les termes de l'ordre p^4 , ce qui aura toujours lieu lorsque l'angle φ sera au-dessus de 5° . Dans tout autre cas, la quantité $\operatorname{tang} \varphi$ étant très-petite, on fera $\operatorname{tang} \varphi = t$, et on calculera φ par la suite ordinaire $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.}$, dont tous les termes devront être multipliés par R° , et qui sera alors fort convergente. On ferait la même chose pour $\operatorname{tang}(90^\circ - \varphi)$, si φ était très-près de 90° .

Par exemple, pour calculer l'angle α_{15} par le moyen de son $\log \operatorname{tang}$., soit A le complément de α_{15} et $\operatorname{tang} A = t$; on aura

$$\log t = 8,50587 \ 09288 \ 8083,$$

et $A = R^\circ t (1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \frac{1}{9}t^8)$. Voici les logarithmes de ces cinq termes, et les nombres correspondans exprimés en degrés et décimales de degré.

(1)... 0,26399 35612 9000	(1) = 1° 83651 11156 2465
(2)... 6,79861 41643 3	(2)... — 62 89471 6567
	1,83588 21684 5898
(3)... 3,58850 7272	(3)... + 3877 1024
	25561 6922
(4)... 0,45412 11	(4)... — 2 8452
	25558 8470
(5)... 7,35672	(5)... + 23
	A = 1,83588 25558 8493
	donc $\alpha_{15} = 88° 16411 74441 1507$.

188. Au moyen du tableau que nous venons de construire, la détermination des fonctions E et F pour toute amplitude proposée φ , peut être ramenée immédiatement aux cas où l'amplitude proposée est moindre que 6° ; car en choisissant pour a le terme de la table qui approche le plus de φ (celui au moins pour lequel la différence $F\varphi - Fa$ est la plus petite), on aura toujours $F\varphi - Fa$, ou $F\gamma < \frac{1}{31}F'c$, et par conséquent $\gamma < 6^\circ$.

Nous avons donné dans l'art. 174 les formules nécessaires pour calculer les valeurs des fonctions $E\gamma$ et $F\gamma$, lorsque l'angle γ est d'un petit nombre de degrés. Mais lorsque γ approchera de la limite 6° , ces formules, dans lesquelles on a négligé les termes de l'ordre γ^3 , ne pourront guère donner que dix décimales exactes, et il faudrait les prolonger jusqu'aux termes γ^{11} ou même γ^{13} , pour avoir un degré d'exactitude égal à celui de notre tableau. Pour éviter cet inconvénient, et réduire tous les calculs aux formules ordinaires d'interpolation, il faudra construire une seconde table qui contienne les valeurs des fonctions E et F pour des amplitudes croissant par de petits intervalles, depuis 0° jusqu'à 6° .

Cette table, que nous appellerons la table n° 2, pour la distinguer de la table n° 1, que nous avons déjà construite, peut se calculer de demi-degré en demi-degré, par les formules de l'article cité, sauf à leur donner plus d'étendue, lorsque l'angle γ devient plus grand; mais nous préférons de la calculer ici par la méthode du § IV, qui peut également servir à calculer la table principale n° 1.

Il suffira pour notre objet de calculer les valeurs de ϕ et de $E\phi$ qui répondent aux différentes valeurs $n=1, 2, 3, \dots, 12$, dans l'équation $F\phi = \frac{n}{12} \cdot \frac{F'c}{32}$; car de cette manière les valeurs de ϕ croîtront par des intervalles moindres qu'un demi-degré, et l'interpolation pourra être faite avec toute l'exactitude qu'on peut desirer, pour toute valeur de n moindre que 12.

189. Cherchons d'abord l'amplitude \mathcal{C} qui satisfait à l'équation $F\mathcal{C} = \frac{1}{12} \cdot \frac{F'c}{32} = t$, où l'on a $\log t = 7,92826 \ 01863 \ 4903$. Le moyen le plus simple est de résoudre l'équation suivante dans laquelle on a négligé les quantités de l'ordre \mathcal{C}' qui n'entrent pas dans les quatorze premières décimales.

$$F\mathcal{C} = \mathcal{C} + \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{\mathcal{C}^3}{3} - \frac{\mathcal{C}^5}{15} \right) + \frac{3c^4}{40} \mathcal{C}^5 = t;$$

on en tire

$$\mathcal{C} = t - \frac{1}{6} c^2 t^3 + \frac{c^2}{30} t^5 + \frac{c^4}{120} t^5;$$

ensuite on aura $E\mathcal{C}$ par l'équation

$$E\mathcal{C} + F\mathcal{C} = 2\mathcal{C} + \frac{c^4}{20} \mathcal{C}^5;$$

substituant la valeur connue de t , il en résulte

$$\mathcal{C} = 0,00847 \ 72523 \ 60254$$

$$F\mathcal{C} = 0,00847 \ 73514 \ 11832$$

$$E\mathcal{C} = 0,00847 \ 71533 \ 10760,$$

on aura en même tems la formule

$$\log \mathcal{C} = \log t - \frac{mc^2}{6} t^2 + \frac{mc^2}{30} t^4 - \frac{mc^4}{180} t^4,$$

d'où l'on déduit la valeur de \mathcal{C} en parties décimales de degré, comme il suit :

$$\mathcal{C} \dots 7,92825 \ 51119 \ 09746$$

$$R^\circ \dots \underline{1,75812 \ 26324 \ 09172}$$

$$9,68637 \ 77443 \ 18918$$

$$\mathcal{C} \dots = 0^\circ 48571 \ 07821 \ 09868.$$

Maintenant, pour construire la table dont il s'agit, il faut reprendre les formules de l'art. 94 ci-dessus.

190. Soient φ^0 , φ , φ' , trois termes consécutifs de la suite ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , etc. qui répond aux valeurs successives $n=1, 2, 3$, etc.; on déterminera k par l'équation $\frac{V^k}{1+k} = \frac{1}{2}c \sin \zeta = \frac{1}{2}p$, qui donne

$$\log k = \log \frac{p^2}{4} + m \left(\frac{1}{2} \cdot p^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{p}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{p^3}{3} + \text{etc.} \right);$$

si ensuite on fait $\delta^2 \varphi^0 = -2\omega$, on aura pour déterminer ω l'équation

$$\sin \omega = k \sin (2\varphi - \omega),$$

ou la série

$$\omega = k \sin 2\varphi - \frac{1}{2} k^2 \sin 4\varphi + \frac{1}{3} k^3 \sin 6\varphi - \text{etc.}$$

Enfin pour déterminer $E\varphi'$, on observera qu'à l'équation $F\varphi + F\zeta = F\varphi'$, correspond l'équation $E\zeta + E\varphi = E\varphi' + c^2 \sin \zeta \sin \varphi \sin \varphi'$, d'où résulte

$$E\varphi' = E\zeta + E\varphi - c^2 \sin \zeta \sin \varphi \sin \varphi';$$

quant aux coefficients qui entrent dans ces équations, voici leurs logarithmes :

k	5,24369	49064	2596
kR^0	7,00181	75388	3513
$\frac{1}{2}k^2R^0$..	1,94448	24496	
$\frac{1}{3}k^3R^0$..	7,01208	6	
$\sin \zeta$...	7,92824	99102	2144
$c^2 \sin \zeta$.	7,91748	97643	5160.

191. D'après ces formules, nous allons procéder aux calculs nécessaires pour former la table n° 2.

Calcul de ζ_2 et $E\zeta_2$.

Il faut, dans les formules, faire $\varphi^0 = 0$, $\varphi = \zeta$, et on aura $\varphi' = \zeta$. On observera d'ailleurs que les tables à dix décimales suffisent pour calculer le premier terme de la valeur de ω ; mais à cause de la petitesse de l'angle 2φ , il conviendra de calculer son log-sinus par la formule du n° 147, et on aura la valeur de ζ_2 par le calcul suivant :

$\sin 2\phi$. 8,22926 43006 7	(1)... = 0°00001 70247 92974
kR° ... 7,00181 75388 3	(2)... — 2 98342
(1)..... 5,23108 18395	(3)... + 5
	ω = 0,00001 70244 94637
$\sin 4\phi$. 8,53023 19	$\delta^2\phi$.. = —0,00003 40489 89274
$\frac{1}{2}k^2R^\circ$. 1,94448 24	$\delta\phi$... = 0,48571 07821 09868
(2).... 0,47471 43	$\delta\phi$... = 0,48567 67331 20594
	ϕ = 0,48571 07821 09868
$\sin 6\phi$. 8,70622	$\mathcal{E}_2 = \phi' = 0,97138 75152 30462$
$\frac{1}{3}k^2R^\circ$. 7,01209	
(3).... 5,71831.	

Pour avoir $E\mathcal{E}_2$, il faut calculer le terme $c^2 \sin \mathcal{E} \sin \phi \sin \phi'$, ou $c^2 \sin^2 \mathcal{E} \sin \phi'$; mais, dans la vue de faciliter le calcul de \mathcal{E}_3 , on cherchera à la fois les logarithmes de $\sin \phi'$ et $\cos \phi'$, par les formules de l'art. 147, ce qui donnera les résultats suivants :

$R^\circ\phi'.....$	9,98739 25174 0	ϕ'^2	6,45853 97700	
$R^\circ.....$	1,75812 26324 1		9,33675 43156	
$\phi'.....$	8,22926 98849 9	(1)	5,79529 40856	
(1)... =	0,00006 24157 343	ϕ'^4	2,91707 95	ϕ'^6 9,37562
(2)...	29 901		8,55860 31	7,98457
(3)...	2	(2)	1,47568 26	(3) 7,36019
$\cos\phi'..$	0,00006 24187 246			

$\frac{1}{3}(1) = 0,00002 08052 448$	$c^2 \sin^2 \mathcal{E}$ 5,84573 96746
$\frac{1}{15}(2)$. 1 993	$\sin \phi'$ 8,22924 90795
2 08054 441	Z 4,07498 87541
ϕ' 8,22926 98849 9	
$\sin \phi'$.. 8,22924 90795 46	$2E\mathcal{E}$ = 0,01695 43066 2152
$\cos \phi'$. — 6 24187 25	Z 11884 7145
2..... 0,30102 99956 64	$E\mathcal{E}_2 = E\phi' = 0,01695 31181 5007$
$\sin 2\phi'$.. 8,53021 66564 85	

Calcul de \mathcal{C}_3 et $E\mathcal{C}_3$.

Il faut, dans les formules, faire $\varphi^\circ = \mathcal{C}$, $\varphi = \mathcal{C}_2$, et on aura $\varphi' = \mathcal{C}_3$. Dans ce cas, $\sin 2\varphi$ devient ce qu'était $\sin 2\varphi'$ dans le cas précédent.

$\sin 2\varphi \dots$	$8,53021 \ 66564 \ 85$	(1)...	$=$	$0^{\circ}00003 \ 40434 \ 99370$
$kR^\circ \dots$	$7,00181 \ 75388 \ 35$	(2)...	$-$	$5 \ 96320$
(1).....	$5,53203 \ 41953 \ 20$	(3)...	$+$	10
$4\varphi \dots =$	$3^{\circ}53'7''98$	$\omega \dots =$		$0,00003 \ 40429 \ 03060$
$\sin 4\varphi \dots$	$8,83099 \ 70$	$\delta^2\varphi^\circ \dots =$		$-0,00006 \ 80858 \ 06120$
	$1,94448 \ 24$	$\delta\varphi^\circ \dots$		$0,48567 \ 67331 \ 20594$
(2).....	$0,77547 \ 94$	$\delta\varphi \dots =$		$0,48560 \ 86473 \ 14474$
$6\varphi \dots =$	$5^{\circ}49'42''$	$\varphi \dots =$		$0,97138 \ 75152 \ 30462$
$\sin 6\varphi \dots$	$9,00667$	$\mathcal{C}_3 = \varphi' =$		$1,45699 \ 61625 \ 44936$
	$7,01208$	$c^2 \sin \mathcal{C} \dots$		$7,91748 \ 97643 \ 5$
(3).....	$6,01875$	$\sin \varphi \dots$		$8,22924 \ 90795 \ 5$
		$\sin \varphi' \dots$		$8,40528 \ 89681 \ 5$
		$z \dots$		$4,55202 \ 78120 \ 5$
$\sin \varphi' \dots$	$8,40528 \ 89681 \ 51$	$E\varphi \dots =$		$0,01695 \ 31181 \ 5007$
$\cos \varphi' \dots$	$- \ 14 \ 04341 \ 06$	$E\mathcal{C} \dots$		$847 \ 71533 \ 1076$
$2 \dots$	$0,30102 \ 99956 \ 64$	$z \dots$		$- \ 35647 \ 3961$
$\sin 2\varphi' \dots$	$8,70617 \ 85297 \ 09$	$E\mathcal{C}_3 = E\varphi' =$		$0,02542 \ 67067 \ 2122$

Calcul de \mathcal{C}_4 et $E\mathcal{C}_4$.

Il faudra faire $\varphi^\circ = \mathcal{C}_2$, $\varphi = \mathcal{C}_3$, et on aura $\varphi' = \mathcal{C}_4$. Voici le calcul d'après ces données, en suivant la même marche que dans le cas précédent.

$\sin 2\varphi \dots$	$8,70617 \ 85297 \ 09$	(1)...	$=$	$0,00005 \ 10500 \ 37866 \ 0$
$kR^\circ \dots$	$7,00181 \ 75388 \ 35$	(2)...	$-$	$8 \ 93570 \ 7$
(1).....	$5,70799 \ 60685 \ 44$	(3)...	$+$	$15 \ 6$
$4\varphi \dots =$	$5^{\circ}49'40''74$	$\omega \dots =$		$0,00005 \ 10491 \ 44311$
$\sin 4\varphi \dots$	$9,00664 \ 65$	$\delta^2\varphi^\circ \dots =$		$-0,00010 \ 20982 \ 88622$
	$1,94448 \ 24$	$\delta\varphi^\circ \dots$		$0,48560 \ 86473 \ 14474$
(2).....	$0,95112 \ 89$	$\delta\varphi \dots$		$0,48550 \ 65490 \ 25852$
$6\varphi \dots =$	$8^{\circ}44'31''12$	$\varphi \dots$		$1,45699 \ 61625 \ 44936$
$\sin 6\varphi \dots$	$9,18180$	$\mathcal{C}_4 = \varphi' =$		$1,94250 \ 27115 \ 70788$
	$7,01208$			
(3).....	$6,19388$			

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 237

$\sin \phi' \dots$	$8,53015 \ 58004 \ 64$	$c \sin \phi$	$7,91748 \ 97643 \ 52$
$\cos \phi' \dots$	$\frac{24 \ 96407 \ 81}{8,52990 \ 61596 \ 83}$	$\sin \phi.$	$8,40528 \ 89681 \ 51$
	$0,30102 \ 99956 \ 64$	$\sin \phi'.$	$8,53015 \ 58004 \ 64$
$\sin 2\phi' \dots$	$\frac{8,83093 \ 61553 \ 47}{8,83093 \ 61553 \ 47}$	$\gamma \dots$	$\frac{4,85293 \ 45329 \ 67}{4,85293 \ 45329 \ 67}$

$$\begin{aligned} E\phi \dots &= 0,02542 \ 67067 \ 2122 \\ E\phi \dots &\quad \frac{847 \ 71533 \ 1076}{0,03390 \ 38600 \ 3198} \\ \gamma \dots &\quad \frac{71274 \ 55803}{0,03389 \ 67325 \ 76177} \\ E\phi_4 = E\phi' &= 0,03389 \ 67325 \ 76177 \end{aligned}$$

Calcul de ϕ_3 et $E\phi_3$.

Il faut faire dans les formules $\phi = \phi_3$, $\phi = \phi_4$, $\phi' = \phi_5$, ce qui donnera les résultats suivans :

$\sin 2\phi \dots$	$8,85093 \ 61553 \ 47$	(1)...	$0,00006 \ 80383 \ 37650$
$kR^\circ \dots$	$7,00181 \ 75388 \ 35$	(2)...	$\frac{11 \ 89733}{21}$
(1).....	$\frac{5,83275 \ 36941 \ 82}{4\phi \dots = 7^\circ 46' 12'' 039}$	(3)...	$\frac{+}{0,00006 \ 80371 \ 47938}$
$\sin 4\phi \dots$	$\frac{9,13096 \ 70}{1,94448 \ 24}$	$\omega \dots =$	$\frac{0,00013 \ 60742 \ 95876}{0,48550 \ 65490 \ 25852}$
(2).....	$\frac{1,07544 \ 94}{6\phi \dots = 11^\circ 39' 18''}$	$\delta \phi \dots$	$\frac{0,48537 \ 04747 \ 29976}{0,48537 \ 04747 \ 29976}$
$\sin 6\phi \dots$	$\frac{9,30539}{7,01208}$	$\phi \dots$	$\frac{1,94250 \ 27115 \ 70788}{2,42787 \ 31863 \ 00764}$
(3).....	$\frac{6,31747}{\sin \phi' \dots 8,62697 \ 33896 \ 30}$	$\phi_5 = \phi' =$	$\frac{2,42787 \ 31863 \ 00764}{c \sin \phi \ 7,91748 \ 97643 \ 52}$
$\cos \phi' \dots$	$\frac{39 \ 00237 \ 56}{8,62658 \ 33658 \ 74}$	$\sin \phi \dots$	$\frac{8,53015 \ 58004 \ 64}{\sin \phi' \ 8,62697 \ 33896 \ 30}$
$\sin 2\phi' \dots$	$\frac{0,30102 \ 99956 \ 64}{8,92761 \ 33615 \ 38}$	$\gamma \dots$	$\frac{5,07461 \ 89544 \ 46}{E\phi \dots = 0,03389 \ 67325 \ 76177}$
		$E\phi \dots$	$\frac{847 \ 71533 \ 10760}{0,04237 \ 38858 \ 86937}$
		$\gamma \dots$	$\frac{1 \ 18745 \ 99050}{E\phi_5 = E\phi' = 0,04236 \ 20112 \ 87887}$

Calcul de \mathcal{C}_6 et $E\mathcal{C}_6$.Il faut faire $\varphi^\circ = \mathcal{C}_4$, $\varphi = \mathcal{C}_5$, $\varphi' = \mathcal{C}_6$.

$\sin 2\varphi \dots$	$8,92761 \ 33615 \ 38$	(1) ..	$0^\circ 00008 \ 50023 \ 43709$
$kR^\circ \dots$	$7,00181 \ 75388 \ 35$	(2) ..	— $14 \ 84446$
(1)	$5,92943 \ 09003 \ 73$	(3) ..	$+$ 26
$4\varphi \dots =$	$9^\circ 42' 41'' 374$	$\omega \dots =$	$0,00008 \ 50008 \ 59289$
$\sin 4\varphi \dots$	$9,22708 \ 19$	$\delta^2 \varphi^\circ =$	$-0,00017 \ 00017 \ 18578$
	$1,94448 \ 24$	$\delta \varphi^\circ \dots$	$0,48537 \ 04747 \ 29976$
(2)	$1,17156 \ 43$	$\delta \varphi \dots$	$0,48520 \ 04730 \ 11398$
$6\varphi \dots =$	$14^\circ 34' 2''$	$\varphi \dots$	$2,42787 \ 31863 \ 00764$
$\sin 6\varphi \dots$	$9,40056 \ 5$	$\mathcal{C}_6 = \varphi' =$	$2,91307 \ 36593 \ 12162$
	$7,01208 \ 6$		
(3)	$6,41265 \ 1$	$c^2 \sin \mathcal{C}$	$7,91748 \ 97643 \ 52$
$\sin \varphi' \dots$	$8,70604 \ 17102 \ 24$	$\sin \varphi \dots$	$8,62697 \ 33896 \ 30$
$\cos \varphi' \dots$	— $56 \ 15638 \ 97$	$\sin \varphi' \dots$	$8,70604 \ 17102 \ 24$
	$8,70548 \ 01463 \ 27$	$\gamma \dots$	$5,25050 \ 48642 \ 06$
	$0,30102 \ 99956 \ 64$	$E\varphi \dots =$	$0,04236 \ 20112 \ 87887$
$\sin 2\varphi' \dots$	$9,00651 \ 01419 \ 91$	$E\mathcal{C} \dots$	$847 \ 71533 \ 10760$
			$0,05083 \ 91645 \ 98647$
		$\gamma \dots$	$1 \ 78034 \ 78498$
		$E\mathcal{C}_6 = E\varphi' =$	$0,05082 \ 13611 \ 20149$

Calcul de \mathcal{C}_7 et $E\mathcal{C}_7$.Il faut faire $\varphi^\circ = \mathcal{C}_5$, $\varphi = \mathcal{C}_6$, $\varphi' = \mathcal{C}_7$.

$\sin 2\varphi \dots$	$9,00651 \ 01419 \ 91$	(1) ..	$0^\circ 00010 \ 19360 \ 21849$
$kR^\circ \dots$	$7,00181 \ 75388 \ 35$	(2) ..	— $17 \ 77351$
(1)	$6,00832 \ 76808 \ 26$	(3) ..	$+$ 31
$4\varphi \dots =$	$11^\circ 39' 8'' 26$	$\omega \dots =$	$0,00010 \ 19342 \ 44529$
$\sin 4\varphi \dots$	$9,30529 \ 09$	$\delta^2 \varphi^\circ =$	$-0,00020 \ 38684 \ 89058$
	$1,94448 \ 24$	$\delta \varphi^\circ \dots$	$0,48520 \ 04730 \ 11398$
(2)	$1,24977 \ 33$	$\delta \varphi \dots$	$0,48499 \ 66045 \ 22340$
$6\varphi \dots =$	$17^\circ 28' 42'' 4$	$\varphi \dots$	$2,91307 \ 36593 \ 12162$
$\sin 6\varphi \dots$	$9,47763 \ 6$	$\mathcal{C}_7 = \varphi' =$	$3,39807 \ 02638 \ 34502$
	$7,01208 \ 6$		
(3)	$6,48972 \ 2$		

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 239

$\sin \phi' \dots$	8,77285 50959 69	$c^2 \sin \epsilon$	7,91748 97643 52
$\cos \phi' \dots$	— 76 42378 12	$\sin \phi.$	8,70604 17102 24
	8,77209 08581 57	$\sin \phi'.$	8,77285 50959 69
	0,30102 99956 64	$\gamma \dots$	5,39638 65705 45
$\sin 2\phi' \dots$	9,07312 08538 21	$E\phi \dots =$	0,05082 13611 20149
		$E\epsilon \dots$	847 71533 10760
			0,05929 85144 30909
		$\gamma \dots$	2 49107 36652
		$E\epsilon_7 = E\phi' =$	0,05927 36036 94257

Calcul de ϵ_8 et $E\epsilon_8$.

Il faut faire $\phi^0 = \epsilon_8$, $\phi = \epsilon_7$, $\phi' = \epsilon_8$.

$\sin 2\phi \dots$	9,07312 08538 21	(1) .. =	0°00011 88333 64304
$kR^0 \dots$	7,00181 75388 35	(2) ..	— 20 68097
(1)	6,07493 83926 56	(3) ..	+ 36
$4\phi \dots =$	13°35'32"212	$\omega \dots =$	0,00011 88312 96243
$\sin 4\phi \dots$	9,37108 85	$\delta^2 \phi^0 =$	— 0,00023 76625 92486
	1,94448 24	$\delta \phi^0 \dots$	0,48499 66045 22340
(2)	1,31557 09	$\delta \phi \dots$	0,48475 89419 29854
$6\phi \dots =$	20°23'18"3	$\phi \dots$	3,39807 02638 34502
$\sin 6\phi \dots$	9,54205 6	$\phi' \dots =$	3,88282 92057 64356
	7,01208 6		
(3)	6,55414 2	$c^2 \sin \epsilon$	7,91748 97643 52
$\sin \phi' \dots$	8,83069 31864 41	$\sin \phi.$	8,77285 50959 69
$\cos \phi' \dots$	— 99 80178 85	$\sin \phi'.$	8,83069 31864 41
	8,82969 51685 56	$\gamma \dots$	5,52103 80467 62
	0,30102 99956 64	$E\phi \dots =$	0,05927 36036 94257
$\sin 2\phi' \dots$	9,13072 51642 20	$E\epsilon \dots$	847 71533 10760
			0,06775 07570 05017
		$\gamma \dots$	3 31923 53474
		$E\epsilon_8 = E\phi' =$	0,06771 75646 51543

Calcul de \mathcal{C}_9 et $E\mathcal{C}_9$.On fera dans les formules $\varphi^\circ = \mathcal{C}_9$, $\varphi = \mathcal{C}_9$, $\varphi' = \mathcal{C}_9$.

$\sin 2\varphi \dots$	9,13072 51642 20	(1) .. =	0°00013 56883 942635
$kR^\circ \dots$	7,00181 75388 35	(2) ..	— 23 563310
(1)	6,13254 27030 55	(3) ..	+ 406
$4\varphi \dots =$	15°31'52"74	$\omega \dots =$	0,00013 56860 37973
$\sin 4\varphi \dots$	9,42775 39	$\delta^2\varphi^\circ =$	— 0,00027 13720 75946
	1,94448 24	$\delta\varphi^\circ \dots$	8,48475 89419 29854
(2)	1,37223 63	$\delta\varphi \dots =$	0,48448 75698 53908
$6\varphi \dots =$	23°17'49"11		3,88282 92057 64356
$\sin 6\varphi \dots$	9,59714 3	$\varphi' \dots =$	4,36731 67756 18264
	7,01208 6		
(3)	6,60922 9	$c^2\sin\mathcal{C}$	7,91748 97643 52
$\sin \varphi' \dots$	8,88167 14304 00	$\sin \varphi$	8,83069 31864 41
$\cos \varphi' \dots$	— 126 28722 98	$\sin \varphi'$	8,88167 14304 00
	8,88040 85581 02	$\gamma \dots$	5,62985 43811 93
	0,30102 99956 64	$E\varphi \dots =$	0,06771 75646 51543
$\sin 2\varphi' \dots$	9,18143 85537 66	$E\mathcal{C} \dots$	847 71533 10760
			0,07619 47179 62303
		$\gamma \dots$	4 26436 51080
		$E\mathcal{C}_9 = E\varphi' =$	0,07615 20743 11223

Calcul de \mathcal{C}_{10} et $E\mathcal{C}_{10}$.Il faudra faire $\varphi^\circ = \mathcal{C}_{10}$, $\varphi = \mathcal{C}_{10}$, $\varphi' = \mathcal{C}_{10}$.

$\sin 2\varphi \dots$	9,18143 85537 66	(1) .. =	0°00015 24951 71463
$kR^\circ \dots$	7,00181 75388 35	(2) ..	— 26 41707
(1)	6,18325 60926 01	(3) ..	+ 45
$4\varphi \dots =$	17°28'9"362	$\omega \dots =$	0,00015 24925 29801
$\sin 4\varphi \dots$	9,47740 23	$\delta^2\varphi^\circ =$	— 0,00030 49850 59602
	1,94448 24	$\delta\varphi^\circ \dots$	0,48448 75698 53908
(2)	1,42188 47	$\delta\varphi \dots$	0,48418 25847 94306
$6\varphi \dots =$	26°12'14"		4,36731 67756 18264
$\sin 6\varphi \dots$	9,64499 6	$\varphi' \dots =$	4,85149 93604 12570
	7,01208 6		
(3)	6,65708 2		

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 241

$\sin \phi' \dots$	8,92723 42549 55
$\cos \phi' \dots$	— 155 87650 45
	8,92567 54899 10
	0,30102 99956 64
$\sin 2\phi' \dots$	9,22670 54855 74

$c^2 \sin \epsilon$	7,91748 97643 52
$\sin \phi.$	8,88167 14304 00
$\sin \phi'.$	8,92723 42549 55
$\gamma \dots$	5,72639 54497 07

$E\phi \dots =$	0,07615 20743 11223
$E\epsilon \dots$	847 71533 10760

	0,08462 92276 21983
--	---------------------

$\gamma \dots$	5 32592 99449
----------------	---------------

$E\epsilon_{10} = E\phi' =$	0,08457 59683 22534
-----------------------------	---------------------

Calcul de ϵ_{11} et $E\epsilon_{11}$.

$$\phi^{\circ} = \epsilon_9, \phi = \epsilon_{10}, \phi' = \epsilon_{11}.$$

$\sin 2\phi \dots$	9,22670 54855 74
$kR^{\circ} \dots$	7,00181 75388 35

(1).....	6,22852 30244 09
----------	------------------

$$4\phi \dots = 19^{\circ} 24' 21'' 591$$

$\sin 4\phi \dots$	9,52147 79
	1,94448 24

(2).....	1,46596 03
----------	------------

$$6\phi \dots = 29^{\circ} 6' 32'' 4$$

$\sin 6\phi \dots$	9,68705 8
	7,01208 6

(3).....	6,69914 4
----------	-----------

$\sin \phi' \dots$	8,96841 19250 40
--------------------	------------------

$\cos \phi' \dots$	— 188 56559 56
--------------------	----------------

	8,96652 62690 84
--	------------------

	0,30102 99956 64
--	------------------

$\sin 2\phi' \dots$	9,26755 62647 48
---------------------	------------------

(1).. $=$	0°00016 92477 96990
-----------	---------------------

(2).. $=$	— 29 23885
-----------	------------

(3).. $=$	+ 50
-----------	------

$\omega \dots =$	0,00016 92448 73155
------------------	---------------------

$\delta^2 \phi^{\circ} =$	— 0,00033 84897 46310
---------------------------	-----------------------

$\delta \phi^{\circ} \dots$	0,48418 25847 94306
-----------------------------	---------------------

$\delta \phi \dots$	0,48384 40950 47996
---------------------	---------------------

$\phi \dots$	4,85149 93604 12570
--------------	---------------------

$\phi' \dots =$	5,33534 34554 60566
-----------------	---------------------

$c^2 \sin \epsilon$	7,91748 97643 52
---------------------	------------------

$\sin \phi.$	8,92723 42549 55
--------------	------------------

$\sin \phi'.$	8,96841 19250 40
---------------	------------------

$\gamma \dots$	5,81313 59443 47
----------------	------------------

$E\phi \dots =$	0,08457 59683 22534
-----------------	---------------------

$E\epsilon \dots$	847 71533 10760
-------------------	-----------------

	0,09505 31216 33294
--	---------------------

$\gamma \dots$	6 50333 22802
----------------	---------------

$E\epsilon_{11} = E\phi' =$	0,09298 80883 10492
-----------------------------	---------------------

Calcul de \mathcal{C}_{12} et $E\mathcal{C}_{12}$.

$$\varphi = \mathcal{C}_{10}, \quad \varphi = \mathcal{C}_{11}, \quad \varphi' = \mathcal{C}_{12}.$$

$\sin 2\varphi \dots$	9,26755 62647 48	(1) .. =	0°00018 59404 18279
$kR^\circ \dots$	7,00181 75388 35	(2)	— 32 02529
(1)	6,26937 38035 83	(3)	+ 54
$4\varphi \dots =$	21°20'28"946	$\omega \dots =$	0,00018 59372 15804
$\sin 4\varphi \dots$	9,56101 06	$\delta^2 \varphi^\circ =$	—0,00037 18744 31608
	1,94448 24	$\delta \varphi^\circ \dots$	0,48384 40950 47996
(2)	1,50549 30	$\delta \varphi \dots =$	0,48347 22206 16388
$6\varphi \dots =$	32°0'43"4	$\varphi \dots$	5,35534 34554 60566
$\sin 6\varphi \dots$	9,72435 9	$\mathcal{C}_{12} = \varphi' =$	5,81881 56760 76954
	7,01208 6		
(3)	6,73644 5	$c^2 \sin \mathcal{C}$	7,91748 97643 52
		$\sin \varphi \dots$	8,96841 19250 40
$E\varphi \dots =$	0,09298 80883 10492	$\sin \varphi' \dots$	9,00596 51642 04
$E\mathcal{C} \dots$	847 71533 10760	$\gamma \dots$	5,89186 68535 96
	0,10146 52416 21252		
$\gamma \dots$	7 79591 06614		
$E\varphi' \dots$	0,10138 72825 14638		

192. Pour vérifier tous ces calculs, nous allons chercher directement la valeur de φ qui satisfait à l'équation $F\varphi = \frac{1}{32} F'c$, ce qui se fera en déduisant φ par bissection de la valeur de α qui satisfait à l'équation $F\alpha = \frac{1}{16} F'c$. Il faut donc déterminer φ d'après l'équation $\sin \varphi = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta\alpha)}$, où l'on connaît les logarithmes suivants :

$\sin \alpha \dots$	9,30260 81001 4716
$\cos \alpha \dots$	9,99106 96126 2333
$\Delta \alpha \dots$	9,99129 25963 5059.

On en déduira la valeur de $l \sin \varphi$ et ensuite celle de φ , par les calculs suivants :

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 243

$\sin \alpha \sqrt{\frac{1}{2}} \dots$	9,15209 31023 1517	$1+\Delta \dots$	0,29669 81159 0114
$\sqrt{(1+\cos \alpha)} \dots$	0,14829 38779 9493	$2 \dots \dots$	0,30102 99956 6398
$\sin \frac{1}{2} \alpha \dots \dots$	9,00379 92243 2024		9,99566 81202 3716
	9,99783 40601 1858	$\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta)} \dots$	9,99783 40601 1858
$\sin \phi \dots \dots \dots$	9,00596 51642 0166	$a = 5^\circ 82$	$l \sin A = l \sin a - r$
$\sin a \dots \dots \dots$	9,00605 32445 4882	$2a = 11.64$	$p = \frac{\frac{1}{2} r M}{\cos^2 a}$
$r =$	8 80803 4716		

$$\phi = a - p \sin 2a \left(1 - p + p^2 \cdot \frac{2 + 4 \sin^2 a}{3} \right).$$

$r \dots \dots \dots$	5,94487 90176 7	$a - (1) =$	5°81881 55547 2720
$\frac{1}{2} M \dots \dots \dots$	0,06118 56930 4	(2) +	1213 5804
$1 : \cos^2 a \dots \dots$	0,00448 88312 9	(3) —	846
$p \dots \dots \dots$	6,01055 35420 0	$\phi =$	5,81881 56760 7678
$\sin 2a \dots \dots \dots$	9,30483 88245 7		
$R^\circ \dots \dots \dots$	1,75812 26324 1		
(1) $\dots \dots \dots$	7,07351 49989 8		
$p \dots \dots \dots$	6,01055 35420		
(2) $\dots \dots \dots$	5,08406 854		
$p \dots \dots \dots$	6,01055 354		
$\frac{1}{3}(2+4\sin^2 a) \dots$	9,83274 96		
(3) $\dots \dots \dots$	8,92737 17		

On voit que cette valeur de ϕ s'accorde très-bien avec la valeur trouvée pour \mathcal{E}_{12} , puisque la différence est à peine de deux unités décimales du treizième ordre, ou du quatorzième chiffre significatif.

La valeur de $E\phi$ se déduira en même tems de celle de Ea , par l'équation $2E\phi - Ea = c^2 \sin^2 \phi \sin \alpha$, dont voici le calcul :

$c^2 \sin \alpha \dots$	9,29184 79542 7735	$Ea =$	0,20076 18685 6953
$\sin^2 \phi \dots$	8,01193 03284 0332	γ	201 26964 5971
$\gamma \dots \dots \dots$	7,30377 82826 8067		0,20277 45650 2924
		$E\phi =$	0,10138 72825 1462,

valeur qui s'accorde encore aussi bien avec celle que nous avons trouvée pour $E\mathcal{E}_{12}$.

Suivent les deux tableaux qui résultent des calculs précédens.

TABLE N° I.

	φ .	$E\varphi$.	$\log. \sin \varphi$.	$\log. \tan \varphi$.	$\log. \Delta \varphi$.
α_1	11° 57' 53" 75689 08	0.20076 18685 6953	9.30260 81001 4716	9.31153 84875 2383	9.99129 25963 5059
α_2	22.71143 03294 02	0.38634 81782 0831	9.58668 86411 0990	9.62174 05875 1509	9.96587 69582 4626
α_3	33.03081 64164 44	0.54589 98359 1182	9.73646 82413 5813	9.81302 86198 7846	9.92567 44269 0000
α_4	42.30457 89273 76	0.67481 98598 1835	9.82806 12794 2509	9.95907 77023 7631	9.87334 08030 9604
α_5	50.43582 07019 71	0.77397 70241 8163	9.88700 45821 5413	0.08290 45935 5444	9.81174 81626 6481
α_6	57.43686 36982 91	0.84751 27155 7022	9.92572 39415 1298	0.19475 71334 2740	9.74362 05303 4148
α_7	63.39136 58451 87	0.90072 03910 2072	9.95137 96597 7782	0.30020 45830 3945	9.67138 04255 7805
α_8	68.42031 25776 96	0.93867 74986 7532	9.96843 94867 9809	0.40283 37793 2150	9.59716 62206 7850
α_9	72.65772 79622 17	0.96562 64325 9648	9.97979 46511 6032	0.50546 29756 0355	9.52295 20157 7895
α_{10}	76.23603 20752 60	0.98484 13820 8090	9.98734 62777 4410	0.61091 04252 1560	9.45071 19110 1552
α_{11}	79.27866 36949 05	0.99873 04656 7518	9.99235 18259 3488	0.72276 29650 8856	9.38258 42786 9219
α_{12}	81.89740 60723 43	1.00901 53290 5913	9.99564 27739 5274	0.84658 98562 6669	9.32099 16382 6096
α_{13}	84.19245 20890 68	1.01691 10868 6773	9.99776 51945 7967	0.99263 89387 6454	9.26865 80144 5700
α_{14}	86.25392 71839 91	1.02327 83341 6754	9.99907 10953 4855	1.18392 69711 2791	9.22845 54831 1074
α_{15}	88.16411 74441 15	1.02874 29806 5756	9.99977 70162 7274	1.49412 90711 1917	9.20303 98450 0641
α_{16}	90.00000 00000 00	1.03378 94623 9087	0.00000 00000 0000	Infini.	9.19433 24413 5700

TABLE N° II.

n .	φ .	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0	0° 00' 00" 00000 0000	48571 07821 0987	3 40489 8928	3 40368 1683	243 3431	121 4096	3167
1	0.48571 07821 0987	48567 67331 2059	6 80858 0611	3 40124 8252	364 7527	121 0929	4165
2	0.97138 75152 3046	48560 86473 1448	10 20982 8863	3 39760 0725	485 8456	120 6764	5277
3	1.45699 61625 4494	48550 65490 2585	13 60742 9588	3 39274 2269	606 5220	120 1487	6200
4	1.94250 27115 7079	48537 04747 2997	17 00017 1857	3 38667 7049	726 6707	119 5287	7296
5	2.42787 31863 0076	48520 04730 1140	20 38684 8906	3 37941 0342	846 1994	118 7991	8285
6	2.91307 36593 1216	48499 66045 2234	23 76625 9248	3 37094 8348	964 9985	117 9706	9256
7	3.39807 02638 3450	48475 89419 2986	27 15720 7596	3 36129 8363	1082 9691	117 0450	
8	3.88282 92057 6436	48448 75698 5390	30 49850 5959	3 35046 8672	1200 0141		
9	4.36731 67756 1826	48418 25847 9431	33 84897 4631	3 33846 8531			
10	4.85149 93604 1257	48384 40950 4800	37 18744 3162				
11	5.33534 34554 6057	48347 22206 1638					
12	5.81881 56760 7695						

n .	$E\varphi$.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0	0.00000 00000 0000	847 71533 1076	11884 7145	11877 9671	13 4868	6 7229	240
1	0.00847 71533 1076	847 59648 3931	23762 6816	11864 4803	20 2097	6 6989	325
2	0.01695 31181 5007	847 35885 7115	35627 1619	11844 2706	26 9086	6 6664	412
3	0.02542 67067 2122	847 00258 5496	47471 4325	11817 3620	33 5750	6 6252	463
4	0.03389 67325 7618	846 52787 1171	59288 7945	11783 7870	40 2002	6 5789	580
5	0.04236 20112 8789	845 93498 3226	71072 5815	11743 5868	46 7791	6 5209	630
6	0.05082 13611 2015	845 22425 7411	82816 1683	11696 8077	53 3000	6 4579	706
7	0.05927 36036 9426	844 39609 5728	94512 9760	11643 5077	59 7579	6 3873	
8	0.06771 75646 5154	843 45096 5968	1 06156 4837	11583 7498	66 1452		
9	0.07615 20743 1122	842 38940 1131	1 17740 2335	11517 6045			
10	0.08457 59683 2253	841 21199 8796	1 29257 8381				
11	0.09298 80883 1049	839 91942 0415					
12	0.10138 72825 1464						

La table n° 2, construite au moyen des résultats précédens, contient les valeurs des quantités ϕ et $E\phi$, avec leurs différences successives jusqu'à la sixième, correspondantes aux diverses valeurs $n=0, 1, 2, \dots, 12$, pour lesquelles on a $F\phi = \frac{n}{12} \cdot \frac{F'c}{32}$. C'est par l'interpolation de cette table qu'on pourra trouver la valeur de ϕ et celle de $E\phi$, correspondantes à toute valeur de n moindre que 12, c'est-à-dire à toute valeur de $F\phi$ moindre que $\frac{1}{32} F'c$.

Il semble d'abord que la série des quantités ϕ et $E\phi$ devrait être continuée pour les valeurs $n=13, 14, \dots, 17$, afin qu'on pût en déduire la suite complète des différences, jusqu'à $n=11$, et qu'ainsi l'interpolation entre deux termes consécutifs quelconques de la table, ne dépendît que de la formule ordinaire $y=A+x(\delta A + \frac{x-1}{2}(\delta^2 A + \text{etc.}$). Mais en y réfléchissant un peu, on voit que ce nouveau travail est inutile, et qu'on peut y suppléer aisément par une considération générale qui s'applique à tous les cas semblables.

193. L'usage que nous avons constamment suivi dans la table n° 2, ainsi que dans toutes les autres que cet ouvrage contient, est de placer sur une même ligne horizontale la fonction A et ses différences successives $\delta A, \delta^2 A, \delta^3 A$, etc., qui naissent de l'accroissement constant de la variable a , contenue dans la première colonne (ici la variable a devient n et sa différence constante est 1). Dans cette hypothèse, la fonction qui répond à la variable $a+x$, comprise entre a et $a+1$, est donnée par la formule ordinaire $y=A+x(\delta A + \text{etc.}$

Mais si, au lieu de considérer les variables dans l'ordre croissant $a, a+1, a+2$, etc., on les considère dans l'ordre décroissant $a+1, a, a-1, a-2$, etc., et qu'on désigne toujours par A', A, A°, A^∞ , etc., les fonctions correspondantes, l'expression de la fonction y correspondante à la variable $a+x$, sera donnée semblablement par la formule

$$y = A' + (1-x)(A - A') + \frac{(1-x)(-x)}{2} (A^\circ - 2A + A') \\ + \frac{(1-x)(-x)(-x-1)}{2 \cdot 3} (A^\infty - 3A^\circ + 3A - A') + \text{etc.},$$

y

qui se réduit à

$$y = A' + (x-1)\delta A + \frac{x-1 \cdot x}{1 \cdot 2} \delta^2 A^\circ + \frac{x-1 \cdot x \cdot x+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta^3 A^{\circ\circ} \\ + \frac{x-1 \cdot x \cdot x+1 \cdot x+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \delta^4 A^{\circ\circ\circ} + \text{etc.},$$

nouvelle formule dans laquelle les différences δA , $\delta^2 A^\circ$, $\delta^3 A^{\circ\circ}$, etc. sont les mêmes et de même signe que celles qui sont ainsi désignées dans la table; mais on voit qu'elles ne sont plus disposées sur la même ligne horizontale, et qu'il faut monter d'une ligne pour passer d'une différence à la différence suivante.

C'est donc avec le secours de cette nouvelle formule qu'on suppléera très-aisément aux différences qui manquent dans les lignes horizontales de la table n° 2, passé $n=6$. Depuis $n=0$ jusqu'à $n=6$, on se servira pour l'interpolation de la formule ordinaire $y = A + x\delta A + \frac{x \cdot x-1}{2} \delta^2 A + \text{etc.}$; mais depuis $n=6$ jusqu'à $n=12$, il faudra se servir de la formule $y = A' + (x-1)\delta A + \frac{x-1 \cdot x}{2} \delta^2 A^\circ + \frac{x-1 \cdot x \cdot x+1}{2 \cdot 3} \delta^3 A^{\circ\circ} + \text{etc.}$, où toutes les différences sont données par la table, en montant graduellement d'une ligne pour passer d'une différence à la suivante.

Dans les tables où toutes les lignes horizontales des différences sont complètes, il sera indifférent de se servir de l'une ou de l'autre formule pour chaque interpolation. La première cependant semble devoir être préférée, lorsque x sera $< \frac{1}{2}$, et la seconde lorsque x sera $> \frac{1}{2}$.

Il reste à faire voir par quelques exemples l'usage des tables que nous venons de construire.

194. Cherchons d'abord l'amplitude ϕ et la fonction $E\phi$ qui répondent à l'équation $F\phi = \frac{1}{3} F'c$. Puisqu'on a $\frac{1}{3} \cdot 16 = 5\frac{1}{3}$, on voit qu'en faisant $F\lambda = \frac{5}{16} F'c$, $F\mu = \frac{1}{48} F'c$, on aura $F\phi = F\lambda + F\mu$.

Les valeurs de λ et $E\lambda$ sont données immédiatement par la table n° 1; et comme on a $F\mu = \frac{8}{384} F'c$, les valeurs de μ et de $E\mu$ seront aussi données par la Table n° 2; ces valeurs sont

$$\begin{array}{ll} \lambda = 50^\circ 43582 \ 07019 \ 71 & \mu = 3^\circ 88282 \ 92057 \ 6436 \\ E\lambda = 0,77597 \ 70241 \ 8163 & E\mu = 0,06771 \ 75646 \ 5154 \end{array}$$

Il ne s'agit plus que de calculer ϕ par les équations algébriques qui représentent l'équation transcendante $F\phi = F\lambda + F\mu$; pour cela, ayant pris les auxiliaires λ', μ' , telles que

$$\text{tang } \lambda' = \text{tang } \lambda \cdot \Delta\mu, \quad \text{tang } \mu' = \text{tang } \mu \cdot \Delta\lambda,$$

on aura $\phi = \lambda' + \mu'$. Ensuite l'équation $E\lambda + E\mu - E\phi = c^2 \sin \lambda \sin \mu \sin \phi$ donnera la valeur de $E\phi$.

Les quantités $\text{tang } \lambda$ et $\Delta\lambda$ sont données par la table n° 1; il ne reste donc à calculer que $\text{tang } \mu$ et $\Delta\mu$, ce que nous allons faire avec toute l'exactitude que les tables comportent. Voici d'abord le calcul de $l \sin \mu$ et $l \cos \mu$, d'après les formules du n° 147.

$R^\circ \mu$ 0,58914 82876 29379	(1) .. = 0,00099 72536 306006
R° 1,75812 26324 09172	(2) 7633 183208
μ .. 8,83102 56552 20207	(3) 9 348151
μ^2 7,66205 13104 40	(4) 13033
9,33675 43156 37	$\cos \mu$.. 0,00099 80178 850398
(1) 6,99880 56260 77	$\frac{1}{3}(1)$... 0,00033 24178 768669
μ^4 5,32410 26209	$\frac{1}{15}(2)$.. 508 878881
8,55860 30653	$\frac{1}{63}(3)$.. 148383
(2) 3,88270 56862	$\frac{1}{255}(4)$.. 51
μ^6 2,98615 393	0,00033 24687 795984
7,98457 180	μ 8,83102 56552 20207
(3) 0,97072 573	$\sin \mu$... 8,83069 31864 40609
μ^8 0,64820 5	$\cos \mu$.. — 99 80178 85040
7,46683 3	$\text{tang } \mu$.. 8,83169 12043 2565
(4) 8,11503 8	

Connaissant $l \sin \mu$, on calculera $l \Delta\mu$ comme il suit:

$$\begin{aligned} c^2 \sin^2 \mu & 7,65062 62270 1138 \\ a \dots & 7,65062 53257 9595 \\ r = & 9012 1543 \end{aligned} \quad \begin{aligned} a &= \frac{20}{4471}, & lA &= la + r, & r' &= \frac{r}{1-a}, \\ 1-a &= \frac{4451}{4471}, & l(1-A) &= l(1-a) - R, \\ & & lR &= l(ar') + \frac{1}{2}r'. \end{aligned}$$

$r \dots\dots$	3,95482 86188	$1-a \dots\dots$	9,99805 29244 1449
$1-a \dots\dots$	9,99805 29244	$R \dots\dots\dots$	40 4950
$r' \dots\dots\dots$	3,95677 56944	$1-A \dots\dots\dots$	9,99805 29203 6499
$a \dots\dots\dots$	7,65062 53258	$\Delta\mu \dots\dots\dots$	9,99902 64601 8250
$\frac{1}{2}r'$	4526		
$R \dots\dots\dots$	1,60740 14728		

D'après ces valeurs, voici le calcul des angles λ' , et μ' :

$\text{tang } \lambda \dots$	0,08290 45935 5444	$\text{tang } \mu \dots$	8,83169 12043 2565
$\Delta\mu \dots\dots$	9,99902 64601 8250	$\Delta\lambda \dots\dots$	9,81174 81626 6481
$\text{tang } \lambda' \dots$	0,08193 10537 3694	$\text{tang } \mu' \dots$	8,64343 93669 9046

Au moyen de l'angle approché $a=50^\circ 37'$, on trouvera par les formules ordinaires $\lambda' = 50^\circ, 37' 274 \ 12266 \ 4851$; quant à l'angle μ' , comme il n'est que d'un petit nombre de degrés, on pourra, en faisant $\text{tang } \mu' = t$, calculer cet angle par la formule.....
 $\mu' = t(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \frac{1}{9}t^8)$, et on trouvera par les cinq premiers termes de la série $\mu' = 2^\circ, 51931 \ 21820 \ 4336$. De là résulte

$$\lambda' + \mu' = \varphi = 52^\circ, 89205 \ 34086 \ 9187.$$

Puisque φ satisfait à l'équation $F\varphi = \frac{1}{3}F'c$, la valeur de φ peut être vérifiée par la formule du n° 24, 1 p., qui donne.....
 $l \sin \varphi = 9,90173 \ 08331 \ 6243$, et de là

$$\varphi = 52^\circ, 89205 \ 34086 \ 886;$$

la différence n'est que de trois unités du quatorzième chiffre, et on ne peut guère décider de quel côté est l'erreur.

Enfin la valeur de $E\varphi$ se trouvera par le calcul suivant:

$c \dots\dots\dots$	9,98923 98541 3016	$E\lambda \dots\dots\dots$	0,77397 70241 8163
$\sin \lambda \dots\dots$	9,88700 45821 5413	$E\mu \dots\dots\dots$	0,06771 75646 5154
$\sin \mu \dots\dots$	8,83069 31864 4061		0,84169 45888 3317
$\sin \varphi \dots\dots$	9,90173 08331 6243	$z \dots\dots\dots$	0,04061 33165 2661
$z \dots\dots\dots$	8,60866 84558 8733	$E\varphi \dots\dots\dots$	0,80108 12723 0656

195. Pour donner une seconde application des mêmes tables,

cherchons les valeurs des fonctions E et F qui répondent à l'amplitude $\phi = 75^\circ$.

La plus proche valeur de ϕ contenue dans la table n° 1, est $\lambda = 76^\circ, 23603 \ 20752 \ 60$; elle répond à la fonction $F\lambda = \frac{1}{16} F'c$; il faut donc déterminer l'amplitude μ par l'équation $F\mu = F\lambda - F\phi$, ou par les formules

$$\text{tang } \lambda' = \text{tang } \lambda \cdot \Delta\phi, \text{ tang } \phi' = \text{tang } \phi \cdot \Delta\lambda, \mu = \lambda' - \phi'.$$

Connaissant μ , il sera facile d'avoir, par l'interpolation de la table n° 2, la valeur correspondante de n qui donnera celle de $F\mu$ et ensuite celle de $E\mu$. Voici le détail de tous ces calculs.

On a, par la table n° 1, les logarithmes de $\text{tang } \lambda$ et $\Delta\lambda$; on a immédiatement $l \text{ tang } \phi$, ainsi il ne reste à trouver que $l\Delta\phi$, ce qui se fera par la formule $\Delta = \cos \phi \sqrt{1+A}$, dans laquelle $A = b^2 \text{ tang}^2 \phi$, et d'où résulte $l\Delta\phi = 9,47668 \ 59066 \ 8751$. D'après ces valeurs, on formera celles de $l \text{ tang } \lambda'$ et $l \text{ tang } \phi'$, savoir :

$\text{tang } \lambda..$	$0,61091 \ 04252 \ 1560$	$\text{tang } \phi..$	$0,57194 \ 75475 \ 3330$
$\Delta\phi.....$	$9,47668 \ 59066 \ 8751$	$\Delta\lambda.....$	$9,45071 \ 19110 \ 1552$
$\text{tang } \lambda'..$	$0,08759 \ 63319 \ 0311$	$\text{tang } \phi'..$	$0,02265 \ 94585 \ 4882$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \lambda' &= 50^\circ 73943 \ 77571 \ 6697 \\ \phi' &= 46,49403 \ 54375 \ 3376 \\ \mu &= 4,24540 \ 23196 \ 3321. \end{aligned}$$

195. Il faut maintenant chercher dans la table n° 2, la valeur de n qui répond à cette valeur de ϕ ; on voit que cette valeur est comprise entre 8 et 9, et qu'en faisant $n = 8 + x$, on aura à déterminer x par la seconde formule générale d'interpolation, savoir :

$$A' - \mu = (1-x) (\delta A + \frac{x}{2} (\delta^2 A^\circ + \frac{x+1}{3} (\delta^3 A^{\circ\circ} + \frac{x+2}{4} (\delta^4 A^{\circ\circ\circ} + \text{etc.})),$$

dans laquelle les nombres donnés par la table sont :

$A' - \mu =$	$0,12191 \ 44559 \ 8505$	$\delta^4 A^{\circ\circ\circ} =$	$+ \ 846 \ 1994$
$\delta A =$	$0,48448 \ 75698 \ 5390$	$\delta^5 A^{\circ\circ\circ\circ} =$	$+ \ 119 \ 5287$
$\delta^2 A^\circ =$	$- \ 27 \ 13720 \ 7596$	$\delta^6 A^{\circ^5} =$	$- \ 6200$
$\delta^3 A^{\circ\circ} =$	$- \ 3 \ 37094 \ 8348$	$\delta^7 A^{\circ^6} =$	$- \ 923.$

Après quelques essais dans lesquels on peut négliger les décimales qui passent le dixième rang, on trouve $x = 0,74830\ 756125$. Pour plus d'exactitude, il conviendra de substituer cette valeur dans le second membre de l'équation à résoudre, afin d'avoir la différence entre le résultat de la substitution et la valeur donnée de $A' - \mu$.

$$\begin{array}{r} \text{Résultat de la substitution} \dots\dots 0,12191\ 44559\ 7543 \\ A' - \mu \dots\dots 0,12191\ 44559\ 8505 \\ \hline \text{Différence} \dots\dots r = \dots\dots\dots 962 \end{array}$$

De là on voit que $1 - x$ doit être augmenté de $\frac{r}{\delta A} = 1988$, ce qui donnera pour la vraie valeur de x

$$x = 0,74830\ 75612\ 3012.$$

Connaissant x , on aura $F\mu = \frac{8+x}{384} F'c$, et par conséquent $F\phi = \frac{232-x}{384} F'c = \frac{231,25169\ 24387\ 6988}{384} F'c$, ce qui donne le logarithme de cette fonction :

$$\begin{array}{r} F'c \dots\dots 0,51259\ 14107\ 1659 \\ \text{coeff} \dots 9,77975\ 36954\ 8302 \\ \hline F\phi \dots\dots 0,29234\ 51061\ 9961. \end{array}$$

196. Pour calculer $E\phi$, il faut d'abord chercher $E\mu$ par l'interpolation de la table n° 2; en appelant de nouveau A le terme $E\phi$ qui répond à $n=8$, la valeur cherchée sera donnée par la formule

$$E\mu = A' - (1-x) \left(\delta A + \frac{x}{2} (\delta^2 A^0 + \frac{x+1}{3} (\delta^3 A^{00} + \frac{x+2}{4} (\delta^4 A^{000} + \text{etc.} \right.$$

où l'on a

$$\begin{array}{ll} A' & = 0,07615\ 20745\ 1122 & \delta^4 A^{000} & = + 46\ 7791 \\ \delta A & = \quad 843\ 45096\ 5968 & \delta^5 A^{04} & = + \quad 6\ 5789 \\ \delta^2 A^0 & = \quad \quad 94512\ 9760 & \delta^6 A^{05} & = \quad \quad 463 \\ \delta^3 A^{00} & = \quad \quad \quad 11696\ 8077 & \delta^7 A^{06} & = \quad \quad 51. \end{array}$$

Substituant ces valeurs et celle de x , on trouvera

$$E\mu = 0,07403\ 01260\ 4731,$$

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 251

enfin on aura à calculer $E\phi$ par la form. $E\phi + E\mu = E\lambda + c^2 \sin\phi \sin\mu \sin\lambda$

c^2	9,98923 98541 3016	$E\lambda =$	0,98484 13820 8090
$\sin \phi$...	9,98494 37781 0267	$E\mu =$	0,07403 01260 4731
$\sin \lambda$...	9,98734 62777 4410		0,91081 12560 3359
$\sin \mu$...	8,86939 87498 6310	z	0,06775 30202 7583
z	8,83092 86598 4003	$E\phi =$	0,97856 42763 0942

Cette valeur et celle de $lF\phi$ s'accordent suffisamment avec celles qu'on a trouvées par la méthode directe, nos 160 et 161.

197. Nous avons cru devoir exposer avec beaucoup de détail tout ce qui concerne la construction et l'usage des tables n° 1 et n° 2, relatives au module $c = \sin 81^\circ$; les calculs ont été faits avec une exactitude scrupuleuse, et soumis à un grand nombre de vérifications, de manière qu'on peut être assuré que les résultats consignés dans ces tables, sont exacts autant qu'ils peuvent l'être, d'après les Tables trigonométriques à quatorze décimales, dont nous avons fait usage, lesquelles sont quelquefois en erreur de une, deux et même trois unités dans le dernier chiffre. On en voit un exemple dans le logarithme de b ou $\cos 81^\circ$, qui, dans la *Trigonomet. brit.*, est 9,19433 24413 5701, et dont les derniers chiffres doivent être 5699. En suivant les mêmes procédés qui ont été indiqués dans la construction de ces tables, et dans les deux applications que nous en avons données, on parviendra donc dans tous les cas à la détermination des fonctions E et F et à la solution des questions qui en dépendent, avec un degré de précision supérieur, non-seulement aux besoins de la pratique, mais à ceux des recherches théoriques les plus délicates.

Je ne dissimulerai pas combien est pénible le calcul d'une table telle que la table n° 1 qui n'a que seize lignes, ou que la table n° 2 qui n'en a que douze; mais, si on aspire à un aussi grand degré d'exactitude, il semble qu'on n'y peut parvenir que par le secours de ces tables, ou par la méthode générale fondée sur la formation préliminaire de l'échelle des modules. C'est au calculateur à choisir entre ces deux méthodes, celle qui lui paraîtra la moins pénible.

Comme la formation de l'échelle des modules se réduit, d'après

nos formules, à un travail assez court, il est vraisemblable qu'on jugera que la méthode générale mérite la préférence, si l'on n'a à calculer qu'un petit nombre de fonctions E et F ; mais s'il y avait lieu de calculer un grand nombre de ces fonctions, l'autre procédé paraît être le plus avantageux.

Au reste nous avons déjà dit que si on se borne à dix décimales dans la formation de la table auxiliaire n° 1, auquel cas on peut se passer de la table n° 2, le calcul de cette table et son usage dans les cas particuliers, deviendront très-faciles, et rentreront dans la classe des calculs trigonométriques ordinaires, surtout si le module est plus petit que $\sin 45^\circ$, ce qui permettra de prendre la valeur de α dans la table VII; et puisqu'alors les résultats sont exacts jusqu'à la dixième décimale, ou au moins jusqu'à la neuvième, il ne paraît pas qu'on puisse proposer rien de plus simple pour le calcul des fonctions E et F , au moins tant qu'il n'existera pas des tables suffisamment étendues, au moyen desquelles la détermination de ces fonctions serait réduite aux règles ordinaires de l'interpolation.

198. Remarquons en finissant que le tableau n° 1 pourrait être réduit aux cinq termes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_8, \alpha_{16}$, et que dans cet état, il suffirait encore pour ramener les fonctions proposées $E\phi, F\phi$, au cas où l'amplitude est moindre que 6° . Pareille observation s'applique à plus forte raison aux tables auxiliaires construites pour des modules moindres que $\sin 81^\circ$.

En effet, 1°. si l'amplitude donnée ϕ est comprise entre α_8 et α_{16} , ou 90° , l'une des deux différences $F\phi - F\alpha_8, F'c - F\phi$, sera moindre que $\frac{1}{4}F'c$; ainsi, en faisant la plus petite des deux différences $= F\phi'$, on aura $\phi' < \alpha_4$. Il faudra donc d'abord déterminer ϕ' , soit par l'équation algébrique qui correspond à l'équation... $F\phi - F\alpha_8 = F\phi'$, soit par l'équation $\cot \phi' = b \tan \phi$, si l'on a $F'c - F\phi = F\phi'$.

Puisque ϕ' ainsi déterminé est plus petit que α_4 , le cas le moins favorable pour la réduction est celui où ϕ' sera compris entre α_2 et α_4 ; soit alors $F\phi''$ égal à la plus petite des deux différences $F\alpha_4 - F\phi', F\phi' - F\alpha_2$, la fonction $F\phi''$ sera plus petite que... $\frac{1}{2}(F\alpha_4 - F\alpha_2)$, et par conséquent $< \frac{1}{2}F\alpha_2 < F\alpha_1$. Si en même tems

$F\phi''$ est $< \frac{1}{2}F\alpha_1$, ϕ'' sera plus petit que $5^\circ,8188$, et l'objet de la réduction sera rempli par deux transformations seulement. Si au contraire $F\phi''$ est $> \frac{1}{2}F\alpha_1$, il faudra une troisième transformation pour réduire les fonctions $E\phi$, $F\phi$, au cas où l'amplitude est moindre que $5^\circ,8188$.

2°. Si l'amplitude donnée ϕ est moindre que α_3 , le nombre des transformations qui ne pouvait être plus grand que trois dans le premier cas, ne pourra surpasser deux dans celui-ci, et se réduira le plus souvent à un.

De là on voit que la Table auxiliaire, réduite à cinq termes, conduira aux mêmes réductions que la table entière, calculée laborieusement avec onze termes de plus. Mais, tandis qu'une seule transformation, faite à l'aide du tableau entier, suffit pour réduire les fonctions $F\phi$ et $E\phi$ au cas où l'amplitude est moindre que $5^\circ,8188$, il faudra quelquefois deux et même trois transformations semblables pour parvenir à la même réduction par le tableau partiel. Ces transformations, il est vrai, se font par de simples formules trigonométriques; mais c'est au calculateur à balancer les avantages et les inconvénients des deux procédés.

J'observerai au reste qu'il faudrait ajouter un sixième terme à la Table auxiliaire, si l'angle du module était plus grand que 81° ; cette addition suffira jusqu'à 89° , et il est inutile d'aller plus loin. Alors le nombre des transformations pourrait aller jusqu'à cinq, pour obtenir la réduction cherchée.

§ XV. *Sur la construction d'un système complet de Tables elliptiques.*

199. La méthode du § IV présente beaucoup d'avantages par la simplicité et l'élégance des formules qui servent à construire chaque table particulière pour un module déterminé; on a vu que les calculs s'exécutent dans toute l'étendue de la table, en n'empruntant de la théorie des fonctions elliptiques qu'un seul élément qui se multiplie ensuite par des formules purement trigonométriques et rigoureusement exactes; cependant l'usage de ces tables serait peu commode dans l'interpolation, lorsqu'il s'agirait de trouver les

fonctions E et F qui répondent à des valeurs données de l'amplitude et du module.

Il paraît beaucoup plus convenable, pour cet objet, de construire des tables dans lesquelles l'amplitude et l'angle du module croissent par des intervalles égaux et suffisamment petits, de 0° à 90° . C'est donc entre les deux méthodes proposées dans le § III, qu'il faut choisir celle qu'on regardera comme la plus facile dans l'exécution, pour parvenir à un degré d'exactitude déterminé.

La seconde de ces deux méthodes fait trouver directement la différence seconde de la fonction E, ainsi que celle de la fonction F; et par ces différences, vérifiées à de certains intervalles, on parvient à former la série entière des valeurs de E et de F, ainsi que nous l'avons fait voir avec beaucoup de détail, en calculant la table qui convient au module $c = \sin 45^\circ$.

200. L'avantage principal de cette seconde méthode consiste en ce que les auxiliaires qui servent à déterminer les différences secondes des fonctions, sont beaucoup plus petites que celles qui, dans la première méthode, seraient nécessaires pour donner immédiatement les différences premières de ces mêmes fonctions; le calcul doit donc en être beaucoup moins long; il exige ou des tables moins étendues, ou des soins moins minutieux pour obtenir les parties proportionnelles, ce qui est une épargne de tems considérable dans une longue suite d'opérations. Mais d'un autre côté, les erreurs sur les différences secondes se multiplient suivant la progression des nombres triangulaires, dans la détermination des fonctions principales; il devient donc nécessaire de calculer ces différences avec deux décimales de plus, ce qui fait perdre tout l'avantage qu'on pouvait en attendre; et si on n'augmente pas le nombre des décimales, il faut vérifier les résultats de distance en distance, puis corriger les nombres intermédiaires, suivant un mode de répartition qui est plus ou moins arbitraire.

Cet inconvénient qu'on a pu remarquer dans l'art. 85, n'a pas lieu dans la première méthode, ainsi que nous nous en sommes assuré par un grand nombre d'essais, et cette raison suffit pour lui donner la préférence. Mais, comme on n'a pas de tables usuelles

qui passent dix décimales, il serait trop difficile de calculer les fonctions avec douze décimales, comme nous l'avons fait dans la table II, et il faut se borner à les calculer avec neuf décimales, ce qui au reste est plus que suffisant pour l'usage ordinaire.

201. Voici donc le procédé auquel nous croyons devoir nous arrêter définitivement, non pour calculer dès à présent une série complète de tables elliptiques, ce qui serait une tâche au-dessus de nos forces, mais pour préparer les bases de ce grand travail, de manière qu'il puisse être exécuté par la suite avec toute l'étendue nécessaire.

Pour chacune des valeurs du module, depuis $c = \sin 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\sin 3^\circ$, jusqu'à $c = \sin 75^\circ$, on formera la table particulière qui donne les valeurs des fonctions E et F correspondantes aux différens degrés de l'amplitude, depuis $\phi = 0^\circ$, 1° , 2° , jusqu'à $\phi = 90^\circ$. Ces calculs seront faits par la méthode du n° 66, en ne donnant que dix décimales aux auxiliaires p ou P , d'où l'on déduit les différences premières δE ou δF , et celles-ci devront être réduites à neuf décimales. Si l'on porte dans ces calculs l'attention nécessaire, les erreurs sur le neuvième chiffre décimal de la fonction, se compenseront pour la très-grande partie, de sorte qu'on pourrait parvenir à l'amplitude 90° , c'est-à-dire à la fonction complète, dont la valeur est connue d'avance par la table I, sans commettre une erreur de plus de deux ou trois unités sur le dernier chiffre décimal. Cependant, pour plus de sûreté, il sera bon de calculer, par la méthode directe et rigoureuse, les fonctions E et F qui répondent à l'amplitude de 45° ; en cas de différence dans les résultats, on corrigera les nombres de la table par un moyen préparé dans le cours de l'opération, et que nous indiquerons ci-après.

Il conviendra, comme nous l'avons dit, de pousser le calcul de ces tables particulières jusqu'au module $c = \sin 75^\circ$; on pourrait peut-être aller plus loin, sur-tout pour la fonction E qui n'est pas sujette à d'aussi grandes inégalités que la fonction F; mais, comme l'interpolation deviendrait peu exacte pour les amplitudes de 70° à 90° , nous avons pensé qu'il était convenable de ne pas étendre les tables au-delà du module $\sin 75^\circ$.

Par une raison contraire, on pourrait ne les commencer qu'au module $\sin 15^\circ$; car au-dessous de ce module, les fonctions E et F sont représentées avec assez d'exactitude par les séries du § VII, qui d'ailleurs ont l'avantage de se prêter facilement à tous les calculs analytiques.

La réunion de toutes les tables particulières dont nous venons de parler, soit qu'elles commencent au module $\sin 1^\circ$, soit qu'elles ne commencent qu'au module $\sin 15^\circ$, formera la table IX, que nous nous empresserons de publier, aussitôt que le travail assez considérable qu'elle exige aura pu être achevé. Au défaut d'une table plus étendue, dans laquelle l'angle du module et l'amplitude croîtraient par des intervalles beaucoup plus petits qu'un degré, la table IX sera fort utile pour appliquer la théorie des fonctions elliptiques, en donnant les moyens d'évaluer ces fonctions, pour les modules qui n'excèdent pas les limites de la table, par un calcul assez facile, lorsqu'on ne voudra pas obtenir plus de six ou sept décimales exactes.

202. Voici, d'après la méthode que nous proposons, le détail des procédés à suivre pour construire l'une des tables particulières qui doivent composer la table IX. Soit α l'arc d'un degré, ou $\alpha = \frac{\pi}{180}$, soit $\omega = \varphi + \frac{1}{2}\alpha$ et $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \omega)} = \Delta(\omega)$; si on prend l'auxiliaire $p = \alpha \Delta \omega$, on aura en général, pour construire la table des fonctions E, la formule

$$\delta E = p + \frac{1}{24} \delta^2 p^\circ - \frac{17}{5760} \delta^4 p^\circ + \text{etc.};$$

on calculera donc pour les valeurs successives $\varphi = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ etc.; les valeurs correspondantes de l'auxiliaire p ; on observera de plus que la valeur de p , pour $\varphi = -1^\circ$, serait la même que pour $\varphi = 0^\circ$; on placera donc deux fois cette première valeur de p , l'une sur la ligne de $\varphi = 0$, l'autre sur la ligne supérieure, ce qui sera nécessaire pour former cette ligne où l'on doit trouver la différence $\delta^2 p^\circ$ qui entre dans la première valeur de δE , celle qui répond à $\varphi = 0$.

A mesure qu'on aura calculé une valeur de p , cette valeur servira à ajouter un terme de plus aux colonnes des différences dans les lignes supérieures. Au commencement de la table et même jusqu'à

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-cx^2}} = \frac{dx}{\Delta}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-cx^2}$$

des termes assez éloignés tels que $\phi = 45^\circ$ ou 50° , il suffira de prendre les deux premiers termes de la valeur de δE , savoir: $\delta E = p + \frac{1}{24} \delta^2 p$; car nous supposons constamment que les valeurs de p sont calculées avec dix décimales, et qu'on en conserve neuf seulement dans les valeurs de δE .

Lorsque par le progrès de l'opération, on reconnaîtra que le troisième terme $-\frac{17}{5760} \delta^4 p$ peut influer sur la dernière décimale de δE , il faudra tenir compte de ce terme. Mais alors on devra ajouter un terme de plus à la colonne des p , ce terme qui répond à $\phi + \alpha$ étant nécessaire pour avoir la différence $\delta^4 p$ qui entre dans la valeur de δE . Jamais on n'aura besoin de calculer un terme de plus de la formule.

Les mêmes procédés s'appliquent au calcul des fonctions F , avec cette seule différence, que l'auxiliaire P a pour valeur $\frac{\alpha}{\Delta \omega}$; ainsi le logarithme connu de $\Delta \omega$ servira à calculer à la fois les deux auxiliaires $p = \alpha \Delta \omega$, $P = \frac{\alpha}{\Delta \omega}$. Il faut observer seulement que les différences croissant plus rapidement dans la table des fonctions F , il faudra beaucoup plus tôt faire entrer le troisième terme de la formule dans la valeur de δF .

En formant la colonne des différences δE et δF , réduite à neuf décimales, il sera bon de faire une marque particulière aux termes dont la dernière décimale n'est exacte qu'à $\frac{1}{2}$ ou au moins $\frac{1}{10}$ d'unité près. Cette marque sera utile pour faire sur la table les légères corrections qui seraient indiquées par la différence qu'on pourra trouver entre les fonctions données par la table pour les amplitudes de 45° et 90° , et celles qui auront été calculées d'avance par la méthode directe.

203. Il ne reste plus qu'à faire voir comment on doit calculer le logarithme de $\Delta \omega$. Au commencement de la table et jusqu'à une limite assez éloignée, faites $\sin A = c \sin \omega$; appelez a l'angle qui, dans la table à dix décimales, approche le plus de A , et soit la différence $l \sin A - l \sin a = r$; vous aurez avec une exactitude suffisante $l \cos A$, ou

$$\log \Delta = \log \cos a - r \operatorname{tang}^2 a,$$

et l'on voit que la correction $r \operatorname{tang}^2 a$ n'a pas besoin d'être calculée avec beaucoup de précision, tant que l'angle a sera d'un petit nombre de degrés.

Lorsque l'angle a approchera de 45° , on pourra faire plus exactement $\log \Delta = l \cos a - R$, $\log R = \log(r \operatorname{tang}^2 a) + r + r \operatorname{tang}^2 a$.

Si l'on avait $l \sin A = l \sin a - r$, il faudrait faire $\log \Delta = l \cos a + R$, $\log R = \log(r \operatorname{tang}^2 a) - r - r \operatorname{tang}^2 a$.

Lorsque l'angle a sera plus grand que 45° , la correction R devenant plus grande que r , les erreurs se multiplieraient par la formule précédente, et il faut lui en substituer une autre. On mettra alors la valeur de Δ sous cette forme, $\Delta = b \sqrt{1 + \frac{c^2 \cos^2 a}{b^2}}$, et faisant $\operatorname{tang} A = \frac{c \cos a}{b}$, on aura $\Delta = \frac{b}{\cos A}$. Soit a l'angle de la table qui approche le plus de l'angle A dont on connaît la tangente, et soit $l \operatorname{tang} A = l \operatorname{tang} a + r$; on aura

$$l \cos A = l \cos a - r \sin^2 a (1 + M r \cos^2 a),$$

ou si l'on fait $l \cos A = l \cos a - R$, on aura

$$lR = l(r \sin^2 a) + r - r \sin^2 a, \text{ ensuite } \log \Delta = \log \frac{b}{\cos a} + R.$$

Cette formule, dont le calcul est aussi facile qu'il est possible, ne laisse rien à désirer, et pourrait même servir dans toute l'étendue de la table sans exception; mais le calcul de la première est plus simple, tant que $c \sin \omega$ est $< \sin 45^\circ$.

Si l'on avait $l \operatorname{tang} A = l \operatorname{tang} a - r$, la formule deviendrait

$$\log R = \log(r \sin^2 a) - r + r \sin^2 a, \quad \log \Delta = \log \left(\frac{b}{\cos a} \right) - R.$$

Connaissant Δ pour une valeur déterminée de ω , on connaîtra à la fois les deux auxiliaires $p = \alpha \Delta$, $P = \frac{\alpha}{\Delta}$, l'une pour la table des fonctions E, l'autre pour celle des fonctions F. Ces auxiliaires devront être placées chacune sur la même ligne que la valeur de φ , d'où elles sont déduites, en faisant $\omega = \varphi + \frac{1}{2} \alpha$; on y joindra leurs différences successives, continuées jusqu'à l'ordre où les différences de l'ordre suivant seraient négligeables ou fort inégales. On en dé-

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 259

duira ensuite les valeurs de δE et de δF , suivant les formules que nous avons rapportées.

Calcul détaillé de la Table particulière pour le module $c = \sin 63^\circ$.

204. Nous prenons pour exemple un module un peu grand, parce que les calculs deviennent plus difficiles vers la fin de la table, à raison de la grande inégalité des différences; on verra cependant que les résultats n'en sont pas moins sûrs, en prenant les précautions convenables. Du reste, nous entrons dans tous les détails nécessaires pour qu'on puisse facilement saisir la méthode, et l'appliquer à tout autre module.

$$\phi = 0^\circ, \quad \omega = 0^\circ \frac{1}{2}.$$

c.	9,94988 08840 7	cos a.	9,99998 69338
sin ω	7,94084 18596 8	R.	— 623
sin A.	7,89072 27437 5	Δ	9,99998 68715
sin a.	7,88969 04944	ω	8,24187 73676
$r =$	103 22493 5	p.	8,24186 42391
		P.	8,24189 04961
r.	7,01378 46		
tang ² a.	5,77940 71	p.	= 0,01745 27649
	2,79319 17	P.	= 0,01745 38201
r.	+ 103 22		
R.	2,79422 39		

Dans ce cas et dans le cas suivant, on aurait pu faire plus simplement le calcul de Δ par la formule $\log \Delta = \frac{1}{2} \log (1 - c^2 \sin^2 \omega) = -\frac{1}{2} mc^2 \sin^2 \omega$; ensuite ω devenant un peu plus grand, on aurait les formules plus approchées $r = c^2 \sin^2 \omega$, $\log \Delta = -R, \dots$, $\log R = \log (\frac{1}{2} mr) + \frac{1}{2} mr$; mais nous avons préféré de suivre toujours la même marche.

$$\phi = 1^\circ, \quad \omega = 1^\circ \frac{1}{2}.$$

c.	9,94988 08840 7	r.	6,07670 73	cos a.	9,99988 19043
sin ω	8,41791 90153 9	tang ² a.	6,73559 73	R.	— 649
	8,36779 98994 6	R.	2,81230 46	Δ	9,99988 18394
sin a.	8,36768 05811			ω	8,24187 73676
$r =$	11 93183 6	p.	0,01744 85446	p.	8,24175 92070
		P.	0,01745 80418	P.	8,24199 55282

$$\varphi = 2^\circ, \quad \omega = 2^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	r.....	5,89956 33	cos a.....	9,99967 16309
sin a....	8,63967 95616 1	tang ² a....	7,17993 63	R.....	+ 1201
	8,58956 04456 8	R.....	3,07949 96	Δ.....	9,99967 17510
sin a...	8,58963 98005			a.....	8,24187 73676
r = —	7 93548 2	p = 0,01744 01059	p.....	8,24154 91186	
		P = 0,01746 64891	P.....	8,24220 56166	

Cette valeur de P, auxiliaire de la fonction F, jointe à la valeur correspondante $\delta^2 P^0 = 42338$, donne pour $\varphi = 2^\circ$, la différence $\delta F = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^0 = 1746 66655$, où il faut remarquer que le retranchement du dernier chiffre laisse une incertitude d'une demi-unité sur la neuvième décimale de δF . C'est ce qu'on a exprimé dans la table par le signe + mis à la suite de la valeur choisie $\delta F = 1746 6665 +$. On aurait pu également prendre..... $\delta F = 1746 6666 -$. Nous verrons ci-après l'usage de cette notation, pour corriger les petites erreurs qui peuvent résulter du progrès de l'opération.

$$\varphi = 3^\circ, \quad \omega = 3^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99935 60113	tang ² a....	7,47276 807
sin a....	8,78567 52787 7	R.....	+ 5461	r.....	6,26453 993
	8,73555 61628 4	Δ.....	9,99935 65574	R.....	3,73730 800
sin a...	8,73574 00451	a.....	8,24187 73676		
r = —	18 38823	p.....	8,24123 39250	p = 1742 74532	
		P.....	8,24252 08102	P = 1747 91702	

$$\varphi = 4^\circ, \quad \omega = 4^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99893 63682	tang ² a....	7,69110 103
sin a....	8,89464 32984 1	R.....	— 1831	r.....	5,57167 390
	8,84452 41824 8	Δ.....	9,99893 61851	R.....	3,26277 493
sin a...	8,84448 68855	a.....	8,24187 73676		
r =	3 72970	p.....	8,24081 35527	p = 1741 05926	
		P.....	8,24294 11825	P = 1749 60972	

$$\phi = 5^\circ, \quad \omega = 5^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99840 98748	tang ² a....	7,86626 810
sin ω....	8,98157 28715 4	R.	+ 6627	r.....	5,95505 051
	8,93145 37556 1	Δ.....	9,99841 05375	R.....	3,82131 861
sin a....	8,93154 39232	α.....	8,24187 73676		
r =	— 9 01676	p.....	8,24028 79051	p =	1738 95324
		P.....	8,24346 68301	P =	1751 72864.

$$\phi = 6^\circ, \quad \omega = 6^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99777 95564	tang ² a....	8,01190 777
sin ω....	9,05385 87563 7	R.....	— 647	r.....	4,79925 157
	9,00373 96404 4	Δ.....	9,99777 94917	R.....	2,81115 934
sin a....	9,00373 34424	α.....	8,24187 73676		
r =	61980	p.....	8,23965 68593	p =	1736 42832
		P.....	8,24409 78759	P =	1754 27581.

$$\phi = 7^\circ, \quad \omega = 7^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99704 36309	tang ² a....	8,13696 406
sin ω....	9,11569 76687 3	R.....	— 7250	r.....	5,72337 849
	9,06557 85528	Δ.....	9,99704 29059	R.....	3,86034 255
sin a....	9,06552 56622	α.....	8,24187 73676		
r =	5 28906	p.....	8,23892 02735	p =	1733 48574
		P.....	8,24483 44617	P =	1757 25368.

$$\phi = 8^\circ, \quad \omega = 8^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99620 17398	tang ² a....	8,24662 419
sin ω....	9,16970 20867 8	R.....	— 11318	r.....	5,80709 916
	9,11958 29708 5	Δ.....	9,99620 06080	r tang ² a..	4,05372 335
sin a....	9,11951 88352	α.....	8,24187 73676	r.....	6 414
r =	6 41356	p.....	8,23807 79756	r tang ² a..	113
		P.....	8,24567 67596	R.....	4,05378 862
p =	1730 12697				
P =	1760 66512.				

$$\phi = 9^\circ, \quad \omega = 9^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99525 34714	tang ² a....	8,34437 695
sin ω ...	9,21760 92289 4	R.....	— 10645	r.....	5,68272 796
	9,16749 01130	Δ	9,99525 24069		4,02710 491
sin a....	9,16744 19484	ω	8,24187 73676	r.....	4 816
r =	4 81646	p.....	8,23712 97745	r tang ² a..	106
		P.....	8,24662 49607	R.....	4,02715 413
p =	1726 35368				
P =	1764 51340.				

$$\phi = 10^\circ, \quad \omega = 10^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99419 83602	tang ² a....	8,43261 100
sin ω ...	9,26063 30434 5	R.....	— 2726	r.....	5,00292 164
	9,21051 39275	Δ	9,99419 80876	r tang ² a..	3,43553 264
sin a....	9,21050 38600	ω	8,24187 73676	r.....	1 007
r =	1 00675	p.....	8,23607 54552	r tang ² a..	27
		P.....	8,24767 92800	R.....	3,43554 298
p =	1722 16776				
P =	1768 80224.				

$$\phi = 11^\circ, \quad \omega = 11^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99303 58856	tang ² a....	8,51309 431
sin ω ...	9,29965 53093 1	R.....	+ 15265	r.....	5,67066 139
	9,24953 61934	Δ	9,99303 74121		4,18375 570
sin a....	9,24958 30382	ω	8,24187 73676	r.....	— 4 684
r =	— 4 68448	p.....	8,23491 47797	r tang ² a..	— 153
		P.....	8,24883 99555	R.....	4,18370 733
p =	1717 57132				
P =	1773 53578.				

$$\phi = 12^\circ, \quad \omega = 12^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99176 96100	tang ² a....	8,58692 248
sin ω ...	9,33533 67506 1	R.....	+ 5105	r.....	5,12107 045
	9,28521 76347	Δ	9,99177 01205		3,70799 293
sin a....	9,28523 08498	ω	8,24187 73676	r.....	— 1 322
r =	— 1 32151	p.....	8,23364 74881	r tang ² a..	— 51
		P.....	8,25010 72471	R.....	3,70797 920
p =	1712 56667				
P =	1778 71860.				

$$\phi = 13^\circ, \quad \omega = 13^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,99039 54410	tang ² a....	8,65536 307
sin ω...	9,36818 52534 1	R.....	+ 4902	r.....	5,03499 723
	9,31806 61375	Δ.....	9,99039 59312		3,69036 030
sin a....	9,31807 69767	α.....	8,24187 73676	r.....	— 1 084
r =	— 1 08392	p.....	8,23227 32988	r tang ² a..	— 49
		P.....	8,25148 14364	R.....	3,69034 897
p =	1707 15635				
P =	1784 35572.				

$$\phi = 14^\circ, \quad \omega = 14^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,98891 75119	tang ² a....	8,71901 258
sin ω...	9,39859 96421 3	R.....	— 29706	r.....	5,75376 838
	9,34848 05262	Δ.....	9,98891 45413		4,47278 096
sin a....	9,34842 38020	α.....	8,24187 73676	r.....	5 672
r =	5 67242	p.....	8,23079 19089	r tang ² a..	297
		P.....	8,25296 28263	R.....	4,47284 065
p =	1701 34312				
P =	1790 45259.				

$$\phi = 15^\circ, \quad \omega = 15^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,98732 57854	tang ² a....	8,77890 260
sin ω...	9,42689 88240 2	R.....	— 1578	r.....	4,41907 967
	9,37677 97081	Δ.....	9,98732 56276		3,19798 227
sin a....	9,37677 70834	α.....	8,24187 73676	r.....	262
r =	26247	p.....	8,22920 29952	r tang ² a..	16
		P.....	8,25455 17400	R.....	3,19798 505
p =	1695 12994				
P =	1797 01516.				

$$\phi = 16^\circ, \quad \omega = 16^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,98562 94425	tang ² a....	8,83516 911
sin ω...	9,45334 18046 3	R.....	— 5947	r.....	4,93910 473
	9,40322 26887	Δ... ..	9,98562 88478		3,77427 384
sin a....	9,40321 39970	α.....	8,24187 73676	r.....	869
r =	86917	p.....	8,22750 62154	r tang ² a..	59
		P.....	8,25624 85198	R.....	3,77428 312
p =	1688 52002				
P =	1804 04979.				

$$\phi = 17^\circ, \quad \omega = 17^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,98382 28058	tang ² a....	8,88842 650
sin ω....	9,47814 18041 2	R.....	+ 10340	r.....	5,12609 892
	9,42802 26882	Δ.....	9,98382 38398		4,01452 542
sin a....	9,42803 60572	a.....	8,24187 73676	r.....	— 1 337
r =	— 1 33690	p.....	8,22570 12074	r tang ² a..	— 103
		P.....	8,25805 35278	R.....	4,01451 102
p =	1681 51679				
P =	1811 56336.				

$$\phi = 18^\circ, \quad \omega = 18^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,98191 11603	tang ² a....	8,93887 079
sin ω....	9,50147 64453 6	R.....	— 9358	r.....	5,03230 037
	9,45135 73294 3	Δ.....	9,98191 02245		3,97117 116
sin a....	9,45134 65573	a.....	8,24187 73676	r.....	1 077
r =	1 07721	p.....	8,22378 75921	r tang ² a..	93
		P.....	8,25996 71431	R.....	3,97118 286
p =	1674 12388				
P =	1819 56319.				

$$\phi = 19^\circ, \quad \omega = 19^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,97988 80210	tang ² a....	8,98696 769
sin ω....	9,52349 52365 4	R.....	4149	r.....	4,63093 612
	9,47337 61406	Δ.....	9,97988 76061		3,61790 381
sin a....	9,47337 18656	a.....	8,24187 73676	r.....	427
r =	42750	p.....	8,22176 49737	r tang ² a..	41
		P.....	8,26198 97615	R.....	3,61790 849
p =	1666 34520				
P =	1828 05712.				

$$\phi = 20^\circ, \quad \omega = 20^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,97775 92588	tang ² a....	9,03282 549
sin ω....	9,54432 52953 9	R.....	— 36860	r.....	5,53369 277
	9,49420 61794 6	Δ.....	9,97775 55728		4,56651 826
sin a....	9,49417 20057	a.....	8,24187 73676	r.....	3 417
r =	3 41737 6	p.....	8,21963 29404	r tang ² a..	368
		P.....	8,26412 17948	R.....	4,56655 611
p =	1658 18484				
P =	1837 05346.				

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 265

$$\phi = 21^\circ, \omega = 21^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,97551 75659	tang ² a...	9,07681 271
sin ω...	9,56407 54326 2	R.....	— 38666	r.....	5,51048 455
	9,51395 63166 9	Δ.....	9,97551 36993		4,58729 726
sin a...	9,51392 39212	α.....	8,24187 73676	r.....	3 240
r =	3 23954 9	p.....	8,21739 10669	r tang ² a..	386
		P.....	8,26636 36683	R.....	4,58733 352
p =	1649 64717				
P =	1846 56104.				

$$\phi = 22^\circ, \omega = 22^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,97316 17704	tang ² a...	9,11911 416
sin ω...	9,58283 96605 8	R.....	— 2226	r.....	4,22843 886
	9,53272 05446 5	Δ.....	9,97316 15478		3,34755 302
sin a...	9,53271 88525	α.....	8,24187 73676		169
r =	16921 5	p.....	8,21503 89154	r tang ² a..	22
		P.....	8,26871 58198	R.....	3,34755 493
p =	1640 73679				
P =	1856 58920.				

$$\phi = 23^\circ, \omega = 23^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,97069 86306	tang ² a...	9,15976 441
sin ω...	9,60069 96819 9	R.....	+ 389	r.....	3,43013 958
	9,55058 05660 6	Δ.....	9,97069 86695		2,58990 399
sin a...	9,55058 08353	α.....	8,24187 73676	r.....	— 269
r =	— 2692 4	p.....	8,21257 60371	r tang ² a..	— 4
		P.....	8,27117 86981	R.....	2,58990 126
p =	1631 45852				
P =	1867 14780.				

$$\phi = 24^\circ, \omega = 24^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,96812 79369	tang ² a...	9,19891 769
sin ω...	9,61772 69586 8	R.....	— 33296	r.....	5,32344 909
	9,56760 78427 5	Δ.....	9,96812 46073		4,52236 678
sin a...	9,56758 67832	α.....	8,24187 73676	r.....	2 106
r =	2 10595 5	p.....	8,21000 19749	r tang ² a..	333
		P.....	8,27375 27603	R.....	4,52239 117
p =	1621 81747				
P =	1878 24724.				

$$\varphi = 25^\circ, \quad \omega = 25^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,96544 06799	tang ² a....	9,23682 845
sin ω....	9,63398 43502 6	R.....	— 17823	r.....	5,01414 782
	9,58386 52343 3	Δ.....	9,96543 88976		4,25097 627
sin a...	9,58385 49032	α.....	8,24187 73676	r.....	1 033
r =	1 03311 3	p.....	8,20731 62652	r tang ² a..	178
		P.....	8,27643 84700	R.....	4,25098 838
p =	1611 81898				
P =	1889 89846.				

$$\varphi = 26^\circ, \quad \omega = 26^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,96264 45304	tang ² a....	9,27349 074
sin ω....	9,64952 74374 0	R.....	— 34582	r.....	5,26533 843
	9,59940 83214 7	Δ.....	9,96264 10722		4,53882 917
sin a....	9,59938 98994	α.....	8,24187 73676	r.....	1 842
r =	1 84220 7	p.....	8,20451 84398	r tang ² a..	346
		P.....	8,27923 62954	R.....	4,53885 105
p =	1601 46864				
P =	1902 11292.				

$$\varphi = 27^\circ, \quad \omega = 27^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,95972 95967	tang ² a....	9,30912 424
sin ω....	9,66440 55998 0	R.....	+ 10663	r.....	4,71876 152
	9,61428 64838 7	Δ.....	9,95973 06630		4,02788 576
sin a...	9,61429 17170	α.....	8,24187 73676	r.....	— 523
r =	— 52331 3	p.....	8,20160 80306	r tang ² a..	— 107
		P.....	8,28214 67046	R.....	4,02787 946
p =	1590 77234				
P =	1914 90267.				

$$\varphi = 28^\circ, \quad \omega = 28^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,95670 41639	tang ² a....	9,34370 679
sin ω....	9,67866 29015 4	R.....	+ 30390	r.....	5,13903 769
	9,62854 37856 1	Δ.....	9,95670 72029		4,48274 448
sin a...	9,62855 75589	α.....	8,24187 73676	r.....	— 1 377
r =	— 1 37732 9	p.....	8,19858 45705	r tang ² a..	— 304
		P.....	8,28517 01647	R.....	4,48272 767
p =	1579 73620				
P =	1928 28030.				

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 267

$$\phi = 29^\circ, \quad \omega = 29^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,95356 77120	tang ² a....	9,37732 512
sin a....	9,69233 88236 6	R.....	+ 25188	r.....	5,02385 182
	9,64221 97077 3	Δ.....	9,95357 02308		4,40117 694
sin a....	9,64223 02723	a.....	8,24187 73676	r.....	— 1 056
r = —	1 05645 7	p.....	8,19544 75984	r tang ² a..	— 252
		P.....	8,28830 71368	R.....	4,40119 002
p =	1568 36665				
P =	1942 25897.				

$$\phi = 30^\circ, \quad \omega = 30^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,95031 96585	tang ² a....	9,41005 737
sin a....	9,70546 88745 5	R.....	— 3640	r.....	4,15110 005
	9,65534 97586 2	Δ.....	9,95031 92945		3,56115 742
sin a....	9,65534 83425	a.....	8,24187 73676	r.....	142
r =	14161 2	p.....	8,19219 66621	r tang ² a..	36
		P.....	8,29155 80731	R.....	3,56115 920
p =	1556 67038				
P =	1956 85242.				

$$\phi = 31^\circ, \quad \omega = 31^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,94695 93567	tang ² a....	9,44197 422
sin a....	9,71808 51017 9	R.....	— 54006	r.....	5,29044 555
	9,66796 59858 6	Δ.....	9,94695 39561		4,73241 977
sin a....	9,66794 64674	a.....	8,24187 73676	r.....	1 952
r =	1 95184 6	p.....	8,18883 13237	r tang ² a..	540
		P.....	8,29492 34115	R.....	4,73244 469
p =	1544 65439				
P =	1972 07493.				

$$\phi = 32^\circ, \quad \omega = 32^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,94347 46145	tang ² a....	9,47324 008
sin a....	9,73021 65240 0	R.....	— 8182	r.....	4,43962 791
	9,68009 74080 7	Δ.....	9,94347 37963		3,91286 799
sin a....	9,68009 46562	a.....	8,24187 73676	r.....	275
r =	27518 7	p.....	8,18535 11639	r tang ² a..	82
		P.....	8,29840 35713	R.....	3,91287 156
p =	1532 32598				
P =	1987 94137.				

$$\varphi = 33^\circ, \quad \omega = 33^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,93987 53111	tang ² a....	9,50380 963
sin ω....	9,74188 94971 3	R.....	+ 31086	r.....	4,98876 402
	9,69177 03812	Δ.....	9,93987 84197		4,49257 365
sin a...	9,69178 01258	a.....	8,24187 73676	r.....	— 974
r = —	97446	p.....	8,18175 57873	r tang ² a..	— 311
		P.....	8,30199 89479	R.....	4,49256 080
p =	1519 69274				
P =	2004 46717.				

$$\varphi = 34^\circ, \quad \omega = 34^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,93617 28891	tang ² a....	9,53364 027
sin ω....	9,75312 80269 0	R.....	— 54280	r.....	5,20097 546
	9,70300 89109 7	Δ.....	9,93616 74611		4,73461 573
sin a...	9,70299 30264	a.....	8,24187 73676	r.....	1 588
r =	1 58845 7	p.....	8,17804 48287	r tang ² a..	543
		P.....	8,30570 99065	R.....	4,73463 704
p =	1506 76259				
P =	2021 66832.				

$$\varphi = 35^\circ, \quad \omega = 35^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,93234 22152	tang ² a....	9,56297 653
sin ω....	9,76395 40365 5	R.....	— 16227	r.....	4,64724 796
	9,71383 49206 2	Δ.....	9,93234 05925		4,21022 449
sin a...	9,71383 04820	a.....	8,24187 73676	r.....	444
r =	44386 2	p.....	8,17421 79601	r tang ² a..	162
		P.....	8,30953 67751	R.....	4,21023 055
p =	1493 54379				
P =	2039 56136.				

$$\varphi = 36^\circ, \quad \omega = 36^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,92839 41671	tang ² a....	9,59176 585
sin ω....	9,77438 75973 3	R.....	+ 33632	r.....	4,93499 306
	9,72426 84814	Δ.....	9,92839 75303		4,52675 891
sin a...	9,72427 70912	a.....	8,24187 73676	r.....	— 861
r = —	86098	p.....	8,17027 48979	r tang ² a..	— 336
		P.....	8,31347 98373	R.....	4,52674 694
p =	1480 04492				
P =	2058 16334.				

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 269

$$\phi = 37^\circ, \quad \omega = 37^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,92434 12467	tang ² a....	9,61995 816
sin ω....	9,78444 71278 3	R.....	— 32033	r.....	4,88562 692
	9,73432 80119	Δ.....	9,92433 80434		4,50558 508
sin a....	9,73432 03272	α.....	8,24187 73676	r.....	768
r =	76847	p.....	8,16621 54110	r tang ² a..	320
		P.....	8,31753 93242	R.....	4,50559 596
p =	1466 27494				
P =	2077 49183.				

$$\phi = 38^\circ, \quad \omega = 38^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,92015 55343	tang ² a....	9,64777 877
sin ω....	9,79414 95670 7	R.....	+ 64290	r.....	5,16038 328
	9,74403 04511 4	Δ....	9,92016 19633		4,80816 205
sin a....	9,74404 49183	α.....	8,24187 73676	r.....	— 1 447
r =	— 1 44671 6	p.....	8,16203 93309	r tang ² a..	— 643
		P.....	8,32171 54043	R.....	4,80814 115
p =	1452 24313				
P =	2097 56489.				

$$\phi = 39^\circ, \quad \omega = 39^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,91586 34168	tang ² a....	9,67508 040
sin ω....	9,80351 05253 1	R.....	+ 57771	r.....	5,08664 523
	9,75339 14093 8	Δ.....	9,91586 91939		4,76172 563
sin a....	9,75340 36174	α.....	8,24187 73676	r.....	— 1 221
r =	— 1 22080 2	p.....	8,15774 65615	r tang ² a..	— 578
		P.....	8,32600 81737	R.....	4,76170 764
p =	1437 95919				
P =	2118 40100.				

$$\phi = 40^\circ, \quad \omega = 40^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,91146 49165	tang ² a....	9,70191 013
sin ω....	9,81254 44160 3	R.....	— 51936	r.....	5,01354 922
	9,76242 53001	Δ.....	9,91145 97229		4,71544 935
sin a....	9,76241 49832	α.....	8,24187 73676	r.....	1 032
r =	1 03169	p.....	8,15333 70905	r tang ² a..	519
		P.....	8,33041 76447	R.....	4,71546 486
p =	1423 43320				
P =	2140 01908.				

$$\phi = 41^\circ, \quad \omega = 41^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,90692 92066	tang ^a a....	9,72844 905
sin a....	9,82126 45717 5	R.....	+ 44288	r.....	4,91784 567
	9,77114 54558 2	Δ.....	9,90693 36354		4,64629 472
sin a....	9,77115 37323	a.....	8,24187 73676	r.....	— 828
r = —	82764 8	p.....	8,14881 10030	r tang ^a a..	— 443
		P.....	8,33494 37322	R.....	4,64628 201
p =	1408 67564				
P =	2162 43834.				

$$\phi = 42^\circ, \quad \omega = 42^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,90228 51388	tang ^a a....	9,75457 926
sin a....	9,82968 33460 4	R.....	+ 59879	r.....	5,02271 245
	9,77956 42301 1	Δ.....	9,90229 11267		4,77729 171
sin a....	9,77957 47670	a.....	8,24187 73676	r.....	— 1 054
r = —	1 05368 9	p.....	8,14416 84943	r tang ^a a..	— 599
		P.....	8,33958 62409	R.....	4,77727 518
p =	1393 69741				
P =	2185 67830.				

$$\phi = 43^\circ, \quad \omega = 43^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,89753 25476	tang ^a a....	9,78032 099
sin a....	9,83781 22036 4	R.....	— 281	r.....	2,66847 910
	9,78769 30877 1	Δ.....	9,89753 25195	R.....	2,44880 009
sin a....	9,78769 30411	a.....	8,24187 73676		
r =	466 1	p.....	8,13940 98871		
		P.....	8,34434 48481		
p =	1378 50989				
P =	2209 75868.				

$$\phi = 44^\circ, \quad \omega = 44^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,89265 43791	tang ^a a....	9,80578 881
sin a....	9,84566 18003 3	R.....	+ 39012	r.....	4,78541 526
	9,79554 26844	Δ.....	9,89265 82803		4,59120 407
sin a....	9,79554 87856	a.....	8,24187 73676	r.....	— 610
r = —	61012	p.....	8,13453 56479	r tang ^a a..	— 390
		P.....	8,34921 90873	R.....	4,59119 407
p =	1363 12489				
P =	2234 69927.				

$$\phi = 45^\circ, \quad \omega = 45^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,88766 62110	tang ² a....	9,83092 180
sin ω ...	9,85324 20538 2	R.	+ 28277	r.....	4,62051 186
	9,80312 29378 9	Δ	9,88766 90387		4,45143 366
sin a...	9,80312 71115	α	8,24187 73676	r.....	— 417
	41736 1	p.....	8,12954 64063	r tang ² a..	— 283
r = —		P.....	8,35420 83289	R.....	4,45142 666
p =	1347 55471				
P =	2260 51987.				

Arrivé aux valeurs de $E\phi$ et $F\phi$ pour l'amplitude $\phi = 45^\circ$, on voit qu'en comparant ces valeurs avec celles que donne la table VIII, l'accord est parfait sur la fonction F , et la différence est seulement d'une unité décimale du dernier ordre sur la fonction E . Cette différence peut facilement être corrigée, en diminuant d'une unité du dernier chiffre, l'une des différences premières, peu éloignée de 45° , marquée du signe —. Nous choisirions de préférence la différence qui répond à 30° , et pour laquelle nous prendrions 1556 6570. On pourrait aussi, pour faire remonter moins haut la correction, l'appliquer à la différence qui répond à 41° , où se trouve un semblable signe —, et réduire ainsi la différence 1408 6665 à 1408 6664, ce qui diminuera les nombres E d'une unité dans le dernier chiffre, depuis $\phi = 42^\circ$ jusqu'à $\phi = 45^\circ$. Mais avant d'effectuer cette correction, on peut continuer le calcul de la table jusqu'à la fin, pour faire toutes les rectifications à la fois.

Nous remarquerons au reste que c'est par une sorte de hasard que le calcul de la table s'est rencontré aussi exactement avec le résultat tiré des formules générales. Cela prouve seulement que les légères erreurs, qui, à chaque opération, affectent ou peuvent affecter le dernier chiffre, se sont compensées; dans d'autres cas, la compensation n'aura pas lieu aussi exactement; mais en opérant avec l'attention nécessaire, il y aura rarement des erreurs de plus de deux ou trois unités sur le dernier chiffre, et dans tous les cas, cette erreur sera facile à corriger par les moyens que nous avons déjà indiqués.

$$\phi = 46^\circ, \quad \omega = 46^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,88256 76934	tang ^a a....	9,85574 498
sin a....	9,86056 22069 9	R.....	— 20842	r.....	4,46318 500
	9,81044 30910 6	Δ.....	9,88256 56092		4,31892 998
sin a....	9,81044 01858	a.....	8,24187 73676	r.....	291
r =	29052 6	p.....	8,12444 29768	r tang ^a a..	208
		P.....	8,35931 17584	R.....	4,31893 497
p =	1331 81216				
P =	2287 24011.				

$$\phi = 47^\circ, \quad \omega = 47^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,87735 84196	tang ^a a....	9,88028 192
sin a....	9,86763 08843 2	R.....	— 94055	r.....	5,09307 797
	9,81751 17683 9	Δ.....	9,87734 90141		4,97335 989
sin a....	9,81749 93782	a.....	8,24187 73676	r.....	1 239
r =	1 23901 9	p.....	8,11922 63817	r tang ^a a..	940
		P.....	8,36452 83535	R.....	4,97338 168
p =	1315 91059				
P =	2314 87931.				

$$\phi = 48^\circ, \quad \omega = 48^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,87201 90599	tang ^a a....	9,90463 954
sin a....	9,87445 61424 2	R.....	+ 14491	r.....	4,25667 205
	9,82433 70264 9	Δ.....	9,87202 05090		4,16111 159
sin a....	9,82433 88323	a.....	8,24187 73676	r.....	— 181
r =	— 18058 1	p.....	8,11389 78766	r tang ^a a..	— 145
		P.....	8,36985 68586	R.....	4,16110 833
p =	1299 86388				
P =	2343 45630.				

$$\phi = 49^\circ, \quad \omega = 49^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,86658 62915	tang ^a a....	9,92866 919
sin a....	9,88104 55153 7	R.....	— 46771	r.....	4,74129 660
	9,83092 63994 4	Δ.....	9,86658 16144		4,66996 579
sin a....	9,83092 08876	a.....	8,24187 73676	r.....	551
r =	55118 4	p.....	8,10845 89820	r tang ^a a..	468
		P.....	8,37529 57532	R.....	4,66997 598
p =	1283 68652				
P =	2372 98915.				

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 273

$$\phi = 50^\circ, \omega = 50^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,86104 11838	tang ² a....	9,95247 580
sin a....	9,88740 60554 9	R.....	— 70437	r.....	4,89530 981
	9,83728 69395 6	Δ.....	9,86103 41401		4,84778 561
sin a...	9,83727 90816	a.....	8,24187 73676	r.....	786
r =	78579 6	p.....	8,10291 15077	r tang ² a..	704
		P.....	8,38084 32275	R.....	4,84780 051
p =	1267 39359				
P =	2403 49502.				

$$\phi = 51^\circ, \omega = 51^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,85538 02266	tang ² a....	9,97607 828
sin a....	9,89354 43700 9	R.....	— 28628	r.....	4,48070 528
	9,84342 52541 6	Δ.....	9,85538 02266		4,45678 356
sin a...	9,84342 22293	a.....	8,24187 73676	r.....	302
r =	30248 6	p.....	8,09725 75942	r tang ² a..	286
		P.....	8,38649 71410	R.....	4,45678 944
p =	1251 00082				
P =	2434 98977.				

$$\phi = 52^\circ, \omega = 52^\circ \frac{1}{2}.$$

c.....	9,94988 08840 7	cos a.....	9,84963 23386	tang ² a....	9,99941 045
sin a....	9,89946 66546 1	R.....	— 99600	r.....	4,99882 930
	9,84934 75386 8	Δ.....	9,84962 23786		4,99823 975
sin a...	9,84933 75656	a.....	8,24187 73676	r.....	997
r =	99730 8	p.....	8,09149 97462	r tang ² a..	996
		P.....	8,39225 49890	R.....	4,99825 968
p =	1234 52459				
P =	2467 48766.				

Passé ce terme, l'angle auxiliaire a deviendrait plus grand que 45° , et alors la correction R serait plus grande que r ; c'est pourquoi il convient de calculer Δ par la seconde formule. On observera en même tems que les différences quatrièmes $\delta^4 P$ commencent à devenir assez grandes pour qu'il soit convenable d'y avoir égard dans le calcul de δE , et surtout dans celui de δF . Mais pour cela, il faut que la série des auxiliaires P soit avancée d'un terme de plus que la quantité E ou F qu'on peut déterminer par la différence δE ou δF .

Au reste, pour rendre aussi simple qu'il est possible le calcul de la différence δF , on voit par la formule $\delta F = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^\circ - \frac{17}{5760} \delta^4 P^\circ$, qu'il faut prendre, au lieu de $\delta^2 P^\circ$, la différence seconde corrigée $\delta^2 P^\circ - \frac{17}{240} \delta^4 P^\circ$; et alors en appelant cette différence $\delta^2 P^\circ c$, on aura $\delta F = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^\circ c$; il en est de même de δE . On fera d'ailleurs attention au signe que $\delta^4 P^\circ$ doit prendre par rapport à $\delta^2 P^\circ$. Les différences qui vont en augmentant, sont toujours supposées positives, les autres sont négatives. Ainsi, dans la table construite pour la fonction F , les $\delta^2 P$ allant en augmentant les $\delta^3 P$ sont positifs par rapport aux $\delta^2 P$; mais les $\delta^3 P$ allant en diminuant (au moins jusqu'à un certain terme), les $\delta^4 P$ sont négatives, ce qui rendra $\delta^2 P^\circ - \frac{17}{240} \delta^4 P^\circ$ plus grand que $\delta^2 P^\circ$.

$$\varphi = 53^\circ, \quad \omega = 53^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ^a a...	9,76101 047
cos ω ...	9,77438 75973 2	cos a.....	9,81328 29020	r.....	3,79081 978
	0,06722 17165 4		9,84376 38628 5	r'.....	3,55182 025
tang a..	0,06722 23333	R.....	— 3563	r.....	— 62
r = —	6177 6	Δ	9,84376 35065	r'.....	+ 36
		α	8,24187 73676	R.....	3,55181 999
p = 1217 98201		p.....	8,08564 08741		
P = 2501 00098		P.....	8,39811 38611		

$$\varphi = 54^\circ, \quad \omega = 54^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ^a a...	9,75206 594
cos ω ...	9,76395 40365 5	cos a.....	9,81923 32689	r.....	5,06238 002
	0,05678 81557 7		9,83781 34957 5	r'.....	4,81444 596
tang a..	0,05679 97004	R.....	— 65229	r.....	— 1 154
r = —	1 15446 3	Δ	9,83780 69728	r'.....	+ 652
		α	8,24187 73676	R.....	4,81444 094
p = 1201 39091		p.....	8,07968 43404		
P = 2535 53958		P.....	8,40407 03948		

La série des auxiliaires étant ainsi avancée d'un terme de plus, on peut maintenant calculer la différence δF ou δE qui sert à ajouter un nouveau terme à la colonne des fonctions.

Ainsi, 1°. pour avoir le δF qui répond à $\varphi = 52^\circ$, j'observe que

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 275

relativement à la différence $\delta^2 P^0 = 101543$, on a $\delta^4 P^0 = -244$, ce qui donne la différence corrigée $\delta^2 P^0 c = 101543 + \frac{17}{40} \cdot 244 = 101560$, et ensuite $\delta F = P + \frac{1}{4} \delta^2 P^0 c = 2467 \ 52998$, valeur qui, en supprimant la dernière décimale, se réduit à 2467 5300, ce qui donne pour 53° , $F = 1,04896 \ 1980$.

2°. Dans la table des fonctions E, on a pour $\varphi = 52^\circ$, $\delta^2 p^0 = -6635$ et $\delta^4 p^0 = +73$, ce qui donne $\delta^2 p^0 c = -6640$, $\delta E = p + \frac{1}{4} \delta^2 p^0 c = 1234 \ 52182$, qui se réduit à 1234 5218.

$$\varphi = 55^\circ, \quad \omega = 55^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ .. 0,29283 41192 2	b..... 9,65704 67648 5	$\sin^2 a$ 9,74248 801
cos ω ... 9,75312 80269	séc a ... 0,17469 96547	r..... 5,26680 818
0,04596 21461 2	R..... + 1 02166	r'..... 5,00929 619
tang a .. 0,04594 36616	Δ 9,83175 66361	r..... + 1 848
r = 1 84845 2	ω 8,24187 73676	r'..... - 1 022
p = 1184 76988	p..... 8,07363 40037	R..... 5,00930 445
P = 2571 11044.	P..... 8,41012 07315	

$$\varphi = 56^\circ, \quad \omega = 56^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ .. 0,29283 41192 2	b..... 9,65704 67648 5	$\sin^2 a$ 9,73231 828
cos ω ... 9,74188 94971 2	séc a ... 0,16857 67900	r..... 5,09041 185
0,03472 36163 4	R..... - 66485 1	r'..... 4,82273 013
tang a .. 0,03473 59307	Δ 9,82561 69063	r..... - 1 231
r = - 1 23143 6	ω 8,24187 73676	r'..... + 665
p = 1168 13833	p..... 8,06749 42739	R..... 4,82272 447
P = 2607 71702.	P..... 8,41626 04613	

$$\varphi = 57^\circ, \quad \omega = 57^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ .. 0,29283 41192 2	b..... 9,65704 67648 5	$\sin^2 a$ 9,72140 405
cos ω ... 9,73021 65240	séc a ... 0,16234 31620	r..... 4,73698 738
0,02305 06432 2	R..... + 28734	r'..... 4,45839 143
tang a .. 0,02304 51858	Δ 9,81939 28002	r..... + 546
r = 54574 2	ω 8,24187 73676	r'..... - 287
p = 1151 51651	p..... 8,06127 01678	R..... 4,45839 402
P = 2645 35869.	P..... 8,42248 45674	

$$\varphi = 58^\circ, \quad \omega = 58^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,70974 077
cos ω ...	9,71808 51017 9	séc a...	0,15603 73479	r.....	5,06016 541
	0,01091 92210 1	R.....	58872 4	r'	4,76990 618
tang a..	0,01090 77351	Δ	9,81309 00000	r.....	+ 1 149
r =	1 14859 1	α	8,24187 73676	r'.....	- 589
p = 1134 92554		p.....	8,05496 73676	R.....	4,76991 178
P = 2684 03001.		P.....	8,42878 73676		

$$\varphi = 59^\circ, \quad \omega = 59^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,69728 232
cos ω ...	9,70546 88745 5	séc a...	0,14967 44212	r.....	5,09989 911
	9,99830 29937 7	R.....	- 62686 6	r'.....	4,79718 143
tang a..	9,99831 55801	Δ	9,80671 49174	r.....	- 1 259
r = -	1 25863 3	α	8,24187 73676	r'.....	+ 627
p = 1118 38745		p.....	8,04859 22850	R.....	4,79717 511
P = 2723 71994.		P.....	8,43516 24502		

$$\varphi = 60^\circ, \quad \omega = 60^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,68389 126
cos ω ...	9,69233 88236	séc a...	0,14322 86353	r.....	4,12199 294
	9,98517 29428 8	R.....	- 6395 6	r'.....	3,80588 420
tang a..	9,98517 42672	Δ	9,80027 47606	r.....	- 132
r = -	13243 2	α	8,24187 73676	r'.....	+ 64
p = 1101 92523		p.....	8,04215 21282	R.....	3,80588 352
P = 2764 41096.		P.....	8,44160 26070		

$$\varphi = 61^\circ, \quad \omega = 61^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,66950 440
cos ω ...	9,67866 29015 4	séc a...	0,13671 85770	r.....	5,41205 585
	9,97149 70207 6	R.....	+ 1 22623 7	r'.....	5,08856 025
tang a..	9,97147 07752	Δ	9,79377 76042	r.....	+ 2 625
r =	2 62455 6	α	8,24187 73676	r'.....	- 1 226
p = 1085 56285		p.....	8,03565 49718	R.....	5,08857 424
P = 2806 07816.		P.....	8,44809 97634		

$$\phi = 62^\circ, \omega = 62^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,65409 859
cos ω ...	9,66440 55998 2	séc a...	0,13018 18152	r.....	4,93490 831
	9,95723 97190 2	R.....	38816 1	r'.....	4,58900 690
tanga..	9,95723 11109	Δ	9,78723 24616 6	r.....	+ 861
r =	86081 2	α	8,24187 73676	r'.....	- 388
		p.....	8,02910 98292 6	R.....	4,58901 163
p =	1069 32527	P.....	8,45464 49059 4		
P =	2848 68813.				

$$\phi = 63^\circ, \omega = 63^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,63750 571
cos ω ...	9,64952 74374 0	séc a...	0,12359 79131	r.....	5,03287 732
	9,94236 15566 2	R.....	46815 5	r'.....	4,67038 303
tanga..	9,94235 07702	Δ	9,78064 93595	r.....	+ 1 079
r =	1 07864 2	α	8,24187 73676	r'.....	- 468
		p.....	8,02252 67271	R.....	4,67038 914
p =	1053 23850	P.....	8,46122 80081		
P =	2892 19791.				

$$\phi = 64^\circ, \omega = 64^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,61963 588
cos ω ...	9,63398 43502 6	séc a...	0,11698 70215	r.....	5,13052 610
	9,92681 84694 8	R.....	56256 1	r'.....	4,75016 198
tanga..	9,92680 49635	Δ	9,77403 94119 6	r.....	+ 1 351
r =	1 35059 8	α	8,24187 73676	r'.....	- 563
		p.....	8,01591 67795 6	R.....	4,75016 986
p =	1037 32962	P.....	8,46783 79556 4		
P =	2936 55376.				

$$\phi = 65^\circ, \omega = 65^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,60038 902
cos ω ...	9,61772 69586 8	séc a...	0,11036 91646	r.....	4,41432 142
	9,91056 10779	R.....	- 10344 5	r'.....	4,01471 044
tanga..	9,91056 36740	Δ	9,76741 48950	r.....	- 260
r =	- 25961	α	8,24187 73676	r'.....	+ 103
		p.....	8,00929 22626	R.....	4,01470 887
p =	1021 62677	P.....	8,47446 24726		
P =	2981 68989.				

$$\phi = 66^\circ, \quad \omega = 66^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,57954 565
cos ω ...	9,60069 96819 9	séc a...	0,10373 12683	r.....	5,47287 502
	9,89353 38012 1	R.....	12833 8	r'.....	5,05242 067
tang a..	9,89350 40931	Δ	9,76078 93165 3	r.....	+ 2 971
r =	2 97081 1	α	8,24187 73676	r'.....	- 1 128
p =	1006 15916	p.....	8,00266 66841 3	R.....	5,05243 910
P =	3027 52718.	P.....	8,48108 80510 7		

$$\phi = 67^\circ, \quad \omega = 67^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,55707 886
cos ω ...	9,58283 96605 8	séc a...	0,09712 86688	r.....	4,75450 123
	9,87567 37798	R.....	20492	r'.....	4,31158 009
tang a..	9,87566 80978	Δ	9,75417 74828 5	r.....	+ 568
r =	56820	α	8,24187 73676	r'.....	- 205
p =	990 95709	p.....	7,99605 48504 5	R.....	4,31158 372
P =	3073 97184.	P.....	8,48769 98847 5		

$$\phi = 68^\circ, \quad \omega = 68^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,53272 879
cos ω ...	9,56407 54326 1	séc a...	0,09055 06734	r.....	4,74181 082
	9,85690 95518 3	R.....	- 18816 4	r'.....	4,27453 961
tang a..	9,85691 50702	Δ	9,74759 55566	r.....	- 552
r =	- 55183 7	α	8,24187 73676	r'.....	+ 188
p =	976 05193	p.....	7,98947 29242	R.....	4,27453 597
P =	3120 91407.	P.....	8,49428 18110		

$$\phi = 69^\circ, \quad \omega = 69^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,50625 605
cos ω ...	9,54432 52953 9	séc a...	0,08400 62848	r.....	5,39972 580
	9,83715 94146 1	R.....	+ 80537 6	r'.....	4,90598 185
tang a..	9,83713 43116	Δ	9,74106 11034	r.....	+ 2 510
r =	2 51030 1	α	8,24187 73676	r'.....	- 805
p =	961 47605	p.....	7,98293 84710	R.....	4,90599 890
P =	3168 22681.	P.....	8,50081 62642		

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 279

$$\phi = 70^\circ, \omega = 70^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,47757 600
cos ω ...	9,52349 52565 4	séc a...	0,07754 84976	r.....	4,85249 463
	9,81632 93757 6	R.....	— 21382 5	r'.....	4,33007 063
tang a..	9,81633 64960	Δ	9,73459 31242	r.....	— 712
r =	— 71202 4	ω	8,24187 73676	r'.....	+ 214
p =	947 26282	p.....	7,97647 04918	R.....	4,33006 565
P =	3215 76455.	P.....	8,50728 42434		

$$\phi = 71^\circ, \omega = 71^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,44625 918
cos ω ...	9,50147 64453 6	séc a...	0,07115 92270	r.....	5,33736 500
	9,79431 05645 8	R.....	+ 60763 1	r'.....	4,78362 118
tang a..	9,79428 88193	Δ	9,72821 20681 6	r.....	+ 2 175
r =	2 17452 8	ω	8,24187 73676	r'.....	— 608
p =	933 44651	p.....	7,97008 94357 6	R.....	4,78363 985
P =	3263 36236.	P.....	8,51366 52994 4		

$$\phi = 72^\circ, \omega = 72^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,41215 192
cos ω ...	9,47814 18041 1	séc a...	0,06489 06520	r.....	4,96896 507
	9,77097 59233 3	R.....	+ 24050 5	r'.....	4,38111 699
tang a..	9,77096 66130	Δ	9,72193 98219	r.....	+ 931
r =	93103 3	ω	8,24187 73676	r'.....	— 241
p =	920 06220	p.....	7,96381 71895	R.....	4,38112 389
P =	3310 83506.	P.....	8,51993 75457		

$$\phi = 73^\circ, \omega = 73^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,37485 455
cos ω ...	9,45334 18046 2	séc a...	0,05875 42277	r.....	4,74652 989
	9,74617 59238 4	R.....	— 13224 5	r'.....	4,12138 444
tang a..	9,74618 15017	Δ	9,71579 96701	r.....	— 558
r =	— 55778 6	ω	8,24187 73676	r'.....	+ 132
p =	907 14568	p.....	7,95767 70377	R.....	4,12138 018
P =	3357 97685.	P.....	8,52607 76975		

$$\varphi = 74^\circ, \quad \omega = 74^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,33388 855
cos ω ...	9,42689 88240 2	séc a...	0,05276 41736	r.....	5,38908 524
	9,71973 29432 4	R.....	+ 52843 6	r'.....	4,72297 379
tang a..	9,71970 84478	Δ	9,70981 62228	r.....	+ 2 450
r =	2 44954 4	α	8,24187 73676	r'.....	- 528
		p.....	7,95169 35904	R.....	4,72299 301
p =	894 73328	P.....	8,53206 11448		
P =	3404 56120.				

$$\varphi = 75^\circ, \quad \omega = 75^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,28893 092
cos ω ...	9,39859 96421 3	séc a...	0,04696 85938	r.....	3,46664 523
	9,69143 37513 5	R.....	- 569 6	r'.....	2,75557 615
tang a..	9,69143 40542	Δ	9,70401 53017	r.....	- 29
r =	- 2928 5	α	8,24187 73676	r'.....	+ 6
		p.....	7,94589 26693	R.....	2,75557 592
p =	882 86168	P.....	8,53786 20659		
P =	3450 34137.				

$$\varphi = 76^\circ, \quad \omega = 76^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,23923 248
cos ω ...	9,36818 52534 1	séc a...	0,04137 15398	r.....	5,49956 928
	9,66101 93726 3	R.....	+ 54806	r'.....	4,73880 176
tang a..	9,66098 77812	Δ	9,69842 37852 5	r.....	+ 3 159
r =	3 15914 3	α	8,24187 73676	r'.....	- 548
		p.....	7,94030 11528 5	R.....	4,73882 787
p =	871 56775	P.....	8,54345 35823 5		
P =	3495 05152.				

$$\varphi = 77^\circ, \quad \omega = 77^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	9,18425 189
cos ω ...	9,33533 67506 1	séc a...	0,03601 86194	r.....	5,42008 502
	9,62817 08698 3	R.....	40212 3	r'.....	4,60433 691
tang a..	9,62814 45620	Δ	9,69306 94055	r.....	+ 2 631
r =	2 63078 3	α	8,24187 73676	r'.....	- 402
		p.....	7,93494 67731	R.....	4,60435 920
p =	860 88824	P.....	8,54880 79621		
P =	3538 40844.				

$$\phi = 78^\circ, \omega = 78^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ .. 0,29283 41192 2	b. 9,65704 67648 5	sin ² a..... 9,12310 955
cos ω ... 9,29965 53093 1	séc a... 0,03093 35881	r..... 4,02719 870
9,59248 94285 3	R..... + 1413 5	r'..... 3,15030 825
tang a.. 9,59248 83639	Δ 9,68798 04943	r..... + 106
r = 10646 3	a..... 8,24187 73676	r'..... - 14
p = 850 85952	p..... 7,92985 78619	R..... 3,15030 917
P = 3580 11414.	P..... 8,55389 68733	

$$\phi = 79^\circ, \omega = 79^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ .. 0,29283 41192 2	b. 9,65704 67648 5	sin ² a..... 9,05468 158
cos ω ... 9,26063 30434 4	séc a... 0,02614 05192	r..... 5,15062 874
9,55346 71626 6	R..... - 16043 5	r'..... 4,20531 032
tang a.. 9,55348 13085	Δ 9,68318 56797	r..... - 1 415
r = - 1 41458 4	a..... 8,24187 73676	r'..... + 160
p = 841 51730	p..... 7,92506 30473	R..... 4,20529 777
P = 3619 85928.	P..... 8,55869 16879	

$$\phi = 80^\circ, \omega = 80^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ .. 0,29283 41192 2	b. 9,65704 67648 5	sin ² a..... 8,97749 842
cos ω ... 9,21760 92289 4	séc a... 0,02166 38944	r..... 5,48066 737
9,51044 33481 6	R..... + 28720 5	r'..... 4,45816 579
tang a.. 9,51041 31022	Δ 9,67871 35313	r..... + 3 025
r = 3 02459 6	a..... 8,24187 73676	r'..... - 287
p = 832 89623	p..... 7,92059 08989	R..... 4,45819 317
P = 3657 32737.	P..... 8,56316 38363	

$$\phi = 81^\circ, \omega = 81^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ .. 0,29283 41192 2	b. 9,65704 67648 5	sin a..... 8,89002 032
cos ω ... 9,16970 20867 7	séc a... 0,01754 70254	r..... 5,32177 257
9,46253 62059 9	R..... - 16284 5	r'..... 4,21179 289
tang a.. 9,46255 71844	Δ 9,67459 21618	r..... - 2 098
r = - 2 09784 1	a..... 8,24187 73676	r'..... + 163
p = 825 02960	p..... 7,91646 95294	R..... 4,21177 354
P = 3692 19990.	P..... 8,56728 52058	

$$\phi = 82^\circ, \quad \omega = 82^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a	8,78951 015
cos ω ...	9,11569 76687 2	sec a ...	0,01380 36847	r.....	5,43091 090
	9,40853 17879 4	R.....	— 16611	r'.....	4,22042 105
tang α ..	9,40855 87598	Δ	9,67084 87884 5	r.....	— 2 697
r = —	2 69718 6	ω	8,24187 73676	r'.....	+ 166
p = 817 94887		p.....	7,91272 61560 5	R.....	4,22039 574
P = 3724 16213.		P.....	8,57102 85791 5		

$$\phi = 83^\circ, \quad \omega = 83^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a	8,67238 127
cos ω ...	9,05385 87563 7	sec a ...	0,01046 05407	r.....	5,62014 949
	9,34669 28755 9	R.....	+ 19614 2	r'.....	4,29253 076
tang α ..	9,34665 11743	Δ	9,66750 92669 7	r.....	+ 4 170
r = —	4 17012 9	ω	8,24187 73676	r'.....	— 196
p = 811 68334		p.....	7,90938 66345 7	R.....	4,29257 050
P = 3752 90958.		P.....	8,57436 81006 3		

$$\phi = 84^\circ, \quad \omega = 84^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a	8,53367 039
cos ω ...	8,98157 28715 4	sec a ...	0,00755 01040	r.....	5,33630 680
	9,27440 69907 6	R.....	+ 7413 0	r'.....	3,86997 719
tang α ..	9,27438 52984	Δ	9,66459 76101 5	r.....	+ 2 169
r = —	2 16923 6	ω	8,24187 73676	r'..... a ..	— 74
p = 806 25975		p.....	7,90647 49777 5	R.....	3,86999 814
P = 3778 15488.		P.....	8,57727 97574 5		

$$\phi = 85^\circ, \quad \omega = 85^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a	8,36466 552
cos ω ...	8,89464 32984 0	sec a ...	0,00508 74168	r.....	5,75770 888
	9,18747 74176 2	R.....	13256 5	r'.....	4,12237 440
tang α ..	9,18742 01764	Δ	9,66213 55073	r.....	+ 5 724
r = —	5 72412 2	ω	8,24187 73676	r'.....	— 133
p = 801 70183		p.....	7,90401 28749	R.....	4,12243 131
P = 3799 63483.		P.....	8,57974 18603		

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 283

$$\phi = 86^\circ, \omega = 86^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	8,15095 984
cos ω ...	8,78567 52787 7	séc a...	0,00309 60397	r.....	5,82323 752
	9,07850 93979 9	R.....	— 9421 8	r'.....	3,97419 736
tang a..	9,07857 59617	Δ	9,66014 18623 7	r.....	— 6 656
r = —	6 65637 1	a.....	8,24187 73676	r'.....	+ 94
p = 798 03002		p.....	7,90201 92299 7	R.....	3,97413 174
P = 3817 11729.		P.....	8,58173 55052 3		

$$\phi = 87^\circ, \omega = 87^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	7,86161 300
cos ω ...	8,63967 95616 1	séc a...	0,00158 47146	r.....	6,08802 238
	8,93251 36808 3	R.....	+ 8907 5	r'.....	3,94963 538
tang a..	8,93239 12129	Δ	9,65863 23702	r.....	+ 12 247
r = —	12 24679 3	a.....	8,24187 73676	r'.....	— 89
p = 795 26110		p.....	7,90050 97378	R.....	3,94975 696
P = 3830 40766.		P.....	8,58324 49974		

$$\phi = 88^\circ, \omega = 88^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	7,42056 002
cos ω ...	8,41791 90153 9	séc a...	0,00057 26469	r.....	5,99792 778
	8,71075 31346 1	R.....	— 2620 5	r'.....	3,41848 780
tang a..	8,71085 26586	Δ	9,65761 91497	r.....	— 9 952
r = —	9 95239 9	a.....	8,24187 73676	r'.....	+ 26
p = 793 40789		p.....	7,89949 65173	R.....	3,41838 854
P = 3839 35454.		P.....	8,58425 82179		

$$\phi = 89^\circ, \omega = 89^\circ \frac{1}{2}.$$

tang θ ..	0,29283 41192 2	b.....	9,65704 67648 5	sin ² a.....	6,46665 674
cos ω ...	7,94084 18596 8	séc a...	0,00006 36026	r.....	6,45332 491
	8,23367 59789	R.....	+ 832 3	r'.....	2,91998 165
tang a..	8,23339 19746	Δ	9,65711 04506 8	r.....	+ 28 400
r = —	28 40043	a.....	8,24187 73676	r'.....	— 8
p = 792 47910		p.....	7,89898 78182 8	R.....	2,92026 557
P = 3843 85429.		P.....	8,58476 69169 2		

205. Ici se termine le calcul des auxiliaires p et P ; car pour $\varphi = 90^\circ$, on aurait $\omega = 90^\circ \frac{1}{2}$, et les auxiliaires seraient les mêmes que pour $\omega = 89^\circ \frac{1}{2}$, ou pour $\varphi = 89^\circ$. De même pour $\varphi = 91^\circ$, les auxiliaires seront les mêmes que pour $\varphi = 88^\circ$; de sorte qu'à 90° , la différence δp ou δP est la même au signe près que pour 88° ; on a donc toutes les données nécessaires pour terminer les deux séries des fonctions E et F , et compléter le tableau ci-joint, qui contient le résultat de tous les calculs précédens. (Fin p. 299)

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. (c=563.285)

φ.	E.	ΔE.	p.	Δp.	Δ²p.	Δ³p.	Δ⁴p.
Deg.							
0	0.00000 0000	1745 2589	1745 27649	00000	42203	19	25
1	0.01745 2589	1744 8369	1745 27649	42203	42184	44	17
2	0.03490 0958	1743 9930	1744 85446	84387	42140	61	22
3	0.05234 0888	1742 7278 —	1744 01059	1 26527	42079	83	23
4	0.06976 8166	1741 0418	1742 74532	1 68606	41996	106	18
5	0.08717 8584	1738 9358	1741 05926	2 10602	41890	124	23
6	0.10456 7942	1736 4109	1738 95324	2 52492	41766	147	20
7	0.12193 2051	1733 4684	1736 42832	2 94258	41619	167	22
8	0.13926 6735	1730 1097	1733 48574	3 35877	41452	189	22
9	0.15656 7832	1726 3365	1730 12697	3 77329	41263	211	20
10	0.17383 1197	1722 1506 +	1726 35368	4 18592	41052	231	23
11	0.19105 2703	1717 5543	1722 16776	4 59644	40821	254	22
12	0.20822 8246	1712 5498	1717 57132	5 00465	40567	276	20
13	0.22535 3744	1707 1396	1712 56667	5 41032	40291	296	25
14	0.24242 5140	1701 3265 —	1707 15635	5 81323	39995	321	22
15	0.25943 8405	1695 1134	1701 34312	6 21318	39674	343	20
16	0.27638 9539	1688 5036	1695 12994	6 60992	39331	363	28
17	0.29327 4575	1681 5005 +	1688 52002	7 00323	38968	391	18
18	0.31008 9580	1674 1078	1681 51679	7 39291	38577	409	28
19	0.32683 0658	1666 3293	1674 12388	7 77868	38168	437	23
20	0.34349 3951	1658 1691	1666 34520	8 16036	37731	460	22
21	0.36007 5642	1649 6316 +	1658 18484	8 53767	37271	482	29
22	0.37657 1958	1640 7215 —	1649 64717	8 91038	36789	511	23
23	0.39297 9173	1631 4434	1640 73679	9 27827	36278	534	25
24	0.40929 3607	1621 8026	1631 45852	9 64105	35744	559	30
25	0.42551 1633	1611 8043	1621 81747	9 99849	35185	589	23
26	0.44162 9676	1601 4542	1611 81898	10 35034	34596	612	31
27	0.45764 4218	1590 7582	1601 46864	10 69630	33984	643	26
28	0.47355 1800	1579 7223	1590 77234	11 03614	33341	669	31
29	0.48934 9023	1568 3530	1579 73620	11 36955	32672	700	30
30	0.50503 2553	1556 6571 —	1568 36665	11 69627	31972	730	29
31	0.52059 9124	1544 6414	1556 67038	12 01599	31242	759	33
32	0.53604 5538	1532 3133	1544 65439	12 32841	30483	792	34
33	0.55136 8671	1519 6804	1532 32598	12 63324	29691	826	32
34	0.56656 5475	1506 7506	1519 69274	12 93015	28865	858	38
35	0.58163 2981	1493 5321	1506 76259	13 21880	28007	896	32
36	0.59656 8302	1480 0336	1493 54379	13 49887	27111	928	42
37	0.61136 8638	1466 2640	1480 04492	13 76998	26183	970	38
38	0.62603 1278	1452 2326	1466 27494	14 03181	25213	1008	40
39	0.64055 3604	1437 9491	1452 24313	14 28394	24205	1048	42
40	0.65493 3095	1423 4235 +	1437 95919	14 52599	23157	1090	48
41	0.66916 7330	1408 6665 —	1423 43320	14 75756	22067	1138	43
42	0.68325 3995	1393 6887	1408 67564	14 97823	20929	1181	49
43	0.69719 0882	1378 5017	1393 69741	15 18752	19748	1230	51
44	0.71097 5899	1363 1172	1378 50989	15 38500	18518	1281	54
45	0.72460 7071	1347 5475	1363 12489	15 57018	17237	1335	53
			1347 55471	15 74255	15902	1388	61

dd

ϕ .	F.	δF .	P.	δP .	$\delta^2 P$.	$\delta^3 P$.	$\delta^4 P$.
Deg.							
0.	0.00000 0000	1745 3996	1745 38201	00000	42217	39	43
1	0.01745 3996	1745 8218	1745 38201	42217	42256	82	39
2	0.03491 2214	1746 6665 +	1745 80418	84473	42338	121	42
3	0.05237 8879	1747 9347	1746 64891	1 26811	42459	163	40
4	0.06985 8226	1749 6275	1747 91702	1 69270	42622	203	42
5	0.08735 4501	1751 7465	1749 60972	2 11892	42825	245	42
6	0.10487 1966	1751 72864	1751 72864	2 54717	43070	287	40
7	0.12241 4904	1754 2938 —	1754 27581	2 97787	43357	327	45
8	0.13998 7621	1757 2717 +	1757 25368	3 41144	43684	372	42
9	0.15759 4454	1760 6833	1760 66512	3 84828	44056	414	44
10	0.17523 9772	1764 5318 —	1764 51340	4 28884	44470	458	44
11	0.19292 7980	1768 8208	1768 80224	4 73354	44928	502	43
12	0.21066 3525	1773 5545	1773 53578	5 18282	45430	545	50
13	0.22845 0900	1778 7375	1778 71860	5 63712	45975	595	41
14	0.24629 4649	1784 3749	1784 35572	6 09687	46570	636	52
15	0.26419 9369	1790 4720	1790 45259	6 56257	47206	688	44
16	0.28216 9717	1797 0348	1797 01516	7 03463	47894	732	52
17	0.30021 0414	1804 0697 +	1804 04979	7 51357	48626	784	47
18	0.31832 6250	1811 5836	1811 56336	7 99983	49410	831	52
19	0.33652 2088	1819 5838	1819 56319	8 49393	50241	883	51.
20	0.35480 2869	1828 0781 —	1828 05712	8 99634	51124	934	52
21	0.37317 3617	1837 0748	1837 05346	9 50758	52058	986	54
22	0.39163 9444	1846 5827	1846 56104	10 02816	53044	1040	54
23	0.41020 5557	1856 6113	1856 58920	10 55860	54084	1094	52
24	0.42887 7260	1867 1703	1867 14780	11 09944	55178	1146	59
25	0.44765 9962	1878 2702	1878 24724	11 65122	56324	1205	54
26	0.46655 9181	1889 9219	1889 89846	12 21446	57529	1259	57
27	0.48558 0550	1902 1369	1902 11292	12 78975	58788	1316	58
28	0.50472 9822	1914 9272	1914 90267	13 37763	60104	1374	54
29	0.52401 2875	1928 3053 +	1928 28030	13 97867	61478	1428	59
30	0.54343 5721	1942 2846	1942 25897	14 59345	62906	1487	56
31	0.56300 4507	1956 8786	1956 85242	15 22251	64393	1543	56
32	0.58272 5525	1972 1018	1972 07493	15 86644	65936	1599	55
33	0.60260 5213	1987 9688 +	1987 94137	16 52580	67535	1654	51
34	0.62265 0166	2004 4953	2004 46717	17 20115	69189	1705	52
35	0.64286 7138	2021 6972 —	2021 66832	17 89304	70894	1757	49
36	0.66326 3047	2039 5909	2039 56136	18 60198	72651	1806	42
37	0.68384 4983	2058 1936	2058 16334	19 32849	74457	1848	44
38	0.70462 0212	2077 5229 —	2077 49183	20 07306	76305	1892	29
39	0.72559 6179	2097 5967	2097 56489	20 83611	78197	1921	31
40	0.74678 0515	2118 4336	2118 40100	21 61808	80118	1952	20
41	0.76818 1040	2140 0525	2140 01908	22 41926	82070	1972	7
42	0.78980 5765	2162 4725	2162 43834	23 23996	84042	1979	+ 1
43	0.81166 2898	2185 7133	2185 67830	24 08038	86021	1980	— 17
44	0.83376 0843	2209 7945	2209 75868	24 94059	88001	1963	31
45	0.85610 8202	2234 7359	2234 69927	25 82060	89964	1932	49
		2260 5574 —	2260 51987	26 72024	91896	1883	76

φ .	E.	δE .	p .	δp .	$\delta^2 p$.	$\delta^3 p$.	$\delta^4 p$.
Deg.							
45	0.72460 7071	1347 5475	1347 55471	15 74255	15902	1388	61
46	0.73808 2546	1331 8055	1331 81216	15 90157	14514	1449	59
47	0.75140 0601	1315 9045 +	1315 91059	16 04671	13065	1508	65
48	0.76455 9646	1299 8584	1299 86388	16 17736	11557	1573	65
49	0.77755 8230	1283 6817	1283 68652	16 29293	9984	1638	72
50	0.79039 5047	1267 3894	1267 39359	16 39277	8346	1710	73
51	0.80306 8941	1250 9973 +	1251 00082	16 47623	6635	1783	76
52	0.81557 8914	1234 5218	1234 52459	16 54258	4852	1859	82
53	0.82792 4132	1217 9800	1217 98201	16 59110	2993	1941	84
54	0.84010 3932	1201 3897	1201 39091	16 62103	+1052	2025	87
55	0.85211 7829	1184 7694 +	1184 76988	16 63155	- 973	2112	92
56	0.86396 5523	1168 1387	1168 13833	16 62182	3085	2204	94
57	0.87564 6910	1151 5178	1151 51651	16 59097	5289	2298	99
58	0.88716 2088	1134 9277 +	1134 92554	16 53809	7587	2397	99
59	0.89851 1365	1118 3906	1118 38745	16 46222	9984	2496	105
60	0.90969 5271	1101 9294	1101 92523	16 36238	12480	2601	107
61	0.92071 4565	1085 5681 -	1085 56285	16 23758	15081	2708	106
62	0.93157 0246	1069 3315 +	1069 32527	16 08677	17789	2814	107
63	0.94226 3561	1053 2459	1053 23850	15 90888	20603	2921	109
64	0.95279 6020	1037 3382	1037 32962	15 70285	23524	3030	107
65	0.96316 9402	1021 6366	1021 62677	15 46761	26554	3137	100
66	0.97338 5768	1006 1702	1006 15916	15 20207	29691	3237	100
67	0.98344 7470	990 9695 -	990 95709	14 90516	32928	3337	90
68	0.99335 7165	976 0656 +	976 05193	14 57588	36265	3427	81
69	1.00311 7821	961 4912 -	961 47605	14 21323	39692	3508	71
70	1.01273 2733	947 2793 +	947 26282	13 81631	43200	3579	54
71	1.02220 5526	933 4645	933 44651	13 38431	46779	3633	35
72	1.03154 0171	920 0817	920 06220	12 91652	50412	3668	+ 19
73	1.04074 0988	907 1667	907 14568	12 41240	54080	3687	- 12
74	1.04981 2655	894 7558	894 73328	11 87160	57767	3675	38
75	1.05876 0213	882 8858 -	882 86168	11 29393	61442	3637	66
76	1.06758 9071	871 5933 +	871 56775	10 67951	65079	3571	106
77	1.07630 5004	860 9154 -	860 88824	10 02872	68650	3465	136
78	1.08491 4158	850 8881	850 85952	9 34222	72115	3329	183
79	1.09342 3039	841 5473 +	841 51730	8 62107	75444	3146	216
80	1.10183 8512	832 9277	832 89623	7 86663	78590	2930	256
81	1.11016 7789	825 0624 -	825 02960	7 08073	81520	2674	301
82	1.11841 8413	817 9828 +	817 94887	6 26553	84194	2373	329
83	1.12659 8241	811 7184	811 68334	5 42359	86567	2044	366
84	1.13471 5425	806 2958	806 25975	4 55792	88611	1678	396
85	1.14277 8383	801 7388	801 70183	3 67181	90289	1282	411
86	1.15079 5771	798 0677 -	798 03002	2 76892	91571	871	434
87	1.15877 6448	795 2993	795 26110	1 85321	92442	437	437
88	1.16672 9441	793 4464	793 40789	- 92879	92879	0	
89	1.17466 3905	792 5178	792 47910	0	92879		
90	1.18258 9083		792 47910	+ 92879			

ϕ .	F. (S ⁶³)	ΔF .	P.	ΔP .	$\Delta^2 P$.	$\Delta^3 P$.	$\Delta^4 P$.
Deg.							
45	0.85610 8202	2260 5574 —	2260 51987	26 72024	91896	1883	76
46	0.87871 3776	2287 2784	2287 24011	27 93920	93779	1807	91
47	0.90158 6560	2314 9184	2314 87931	28 57699	95586	1716	130
48	0.92473 5744	2343 4961	2343 45630	29 53285	97302	1586	160
49	0.94817 0705	2373 0297	2372 98915	30 50587	98888	1426	197
50	0.97190 1002	2403 5362	2403 49502	31 49475	1 00314	1229	244
51	0.99593 6364	2435 0316	2434 98977	32 49789	1 01543	985	287
52	1.02028 6680	2467 5300	2467 48766	33 51332	1 02528	698	352
53	1.04496 1980	2501 0437	2501 00098	34 53860	1 03226	+ 346	409
54	1.06997 2417	2535 5826	2535 53958	35 57086	1 03572	— 63	481
55	1.09532 8243	2571 1536	2571 11044	36 60658	1 03509	544	560
56	1.12103 9779	2607 7602	2607 71702	37 64167	1 02965	1104	648
57	1.14711 7381	2645 4016	2645 35869	38 67132	1 01861	1752	739
58	1.17357 1397	2684 0725	2684 03001	39 68993	1 00109	2491	850
59	1.20041 2122	2723 7617	2723 71994	40 69102	97618	3341	955
60	1.22764 9739	2764 4517 —	2764 41096	41 66720	94277	4296	1078
61	1.25529 4256	2806 1175	2806 07816	42 60997	89981	5374	1205
62	1.28335 5431	2848 7256 +	2848 68813	43 50978	84607	6579	1333
63	1.31184 2687	2892 2332	2892 19791	44 35585	78028	7912	1467
64	1.34076 5019	2936 5863	2936 55376	45 13613	70116	9379	1601
65	1.37013 0882	2981 7191 +	2981 68989	45 83729	60737	10980	1726
66	1.39994 8073	3027 5525	3027 52718	46 44466	49757	12706	1845
67	1.43022 3598	3073 9926	3073 97184	46 94223	37051	14551	1942
68	1.46096 3524	3120 9296	3120 91407	47 31274	22500	16493	2025
69	1.49217 2820	3168 2362 +	3168 22681	47 53774	+ 6007	18518	2062
70	1.52385 5182	3215 7671	3215 76455	47 59781	— 12511	20580	2073
71	1.55601 2853	3263 3572	3263 36236	47 47270	33091	22653	2021
72	1.58864 6425	3310 8213	3310 88506	47 14179	55744	24674	1910
73	1.62175 4638	3357 9537	3357 97685	46 58435	80418	26584	1737
74	1.65533 4175	3404 5277 —	3404 56120	45 78017	1 07002	28321	1478
75	1.68937 9452	3450 2968	3450 34137	44 71015	1 35323	29799	1135
76	1.72388 2420	3494 9952	3495 05152	43 35692	1 65122	30934	715
77	1.75883 2372	3538 3397	3538 40844	41 70570	1 96056	31649	+ 202
78	1.79421 5769	3580 0325	3580 11414	39 74514	2 27705	31851	— 377
79	1.83001 6094	3619 7644	3619 85928	37 46809	2 59556	31474	1026
80	1.86621 3738	3657 2192	3657 32737	34 87253	2 91030	30448	1711
81	1.90278 5930	3692 0786	3692 19996	31 96223	3 21478	28737	2417
82	1.93970 6716	3724 0281	3724 16213	28 74745	3 50215	26320	3106
83	1.97694 6997	3752 7636	3752 90958	25 24530	3 76535	23214	3754
84	2.01447 4633	3777 9979	3778 15488	21 47995	3 99749	19460	4320
85	2.05225 4612	3799 4682 —	3799 63483	17 48246	4 19209	15140	4776
86	2.09024 9294	3816 9425	3817 11729	13 29037	4 34349	10364	5102
87	2.12841 8719	3830 2265	3830 40766	8 94688	4 44713	5262	5262
88	2.16672 0984	3839 1691	3839 35454	+ 4 49975	4 49975	0	0
89	2.20511 2675	3843 6666 +	3843 85429	— 4 49975	4 49975		
90	2.24354 9341						

On voit par le dernier résultat que la fonction complète F' n'est en erreur que d'une unité du dernier chiffre, et cette erreur se corrigera immédiatement en prenant 3843 6667 pour le δF qui répond à 89° , changement indiqué par la valeur 3843 6666+.

A l'égard de la fonction complète E' , on voit que le dernier chiffre est trop petit de deux unités; on a déjà vu qu'à 45° , le dernier chiffre de la fonction est trop grand d'une unité. Ces deux légères erreurs se corrigeront fort simplement en retranchant du dernier chiffre des fonctions E une unité de 31° à 51° , les laissant comme elles sont de 52° à 58° ; ajoutant une unité de 59° à 62° et deux de 63° à 90° .

Les fonctions E et F étant ainsi corrigées, on y joindra leurs différences successives jusqu'au quatrième ordre, et on aura la table particulière pour le module $\sin 63^\circ$, telle qu'on la trouve parmi celles qui composent la table IX.

206. Il est bon de prévenir ceux qui voudraient exécuter de semblables calculs pour d'autres modules, que lorsque quelqu'erreur se glisse dans le calcul des auxiliaires P , on la reconnaît facilement par les irrégularités que présente alors la colonne des différences quatrièmes $\delta^4 P$; ou même l'une des colonnes précédentes, si l'erreur est considérable.

En effet, si au lieu de la véritable valeur $P=m$, on a trouvé $P=m+e$, l'erreur $+e$ affecte la différence $\delta^4 P$, et les différences précédentes du même ordre ou de la même colonne, de manière qu'en remontant de $\delta^4 P$ à $\delta^4 P^{\circ\circ\circ}$, les nombres de la colonne qui devraient être $\delta^4 m$, $\delta^4 m^\circ$, $\delta^4 m^{\circ\circ}$, $\delta^4 m^{\circ\circ\circ}$, $\delta^4 m^{\circ\circ\circ\circ}$, sont respectivement $\delta^4 m+e$, $\delta^4 m^\circ-4e$, $\delta^4 m^{\circ\circ}+6e$, $\delta^4 m^{\circ\circ\circ}-4e$, $\delta^4 m^{\circ\circ\circ\circ}+e$ (*). Lorsqu'on rencontrera donc des inégalités semblables qui supposent $e=1$, ou $e>1$, il sera facile de voir quelle doit être la valeur de e pour rétablir la marche ordinaire des différences, et à compter de quel terme il faut appliquer, en remontant dans la colonne, les corrections $-e$, $+4e$, $-6e$, $+4e$, $-e$; ce terme

(*) Dans la colonne des différences cinquièmes, les erreurs successives dues à la même cause, seraient en remontant $-e$, $+5e$, $-10e$, $+10e$, $-5e$, $+e$, et ainsi dans les autres colonnes, suivant les coefficients des puissances du binôme.

sera celui où la valeur de P est fautive, et auquel il faut appliquer la correction $-e$. Cette pratique, avec laquelle on se familiarisera aisément, est utile ou même indispensable, pour construire avec succès une table quelconque de quantités dont les différences successives décroissent d'un ordre à un autre, jusqu'à ce qu'elles puissent être négligées.

207. Après avoir construit la table IX, qui sera composée de 75 tables particulières pour tous les angles du module de 1° à 75° . (ou de 61 seulement, si on ne la commence qu'à l'angle de 15°), on aura déjà les moyens de réduire aux règles ordinaires d'interpolation, la détermination de toute fonction E ou F dont le module ne surpasse pas $\sin 75^\circ$. Mais l'interpolation d'une pareille suite de tables dans lesquelles l'amplitude et l'angle du module croissent progressivement d'un degré, exigera d'assez longs calculs, si l'on veut avoir égard à toutes les différences influentes, ou ne donnera qu'un petit nombre de décimales exactes, si l'on ne tient compte que des différences premières et secondes. Pour avoir des tables usuelles plus commodes, il faudra faire croître l'amplitude et l'angle du module par des intervalles notablement plus petits qu'un degré; cependant si ces intervalles devenaient trop petits, le volume de la table générale augmenterait d'une manière incommode, et l'exécution en deviendrait extrêmement laborieuse.

Nous pensons que pour tenir un juste milieu, il conviendra de fixer à un quart de degré l'intervalle constant par lequel on fera croître l'amplitude et l'angle du module. Chaque table particulière étant calculée pour les degrés successifs de l'amplitude, il faudra insérer trois moyens entre deux termes consécutifs, afin de réduire les intervalles à un quart de degré, et nous donnerons ci-après les formules nécessaires pour cette interpolation. On aura donc ainsi 75 tables calculées pour les quarts de degré de l'amplitude, et pour tous les degrés de l'angle du module, depuis 1° jusqu'à 75° .

208. Il resterait à interpoler semblablement les résultats donnés par ces tables pour un même degré d'amplitude, de manière à insérer trois moyens entre deux termes consécutifs. Cette opération se ferait par les mêmes formules que dans le premier cas; mais les résultats n'en pourraient pas être aussi exacts, parce que

l'erreur d'une ou de deux unités sur le neuvième chiffre, qu'on ne peut guère éviter dans le calcul de chaque fonction E ou F, se rencontrera souvent en sens opposé, dans deux fonctions consécutives correspondantes à différens modules, ce qui nuira à l'exactitude des calculs d'interpolation. Il nous semble donc préférable, quoique plus long, de calculer directement chaque table particulière pour tous les angles du module, de quart en quart de degré. On aura ainsi 300 tables indépendantes entr'elles, et pourvues chacune d'un semblable degré d'exactitude; ces tables calculées pour tous les degrés d'amplitude, devront être ensuite interpolées pour tous les quarts de degré.

Le système des 300 tables particulières dont nous parlons, pourra être réuni dans un volume in-4° de grosseur médiocre, si toutefois on se contente des simples fonctions, sans y ajouter leurs différences. En supposant que chaque page soit composée de huit colonnes, de soixante termes chacune, un degré occupera 6 pages, et les 75 degrés en occuperont 450; mais alors il y aurait 83 chiffres sur chaque ligne horizontale, ce qui est peut-être trop considérable. La disposition sera moins commode avec six colonnes par page, et le nombre des pages serait porté à 600, mais l'exécution typographique en serait plus facile.

Pour qu'on ait une idée plus précise de la grande table dont nous venons d'indiquer la construction, nous joignons ici une page entière de cette même table, calculée avec toute l'exactitude qu'on peut désirer, dans l'hypothèse que le nombre des pages est de 450; pour les angles du module 54° , $54^\circ \frac{1}{4}$, $54^\circ \frac{1}{2}$, $54^\circ \frac{3}{4}$. On a fait directement les calculs pour tous les degrés d'amplitude de 45° à 60° ; ensuite les résultats ont été interpolés pour chaque quart de degré par les formules que nous allons rapporter.

209. Soit A une fonction de la variable a , et δA , $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, etc., les différences successives de cette fonction, lorsque la variable a augmente continuellement d'une unité. Soit $A + y$ ce que devient la fonction A, lorsque a se change en $a + x$, on aura

$$y = x(\delta A + \frac{x-1}{2} (\delta^2 A + \frac{x-2}{3} (\delta^3 A + \text{etc.},$$

chaque parenthèse enveloppant tout ce qui suit.

Soient maintenant y' , y'' , y''' , les valeurs que prend y lorsqu'on fait successivement $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{4}$, et soit pour abréger

$$\frac{\delta A}{4} = \alpha_1, \quad \frac{\delta^2 A}{4^2} = \alpha_2, \quad \frac{\delta^3 A}{4^3} = \alpha_3, \quad \frac{\delta^4 A}{4^4} = \alpha_4, \text{ etc.,}$$

on aura en se bornant aux α_4 ,

$$\begin{aligned} y' &= \alpha_1 - \frac{3}{2} \alpha_2 + \frac{3.7}{2.3} \alpha_3 - \frac{3.7.11}{2.3.4} \alpha_4, \\ y'' &= 2\alpha_1 - \frac{2.2}{2} \alpha_2 + \frac{2.2.6}{2.3} \alpha_3 - \frac{2.2.6.10}{2.3.4} \alpha_4, \\ y''' &= 3\alpha_1 - \frac{3.1}{2} \alpha_2 + \frac{3.1.5}{2.3} \alpha_3 - \frac{3.1.5.9}{2.3.4} \alpha_4; \end{aligned}$$

mais en appelant dA , d^2A , d^3A , d^4A , les nouvelles différences de la fonction A , dans la suite A , $A+y'$, $A+y''$, $A+y'''$, $A+\delta A$, qui répond aux variables a , $a+\frac{1}{4}$, $a+\frac{1}{2}$, $a+\frac{3}{4}$, $a+1$, on aura $dA=y'$, $d^2A=y''-2y'$, $d^3A=y'''-3y''+3y'$, $d^4A=\delta A-4y''' + 6y''-4y'$; donc les différences dA , d^2A , etc., peuvent être déterminées directement par les formules

$$\begin{aligned} dA &= \alpha_1 - \frac{3}{2} \alpha_2 + \frac{7}{2} \alpha_3 - \frac{77}{8} \alpha_4, \\ d^2A &= \alpha_2 - 5\alpha_3 + \frac{37}{4} \alpha_4, \\ d^3A &= \alpha_3 - \frac{9}{2} \alpha_4, \\ d^4A &= \alpha_4, \end{aligned}$$

et pour la facilité du calcul, on pourra prendre l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} d^4A &= \alpha_4, \\ d^3A &= \alpha_3 - \frac{9}{2} \alpha_4, \\ d^2A &= \alpha_2 - \alpha_3 + \frac{1}{4} \alpha_4 - 2d^3A, \\ dA &= \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 5\alpha_4 - \frac{1}{2} d^2A. \end{aligned}$$

Connaissant ainsi les quantités A , dA , d^2A , d^3A , d^4A , on formera de la manière accoutumée les quatre termes de la colonne des fonctions, depuis A jusqu'à $A+\delta A$, et ce dernier terme déjà connu, donnera une première vérification de l'opération; ensuite la liaison des nouvelles différences avec celles des précédents résultats, sera une seconde preuve de l'exactitude des calculs.

φ.	E(φ, 54°).	E(φ, 54° 15').	E(φ, 54° 30').	E(φ, 54° 45').	F(φ, 54°).	F(φ, 54° 15').	F(φ, 54° 30').	F(φ, 54° 45').
45°	0.73597 2855	0.73563 9907	0.73530 7638	0.73497 6075	0.84110 3441	0.84152 9089	0.84195 4671	0.84238 0147
45 15'	0.73954 7899	0.73920 9460	0.73887 1599	0.73853 4506	0.84642 8857	0.84686 2779	0.84729 6648	0.84773 0425
45 30'	0.74311 5331	0.74277 1233	0.74242 8727	0.74208 5145	0.85176 5636	0.85220 7956	0.85265 0240	0.85309 2445
45 45'	0.74667 5136	0.74632 5371	0.74597 6308	0.74562 7975	0.85711 3850	0.85756 4696	0.85801 5521	0.85846 6245
46	0.75022 7298	0.74987 1807	0.74951 7024	0.74916 2980	0.86247 3570	0.86293 3071	0.86339 2567	0.86385 2017
46 15'	0.75377 1803	0.75341 0525	0.75304 9902	0.75269 0145	0.86784 4869	0.86831 3154	0.86878 1453	0.86924 9722
46 30'	0.75730 8638	0.75694 1511	0.75657 5106	0.75620 9456	0.87322 7817	0.87370 5010	0.87418 2252	0.87465 9474
46 45'	0.76083 7788	0.76046 4751	0.76009 2443	0.75972 0898	0.87862 2485	0.87910 8737	0.87959 5039	0.88008 1348
47	0.76435 9242	0.76398 0232	0.76360 1909	0.76322 4457	0.88402 8944	0.88452 4381	0.88501 9888	0.88551 5421
47 15'	0.76787 2986	0.76748 7942	0.76710 3641	0.76672 0120	0.88944 7266	0.88995 2025	0.89045 6874	0.89096 1769
47 30'	0.77137 9009	0.77098 7867	0.77059 7477	0.77020 7874	0.89487 7521	0.89539 1740	0.89590 6069	0.89642 0466
47 45'	0.77487 7298	0.77447 9997	0.77408 3455	0.77368 7708	0.90031 9780	0.90084 3597	0.90136 7548	0.90189 1580
48	0.77836 7844	0.77796 4321	0.77756 1564	0.77715 9609	0.90577 4112	0.90630 7669	0.90684 1384	0.90737 5212
48 15'	0.78185 0635	0.78144 0827	0.78103 1792	0.78062 3566	0.91124 0589	0.91178 4028	0.91232 6651	0.91287 1411
48 30'	0.78532 5662	0.78490 9507	0.78449 4129	0.78407 9669	0.91671 9279	0.91727 2745	0.91782 6422	0.91838 0260
48 45'	0.78879 2916	0.78837 0346	0.78794 8569	0.78752 7608	0.92221 0251	0.92277 3892	0.92333 7768	0.92390 1833
49	0.79225 2388	0.79182 3343	0.79139 5092	0.79096 7672	0.92771 3576	0.92828 7538	0.92886 1764	0.92943 6206
49 15'	0.79570 4069	0.79526 8484	0.79483 3699	0.79439 9753	0.93322 9323	0.93381 3750	0.93439 8482	0.93498 3452
49 30'	0.79914 7952	0.79870 5762	0.79826 3809	0.79782 3842	0.93875 7559	0.93935 2614	0.93994 7992	0.94054 3645
49 45'	0.80258 4930	0.80213 5171	0.80168 7125	0.80123 9932	0.94429 8352	0.94490 4183	0.94551 0308	0.94611 6858
50	0.80601 2295	0.80555 6702	0.80510 1929	0.80464 8015	0.94985 1772	0.95046 8533	0.95108 5680	0.95170 3165
50 15'	0.80943 2742	0.80897 0350	0.80850 8784	0.80804 8084	0.95541 7886	0.95604 5733	0.95667 4001	0.95730 2639
50 30'	0.81284 5365	0.81237 6109	0.81190 6885	0.81144 0133	0.96099 6761	0.96163 5852	0.96227 5399	0.96291 5352
50 45'	0.81625 0160	0.81577 3973	0.81529 8662	0.81482 4157	0.96658 8462	0.96723 8958	0.96788 9946	0.96854 1375
51	0.81964 7121	0.81916 5939	0.81868 1602	0.81820 0150	0.97219 3058	0.97285 5120	0.97351 7712	0.97418 0782
51 15'	0.82303 6245	0.82254 6002	0.82205 6609	0.82156 8107	0.97781 0615	0.97848 4406	0.97915 8767	0.97983 3644
51 30'	0.82641 7529	0.82592 0158	0.82543 3643	0.82492 8026	0.98344 1196	0.98412 6883	0.98481 3179	0.98550 0032
51 45'	0.82979 0971	0.82928 6405	0.82878 2701	0.82827 9902	0.98908 4869	0.98978 2617	0.99048 1017	0.99118 0015
52	0.83315 6567	0.83264 4740	0.83213 3781	0.83162 3732	0.99474 1666	0.99545 1675	0.99616 2349	0.99687 3664
52 15'	0.83651 4317	0.83599 5162	0.83547 6880	0.83495 9515	1.00041 1746	1.00113 4124	1.00185 7245	1.00258 1050
52 30'	0.83986 4219	0.83933 7669	0.83881 1997	0.83828 7248	1.00609 5076	1.00683 0028	1.00756 5769	1.00830 2241
52 45'	0.84320 6273	0.84267 2260	0.84213 9132	0.84160 6032	1.01179 1750	1.01253 9451	1.01328 7899	1.01403 7305
53	0.84654 0479	0.84599 8937	0.84545 8284	0.84491 8565	1.01750 1833	1.01826 2459	1.01902 3971	1.01978 6311
53 15'	0.84986 6838	0.84931 7699	0.84876 9454	0.84822 2148	1.02322 5388	1.02399 9116	1.02477 3782	1.02554 9328
53 30'	0.85318 5352	0.85262 8948	0.85207 2642	0.85151 7681	1.02896 2473	1.02974 9483	1.03053 7485	1.03131 6420
53 45'	0.85649 6023	0.85593 1485	0.85536 7851	0.85480 5166	1.03471 3150	1.03551 3624	1.03631 5145	1.03711 7654
54	0.85979 8853	0.85922 0514	0.85865 5083	0.85808 4606	1.04047 7478	1.04129 1600	1.04210 6826	1.04292 3096
54 15'	0.86309 3846	0.86251 3637	0.86193 4340	0.86135 6002	1.04625 5518	1.04708 3473	1.04791 2592	1.04874 2813
54 30'	0.86638 1005	0.86579 2858	0.86520 5627	0.86461 9359	1.05204 7327	1.05288 9303	1.05373 2503	1.05458 6866
54 45'	0.86966 0335	0.86906 4181	0.86846 8047	0.86787 4680	1.05785 2962	1.05870 9149	1.05956 6622	1.06042 5320
55	0.87293 1842	0.87232 7612	0.87172 4305	0.87112 1970	1.06367 2482	1.06454 3070	1.06541 5010	1.06628 8239
55 15'	0.87619 5530	0.87558 3155	0.87497 1707	0.87436 1234	1.06950 5943	1.07039 1126	1.07127 7728	1.07216 5685
55 30'	0.87945 1407	0.87883 0818	0.87821 1159	0.87759 2479	1.07535 3390	1.07625 3372	1.07715 4833	1.07805 7718
55 45'	0.88269 9480	0.88207 0697	0.88144 2667	0.88081 5710	1.08121 4903	1.08212 9804	1.08304 6384	1.08396 4398
56	0.88593 9756	0.88530 2510	0.88466 6240	0.88403 0536	1.08709 0514	1.08802 0660	1.08895 2439	1.08988 5786
56 15'	0.88917 2244	0.88852 6595	0.88788 1885	0.88723 8164	1.09298 0281	1.09392 5814	1.09487 3056	1.09582 1941
56 30'	0.89239 6952	0.89174 2811	0.89108 9610	0.89043 7402	1.09888 4256	1.09984 5379	1.10080 8289	1.10177 2920
56 45'	0.89561 3891	0.89495 1188	0.89428 9426	0.89362 8651	1.10480 2490	1.10577 9408	1.10675 8193	1.10773 8779
57	0.89882 3071	0.89815 1735	0.89748 1343	0.89681 1949	1.11073 5032	1.11172 7952	1.11272 2822	1.11371 9575
57 15'	0.90202 4503	0.90134 4464	0.90066 5371	0.89998 7278	1.11668 1933	1.11769 1064	1.11870 2230	1.11971 5364
57 30'	0.90521 8198	0.90452 9386	0.90384 1521	0.90315 4658	1.12264 3240	1.12366 8792	1.12469 6467	1.12572 6197
57 45'	0.90840 4169	0.90770 6514	0.90700 9807	0.90631 4103	1.12861 8999	1.12966 1185	1.13070 5584	1.13175 2128
58	0.91158 2430	0.91087 5860	0.91017 0240	0.90946 5625	1.13460 9256	1.13566 8290	1.13672 9631	1.13779 3209
58 15'	0.91475 2993	0.91403 7438	0.91332 2834	0.91260 9237	1.14061 4557	1.14169 0155	1.14276 8658	1.14384 9491
58 30'	0.91791 5874	0.91719 1263	0.91646 7604	0.91574 4953	1.14663 3443	1.14772 6825	1.14882 2799	1.14992 1023
58 45'	0.92107 1087	0.92033 7350	0.91960 4565	0.91887 2788	1.15266 7457	1.15377 8342	1.15489 1831	1.15600 7550
59	0.92421 8648	0.92347 5714	0.92273 3732	0.92199 2758	1.15871 6139	1.15984 4750	1.16097 6070	1.16211 0025
59 15'	0.92735 8574	0.92660 6372	0.92585 5121	0.92510 4879	1.16477 9530	1.16592 6092	1.16707 5470	1.16822 7590
59 30'	0.93049 0882	0.92972 8740	0.92896 8750	0.92820 9168	1.17085 7668	1.17202 2406	1.17319 0022	1.17436 0580
59 45'	0.93361 5590	0.93281 4638	0.93207 4637	0.93130 5643	1.17695 0588	1.17813 3731	1.17931 0915	1.18050 9063
60	0.93673 2717	0.93593 2283	0.93517 2800	0.93439 4322	1.18305 8327	1.18426 0106	1.18546 5041	1.18667 3056

A 0 - 41 6156 - 83 1533

ee

B 346 7254 304 4685

C 245 9472

D 692 6726

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL.

294

210. Pour montrer maintenant l'usage de la table à double entrée dont nous donnons ici une portion, supposons qu'on veuille déterminer la fonction E qui répond aux deux élémens $\varphi = 48^\circ 40'$, $\theta = 54^\circ 12'$; il faudra prendre pour terme de comparaison dans la table préc., le nombre $A = 0,78532\ 5662$ qui répond aux valeurs $\varphi = 48^\circ 30'$, $\theta = 54^\circ$. Pour une différence $\delta\varphi = 15'$ que nous prendrons pour unité, la différence δA ou.. $\frac{\delta A}{\delta\varphi} = 346\ 7254$,

ainsi pour $10'$, elle est à proportion..... $+ 231\ 1503$.

De même pour la différence $\delta\theta = 15'$, dans l'angle du module, la différence δA

ou $\frac{\delta A}{\delta\theta} = -416156$; donc pour $12'$ elle est $- 33\ 2925$

ces deux corrections réunies, en font une de..... $+ 197\ 8578$

laquelle ajoutée au nombre..... $A = 0,78532\ 5662$

donne pour la fonction cherchée..... $E = 0,78730\ 4240$.

Dans ce calcul nous n'avons eu égard qu'aux différences du premier ordre, ainsi le résultat ne peut être exact que dans les cinq premières figures.

211. Pour obtenir un plus grand degré d'approximation, supposons que A est la valeur de la fonction $\psi(\varphi, \theta)$, lorsque $\varphi = \alpha$, et $\theta = \epsilon$, on aura, en se bornant aux termes du second ordre, la formule

$$\psi' = \psi(\alpha+x, \epsilon+y) = A + x \cdot \frac{\delta A}{\delta\varphi} + \frac{x \cdot x - 1}{2} \cdot \frac{\delta^2 A}{\delta\varphi^2} + y \cdot \frac{\delta A}{\delta\theta} + (xy \cdot \frac{\delta^2 A}{\delta\varphi\delta\theta} + \frac{y \cdot y - 1}{2} \cdot \frac{\delta^2 A}{\delta\theta^2})$$

où il faut supposer que les différences $\delta\varphi$, $\delta\theta$, sont égales à l'intervalle de $15'$ pris pour unité; alors on voit que $\frac{\delta A}{\delta\varphi}$, $\frac{\delta^2 A}{\delta\varphi^2}$, représentent les différences première et seconde de A, en faisant varier l'amplitude φ de $15'$, qu'il en est de même de $\frac{\delta A}{\delta\theta}$, $\frac{\delta^2 A}{\delta\theta^2}$, par rapport

$$\psi' = A(1 - \frac{x+y}{2} + \frac{(x+y)^2}{2}) + A'y(2-x-y) + A''y^2 + B'x(2-x-y) + B''xy + Cx^2$$

$$\psi' = A \cdot (1 + \frac{x+y}{2} \cdot (x+y-3)) + (A'y + B'x)(2-x-y) + A''y^2 + B''xy + Cx^2$$

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 295

à la variable θ , et qu'enfin la différence seconde $\frac{\partial^2 A}{\partial \phi \partial \theta}$, est prise en faisant varier successivement θ et ϕ .

De là on voit que pour trouver la fonction $\downarrow(\alpha+x, \epsilon+y)$, qui répond aux variables $\phi = \alpha+x$, $\theta = \epsilon+y$, il faut supposer que θ étant constant, on prend la variation de \downarrow par rapport à ϕ , savoir :

$$\downarrow(\alpha+x) - \downarrow\alpha = x \cdot \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{x \cdot x - 1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} = p,$$

ensuite que ϕ étant constant, on prend la variation de \downarrow par rapport à θ , savoir :

$$\downarrow(\epsilon+y) - \downarrow\epsilon = y \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} + y \cdot \frac{y-1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = q,$$

qu'enfin à ces deux variations réunies $p+q$, on ajoute le terme $xy \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \phi \partial \theta} = r$, et l'on aura la fonction cherchée

$$\downarrow(\alpha+x, \epsilon+y) = A + p + q + r;$$

quant à la différence $\frac{\partial^2 A}{\partial \phi \partial \theta}$, elle se trouve par le moyen des quatre termes consécutifs de la table qui, à partir de A et dans le sens de l'accroissement des variables, forment un quarré, savoir : $\begin{matrix} A & A' \\ B & B' \end{matrix}$ où l'on a

$$A' = A + \frac{\partial A}{\partial \phi}, \quad B = A + \frac{\partial A}{\partial \theta},$$

car on aura de même

$$B' = A' + \frac{\partial A'}{\partial \theta} = A' + \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 A}{\partial \phi \partial \theta};$$

donc

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \phi \partial \theta} = (B' - A') - (B - A).$$

212. Dans l'exemple proposé on a

$$\begin{array}{ll} A = 78532 \ 5662 & A' = 78490 \ 9506 \\ B = 78879 \ 2916 & B' = 78837 \ 0347 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (B) - A = 346 \ 7254 & B' - A' = 346 \ 0841 \\ B' - A' = 346 \ 0841 & \end{array}$$

$$- 6413.$$

$$\begin{array}{r} 41 \ 156 \\ 42 \ 2569 \\ \hline 6413 \end{array}$$

$$B' - A = (B') - A = 78837 \ 0347 - 78532 \ 5662 = 304 \ 4685$$

donc $\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \varphi} = -6413$. Dans ce même cas, il s'agit de trouver la valeur de la fonction $\psi(\alpha+x, \epsilon+y)$, lorsque $x = \frac{10'}{15'} = \frac{2}{3}$, et $y = \frac{12'}{15'} = \frac{4}{5}$. Or, dans la colonne verticale où φ varie seule, on a

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 3467254, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} = -7782,$$

ce qui donne

$$p = x \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{x-1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \right) = 231 \ 2367.3.$$

Dans la ligne horizontale où θ varie seule, on a

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = -41 \ 6156, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 779;$$

donc

$$q = y \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{y-1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \right) = -33 \ 2987.2;$$

enfin le terme $r = xy \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \theta} = \frac{8}{15} (-6413) = -3420.3$; de là résulte la correction totale..... $p + q + r =$ 197 5960

$$A = 0,78532 \ 5662$$

donc la fonction cherchée.....

$$E = 0,78730 \ 1622$$

la première valeur trouvée était 0,78730 4240, ainsi les cinq premières décimales seules étaient exactes. p 294

213. Le dernier calcul laisse encore les deux dernières décimales douteuses; car, pour les déterminer avec certitude, il faudrait avoir égard aux différences du troisième ordre contenues dans la formule générale

$$\begin{aligned} \psi(\alpha+x, \epsilon+y) = & A + x \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{x \cdot x-1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{x \cdot x-1 \cdot x-2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^3} \\ & + y \frac{\partial A}{\partial \theta} + xy \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \theta} + y \cdot \frac{x \cdot x-1}{2} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta} \\ & + \frac{y \cdot y-1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + x \cdot \frac{y \cdot y-1}{2} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi \partial \theta^2} \\ & + \frac{y \cdot y-1 \cdot y-2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \theta^3}. \end{aligned}$$

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 297

Soit p l'accroissement de A dû à la variable φ , q l'accroissement dû à la variable θ ; enfin soit r la quantité $xy \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{x-1}{2} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta} + \frac{y-1}{2} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi \partial \theta^2} \right)$, on aura $p+q+r$ pour l'accroissement total de la fonction A , ce qui donnera

$$\psi(a+x, b+y) = A + p + q + r.$$

Les quantités p et q se trouvent par les règles ordinaires relatives à une seule variable; ainsi tout se réduit à trouver la valeur de r .

Or la partie principale $xy \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \theta}$ est déjà connue; pour avoir les deux autres termes contenant les différences $\frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta}$, $\frac{\partial^3 A}{\partial \varphi \partial \theta^2}$, je forme, à compter de A , le quarré de trois termes

$$\begin{array}{ccc} A, & A', & A'', \\ B, & B', & B'', \\ C, & C', & C'', \end{array}$$

$$\text{où l'on a } A'' - 2A' + A = \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad B'' - 2B' + B = \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(A + \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) \\ = \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 A}{\partial \theta^2 \partial \varphi}; \text{ donc}$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial \theta^2 \partial \varphi} = \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2};$$

on aura pareillement

$$\frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta} = \frac{\partial^2 A'}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}.$$

Appliquant les nombres donnés par la table, on trouve

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 779 & \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} = -7782, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} = 788 & \frac{\partial^2 A'}{\partial \varphi^2} = -7845, \\ \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi \partial \theta^2} = 9 & \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta} = -63; \end{array}$$

et de là résulte

$$r = xy \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \theta} + xy \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta} + xy \cdot \frac{y-1}{2} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi \partial \theta^2} = -3415.1;$$

d'ailleurs par les différences relatives à ϕ , savoir :

$$\frac{\partial A}{\partial \phi} = 346\ 7254, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} = -7782, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \phi^3} = -9,$$

on trouve

$$p = x \left(\frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{x-1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{x-2}{3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \phi^3} \right) \right) = 231\ 2366\ 9;$$

de même par les différences relatives à θ , savoir :

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = -416156, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 779, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \theta^3} = 38,$$

on trouve

$$q = y \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{y-1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{y-2}{3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \theta^3} \right) \right) = -33\ 2985\ 9;$$

de là résulte

$$p + q + r = \begin{array}{r} 197\ 5966 \\ A = 0,78532\ 5662 \end{array}$$

et enfin la fonction cherchée..... $E = 0,78730\ 1628$

par la précédente détermination..... $E = 0,78730\ 1622$

la différence n'est que de six unités décimales du neuvième ordre. Ainsi on voit qu'il suffira presque toujours de s'en tenir aux termes du second ordre, dont le calcul est d'ailleurs très-facile.

214. Supposons pour second exemple qu'on a $c = \sin 54^\circ 4' 12''$, et $\tan \phi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, ou $\phi = 52^\circ 32' 48'' 95776$. Il s'agit de trouver la valeur correspondante de la fonction F.

Pour cela, il faut prendre dans la table le terme qui répond aux valeurs $\phi = 52^\circ \frac{1}{2}$, $\theta = 54^\circ$, savoir :

$$A = 1,00609\ 5076;$$

ensuite pour l'interpolation on aura

$$x = \frac{2' 48'' 95776}{15'} = 0,18773084,$$

$$y = \frac{4' 12''}{15'} = 0,28.$$

D'après la valeur $y = 0,28$ et les différences tirées de la table,

savoir :

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 73\ 4952, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 789, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \theta^3} = -58,$$

on trouve

$$q = y \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{y-1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{y-2}{3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \theta^3} \right) = 20\ 5703.7;$$

de même prenant les différences de A par rapport à ϕ , savoir :

$$\frac{\partial A}{\partial \phi} = 569\ 6674, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} = 13409, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \phi^3} = 63,$$

on trouve

$$p = x \left(\frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{x-1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{x-2}{3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \phi^3} \right) = 106\ 8421.9;$$

enfin on trouve par la table $\frac{\partial^2 A}{\partial \phi \partial \theta} = 12749$, ce qui donne.....

$$r = xy \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \phi \partial \theta} = 670.1.$$

$$\text{Ajoutant toutes ces parties, on a } p + q + r = \begin{array}{r} 127\ 4796 \\ A = 1,00609\ 5076 \end{array}$$

$$\text{donc la fonction cherchée..... } F = 1,00736\ 9872.$$

La valeur supposée de ϕ est celle qui donne $F\phi = \frac{1}{2} F'c$; or, si par la table I, on cherche la fonction complète F' qui répond à l'angle du module $54^\circ 4' 12''$, on trouvera $\log F' = 0,30421\ 89508\ 40$; de là

$$F' = 2,01473\ 9751,$$

$$F\phi = 1,00736\ 9865\ 5;$$

on voit donc que le résultat trouvé par interpolation, n'est en erreur que de $6\frac{1}{2}$ unités décimales du neuvième ordre, et cette différence serait peut-être encore atténuée par les termes du troisième ordre que nous n'avons pas compris dans la valeur de r .

215. Pour avoir dans le même cas la valeur de E, nous prendrons dans la table, celle qui répond aux données $\phi = 52^\circ 30'$, $\theta = 54^\circ$; cette valeur est

$$A = 0,83986\ 4219;$$

on a en même temps les différences par rapport à ϕ

$$\frac{\partial A}{\partial \phi} = 334\ 2054, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} = -7848,$$

d'où l'on tire

$$p = x \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{x-1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \right) = 62\ 8005,$$

Les différences par rapport à θ sont

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = -52\ 6550, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 878,$$

et on en déduit

$$q = y \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{y-1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \right) = -14\ 7522\ 5;$$

enfin on trouve encore par la table $\frac{\partial^2 A}{\partial \theta \partial \varphi} = -7463$, ce qui donne

$$r = xy \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \theta \partial \varphi} = -3923.$$

De là résulte..... $p + q + r = 48\ 0090\ 2$
 quantité qui étant ajoutée au terme.... $A = 0,83986\ 4219$
 donne la fonction cherchée..... $E\varphi = 0,84034\ 4309\ 2$

Par la table I, on trouve $\log E' = 0,10294\ 28410\ 82$, de là

$$\begin{array}{r} E' = 1,26748\ 50370 \\ 1 - b = 0,41320\ 35868 \\ \hline 1,68068\ 86238 \\ E\varphi = 0,84034\ 43119; \end{array}$$

ainsi on voit que la valeur de $E\varphi$, trouvée par le calcul précédent, et en ne tenant compte que des différences du second ordre, n'est en erreur que de deux ou trois unités décimales du neuvième ordre.

216. Pour faciliter la construction de la grande table dont nous venons d'indiquer l'usage, ou seulement celle de la table IX qui n'est calculée que pour les degrés entiers, il est nécessaire de connaître d'avance, pour chaque module déterminé, les valeurs des fonctions complètes $F'c$, $E'c$, et celles des fonctions $F\varphi$, $E\varphi$, dont l'amplitude est de 45° . C'est principalement pour cet objet que nous avons construit la table VIII, où l'on trouvera les valeurs de ces fonctions, calculées jusqu'à douze décimales pour tous les angles du module de degré en degré, depuis 0° jusqu'à 90° .

Cette table donnera immédiatement les résultats dont on a be-

soin et avec plus de précision qu'il n'est nécessaire, pour le calcul de la table IX; elle servira de complément à la table I, qui ne donne que les logarithmes des fonctions complètes; elle donnera également, par une interpolation facile, les fonctions qui répondent à une amplitude de 45° pour chaque quart de degré de l'angle du module. Quant aux fonctions complètes, leur interpolation ne pourra être faite avec le même succès par la table VIII, que pour des angles du module plus petits que 45° ; car au-delà de cette limite, les différences successives décroissent si lentement, surtout dans la fonction F, qu'il faudrait les pousser beaucoup au-delà du sixième ordre, pour avoir un résultat suffisamment exact. Dans ce cas, il sera plus simple de faire usage de la table I, qui procède par des intervalles d'un dixième de degré seulement, et dont l'interpolation est beaucoup plus facile; connaissant par cette table les logarithmes des fonctions $F'c$, $E'c$, il ne restera plus qu'à chercher le nombre correspondant, ce qu'on pourra faire le plus souvent par les tables ordinaires à dix décimales.

217. Nous croyons devoir placer ici quelques remarques sur la formule qui sert à exprimer la fonction $E\phi$ dans la méthode des modules croissans, et sur les moyens de simplifier le calcul de cette fonction dans le cas particulier de $\phi = 45^\circ$.

La formule qu'il s'agit de réduire à une forme plus simple est celle-ci :

$$E\phi = LF\phi + \frac{c\sqrt{c^0}}{2} \sin\phi^0 + \frac{c\sqrt{(c^0c^{00})}}{4} \sin\phi^{00} + \frac{c\sqrt{(c^0c^{00}c^{000})}}{8} \sin\phi^{000} + \text{etc.}$$

Soit $\phi^0 - \phi = \omega$, $\phi^{00} - \phi^0 = \omega^0$, $\phi^{000} - \phi^{00} = \omega^{00}$, etc.; on aura la suite d'équations $\text{tang } \omega = b \text{ tang } \phi$, $\text{tang } \omega^0 = b^0 \text{ tang } \phi^0$, $\text{tang } \omega^{00} = b^{00} \text{ tang } \phi^{00}$, etc.; or, la valeur $\phi^0 = \phi + \omega$, donne $\sin\phi^0 = \sin\phi \cos\omega + \sin\omega \cos\phi = (1+b)\sin\phi \cos\omega = \frac{c}{\sqrt{c^0}} \cdot \sin\phi \cos\omega$; on aura semblablement $\sin\phi^{00} = \frac{c^0}{\sqrt{c^{00}}} \sin\phi^0 \cos\omega^0$, $\sin\phi^{000} = \frac{c^{00}}{\sqrt{c^{000}}} \sin\phi^{00} \cos\omega^{00}$; donc on peut mettre la formule précédente sous cette forme

$$E\phi = LF\phi + \frac{1}{2}c^2 \sin\phi \cos\omega (1 + \frac{1}{2}c^0 \cos\omega^0 + \frac{1}{4}c^0c^{00} \cos\omega^0 \cos\omega^{00} + \frac{1}{8}c^0c^{00}c^{000} \cos\omega^0 \cos\omega^{00} \cos\omega^{000} + \text{etc.})$$

ff

On voit que la série contenue dans cette expression est devenue entièrement rationnelle, et que chaque terme se déduit du précédent au moyen des multiplicateurs successifs $\frac{1}{2} c^\circ \cos \omega^\circ$, $\frac{1}{2} c^{\circ\circ} \cos \omega^{\circ\circ}$, $\frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ} \cos \omega^{\circ\circ\circ}$, etc., qui sont tous de la même forme et qui décroissent avec une grande rapidité.

Si l'on faisait $r = c \cos \omega$, $r^\circ = c^\circ \cos \omega^\circ$, $r^{\circ\circ} = c^{\circ\circ} \cos \omega^{\circ\circ}$, etc., ensuite

$$P = \frac{1}{2} r + \frac{1}{4} rr^\circ + \frac{1}{8} rr^\circ r^{\circ\circ} + \text{etc.},$$

on aurait $E\phi = LF\phi + P\sin\phi$, formule dont l'analogie avec celle de l'art. 159, mérite d'être remarquée.

Au reste les angles ω , ω° , $\omega^{\circ\circ}$, etc., ne sont autre chose que les différences premières des angles ϕ , ϕ° , $\phi^{\circ\circ}$, etc., et ils finissent par croître comme ceux-ci en raison double.

218. Voyons maintenant ce qui résulte de la supposition $\phi = 45^\circ$. Alors les équations $\sin(2\phi - \phi^\circ) = c^\circ \sin \phi^\circ$, $\tan \omega^\circ = b^\circ \tan \phi^\circ$, donnent $\tan \phi^\circ = \frac{1}{c^\circ}$, $\tan \omega^\circ = \frac{b^\circ}{c^\circ}$, et de celle-ci on déduit encore $\sin \omega^\circ = b^\circ$, $\cos \omega^\circ = c^\circ$. Ainsi on aura à la fois $\cot \phi^\circ = c^\circ$, et $\cos \omega^\circ = c^\circ$. La première donne la valeur de ϕ° et la seconde celle de ω° ; on connaîtra ainsi $\phi^{\circ\circ} = \phi^\circ + \omega^\circ$. Dans les cas où c° est suffisamment petit, il conviendra de calculer ϕ° par la suite

$$\frac{1}{2} \pi - \phi^\circ = c^\circ \left(1 - \frac{1}{3} c^{\circ 2} + \frac{1}{5} c^{\circ 4} - \frac{1}{7} c^{\circ 6} + \text{etc.} \right),$$

ou pour abréger

$$\frac{1}{2} \pi - \phi^\circ = (1) - (2) + (3) - (4) + \text{etc.},$$

et on aura en même tems

$$\frac{1}{2} \pi - \omega^\circ = (1) + \frac{1}{2} (2) + \frac{1.3}{2.4} (3) + \frac{1.3.5}{2.4.6} (4) + \text{etc.}$$

Soit z la somme des seconds membres de ces équations; on aura, en les ajoutant, $\pi - \phi^{\circ\circ} = z$, ou $\phi^{\circ\circ} = \pi - z$.

Connaissant ainsi ϕ° et $\phi^{\circ\circ}$, il sera facile d'avoir $\phi^{\circ\circ\circ}$ par l'équation $\tan \omega^{\circ\circ} = b^{\circ\circ} \tan \phi^{\circ\circ}$, ou par la série équivalente

$$\phi^{\circ\circ\circ} = 2\phi^{\circ\circ} - c^{\circ\circ\circ} \sin 2\phi^{\circ\circ} + \frac{1}{2} c^{\circ\circ\circ\circ} \sin 4\phi^{\circ\circ} - \text{etc.},$$

dont il suffit de calculer les trois premiers termes; on aura de même $\varphi'''' = 2\varphi''' - c'''' \sin 2\varphi''$. Il résulte de ces deux équations, où l'on peut supposer $c'''' = (\frac{1}{2} c''')^2$:

$$\frac{1}{4} \varphi'''' = \pi - z + \frac{1}{2} c''' \sin 2z (1 - \frac{3}{4} c''' \cos 2z);$$

et comme Φ désigne la limite des quantités $\varphi, \frac{\varphi''}{2}, \frac{\varphi'''}{4}$, etc., laquelle peut être censée égale au cinquième terme, on aura

$$\Phi = \frac{1}{4} [\pi - z + \frac{1}{2} c''' \sin 2z (1 - \frac{3}{4} c''' \cos 2z)];$$

ainsi z étant déjà connu, il suffira d'ajouter à $\pi - z$ la petite correction $\frac{1}{2} c''' \sin 2z (1 - \frac{3}{4} c''' \cos 2z)$, et de diviser le tout par 4, pour avoir la valeur de Φ , au moyen de laquelle on trouve.....

$$F\varphi = K\Phi = \frac{\Phi}{\frac{1}{2}\pi} \cdot F'c.$$

Connaissant $F\varphi$, on connaîtra la partie $LF\varphi$ qui entre dans la valeur de $E\varphi$; quant à la seconde partie $Pc \sin \varphi$, elle se trouvera d'une manière très-simple par la formule

$$Pc \sin \varphi = \frac{1}{2} c \sqrt{c''} \left[1 + \left(\frac{c''}{2}\right)^4 + \frac{55}{8} \left(\frac{c''}{2}\right)^8 + \frac{1}{2} \left(\frac{c''}{2}\right)^{16} \right],$$

où il faut observer que le premier terme $\frac{1}{2} c \sqrt{c''} = \frac{1}{2} (1 - b)$, se trouvera immédiatement par la table de sinus naturels à 15 décimales, comprise dans la *Trig. brit.*, si toutefois l'angle du module θ s'exprime exactement en degrés et centièmes de degré.

219. Pour vérifier cette valeur de $Pc \sin \varphi$, il faut, dans la formule générale $Pc \sin \varphi = \frac{1}{2} c \sqrt{c''} \sin \varphi (1 + \frac{1}{2} c'' \cos \varphi + \frac{1}{4} c'' c'''' \cos \varphi \cos \varphi'' + \text{etc.})$, substituer les valeurs $\cos \omega'' = c''$, $\sin \varphi'' = \frac{1}{\sqrt{(1 + c''')}}^2$, ce qui donne d'abord

$$Pc \sin \varphi = \frac{\frac{1}{2} c \sqrt{c''}}{\sqrt{(1 + c''')}} (1 + \frac{1}{2} c'' + \frac{1}{4} c'' c'''' \cos \omega'' + \frac{1}{8} c'' c'''' c'''' \cos \omega'' \cos \omega'''' + \text{etc.});$$

ensuite pour avoir l'expression des quantités $\cos \omega''$, $\cos \omega''''$, je reprends les équations $\tan \omega'' = b'' \tan \varphi''$, $\varphi'' = \varphi' + \omega''$, $\tan \omega'' = \frac{b''}{c''}$.

$\text{tang } \omega'' = b'' \text{ tang } \phi'',$ j'en déduis successivement

$$\text{tang } \phi'' = \frac{\text{tang } \phi' + \text{tang } \omega'}{1 - \text{tang } \phi' \text{ tang } \omega'} = \frac{(1 + b')c'}{c'^2 - b'^2},$$

$$\text{tang } \omega'' = \frac{b'c'(1 + b')}{c'^2 - b'^2} = \frac{2c'\sqrt{b'}}{c'^2 - b'^2},$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} \omega'' = \frac{\sqrt{b'}}{c'} = \text{tang } \omega' \cdot \sqrt{\frac{1}{b'}}, \quad \cos \omega'' = \frac{c'^2 - b'}{c'^2 + b'};$$

en continuant cette analyse, on trouvera

$$\text{tang } \frac{1}{2} \omega''' = \text{tang } \omega'' \cdot \sqrt{\frac{1}{b''}}, \quad \cos \omega''' = \frac{b'' - \text{tang}^2 \omega''}{b'' + \text{tang}^2 \omega''},$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} \omega'''' = \text{tang } \omega''' \cdot \sqrt{\frac{1}{b'''}}; \quad \cos \omega'''' = \frac{b''' - \text{tang}^2 \omega'''}{b''' + \text{tang}^2 \omega'''};$$

ainsi à l'infini. On voit donc que dans le cas dont il s'agit, les quantités ω , ω' , ω'' , ω''' , etc., se calculent facilement; savoir, la première au moyen de l'équation $\text{tang } \omega = b$, la seconde au moyen de l'une des équations $\text{tang } \omega' = \frac{b'}{c'}$, $\sin \omega' = \frac{b'}{c'}$, $\cos \omega' = \frac{c'}{c'}$, $\text{tang } \frac{1}{2} \omega' = \text{tang } \omega \cdot \sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{b}$, les suivantes au moyen des équations $\text{tang } \frac{1}{2} \omega'' = \text{tang } \omega' \cdot \sqrt{\frac{1}{b'}} = \frac{\sqrt{b'}}{c'}$, $\text{tang } \frac{1}{2} \omega''' = \text{tang } \omega'' \cdot \sqrt{\frac{1}{b''}}$, $\text{tang } \frac{1}{2} \omega'''' = \text{tang } \omega''' \cdot \sqrt{\frac{1}{b'''}}$, etc., ce qui offre des formules assez remarquables pour le cas où l'on a $\phi = 45^\circ$.

Maintenant qu'on connaît les valeurs de $\cos \omega''$ et $\cos \omega'''$, si on les substitue dans l'expression de $Pc \sin \phi$, et qu'on y substitue également les expressions connues de c'' en c' , et de c''' en c'' , on aura; en développant ces quantités jusqu'à la dixième puissance de c' inclusivement, l'expression que nous avons rapportée du terme $Pc \sin \phi$, laquelle est très-facile à calculer, et donne au moins 12 décimales exactes, tant que l'angle du module ne surpasse pas $\sin 45^\circ$.

C'est par ces formules qu'on a calculé les fonctions $F(45^\circ)$, $E(45^\circ)$ de la table VIII, pour toutes les valeurs de l'angle du module de 0° à 45° ; au-delà de cette limite, on a fait usage de la méthode des modules croissans, art. 158, laquelle ne présente, pour le cas de $\phi = 45^\circ$, aucune formule remarquable, si ce n'est pour déterminer ϕ' , l'équation $\sin 4\phi' = b^2$.

220. Il nous reste maintenant à parler de l'interpolation de la table IX qui, au défaut d'une table plus étendue, pourra servir à évaluer, jusqu'à la précision de sept ou huit décimales, toute fonction E ou F dont le module n'excède pas $\sin 75^\circ$. Nous avons déjà donné les formules nécessaires pour cet objet, dans les articles 211-213, et nous les avons appliquées à divers exemples; mais la forme particulière de la table IX, où se trouvent les différences successives des fonctions par rapport à l'amplitude ϕ , contribuera à simplifier le calcul des coefficients de ces formules, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple qui suit.

Soit proposé de trouver la fonction $F(\phi, \theta)$, qui répond à l'amplitude $\phi = 54^\circ 45'$, et à l'angle du module $\theta = 60^\circ 15'$; on aura à substituer dans les formules les valeurs $\alpha = 54^\circ$, $\epsilon = 60^\circ$, $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, lesquelles supposent $\delta\phi = \delta\theta = 1^\circ$. Mais d'abord il faut tirer de la table IX les résultats suivans, relatifs aux angles du module 60° , 61° , 62° , 63° , et dans lesquels A représente la fonction $F(54^\circ, \theta)$.

θ .	A.	$\frac{\delta A}{\delta \phi}$.	$\frac{\delta^2 A}{\delta \phi^2}$.	$\frac{\delta^3 A}{\delta \phi^3}$.
60°	1,06018 2905	2461 1435	30 6593	7432
61	1,06346 3234	2485 7725	32 2436	8329
62	1,06672 8358	2510 6001	33 8814	9301
63	1,06997 2417	2535 5826	35 5710	10356

Dans la première ligne de ce petit tableau, on trouve immédiatement pour $\theta = 60^\circ$, les coefficients dus à la seule variation de ϕ , savoir, $\frac{\delta A}{\delta \phi} = 2461 \ 1435$, $\frac{\delta^2 A}{\delta \phi^2} = 30 \ 6593$, $\frac{\delta^3 A}{\delta \phi^3} = 7432$; pour avoir ceux qui sont dus à la variation de θ , et aux variations simultanées de θ et de ϕ , il faut prendre les différences des termes dans chaque colonne.

Par les différences prises dans la colonne des A, on trouve pour $\theta = 60^\circ$, les coefficients

$$\frac{\delta A}{\delta \theta} = 328 \ 0329, \quad \frac{\delta^2 A}{\delta \theta^2} = -15 \ 205, \quad \frac{\delta^3 A}{\delta \theta^3} = -5860.$$

Par les différences prises dans la colonne intitulée $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$, on aura également pour $\theta = 60^\circ$,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \theta} = 24\,6290, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi \partial \theta^2} = 1986;$$

enfin par la colonne suivante on aura $\frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta} = 15\,843$.

Les coefficients ainsi trouvés pour le cas de $\theta = 60^\circ$, suffisent pour calculer les différens termes de la formule générale d'interpolation jusqu'au troisième ordre inclusivement.

Si l'on se borne aux termes du premier ordre, on aura.....
 $F = A + \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} = 1,07946\,15635$. Ajoutant les termes du second ordre, savoir $-\frac{3}{32} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \theta} - \frac{3}{32} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 188617$, on aura plus exactement $F = 1,07948\,04252$. Enfin les termes du troisième ordre $\frac{5}{128} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^3} - \frac{3}{128} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta} - \frac{9}{128} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi \partial \theta^2} + \frac{7}{128} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \theta^3}$, lesquels se réduisent à -5411 , donnent pour dernier résultat.....
 $F = 1,07947\,98841$, valeur qui ne peut guère être fautive que dans la huitième décimale; elle acquerrait une plus grande exactitude encore, si on tenait compte des termes du quatrième ordre.

221. Pour calculer semblablement la fonction E, on tirera de la table IX les résultats suivans :

θ .	A.	$\frac{\partial A}{\partial \varphi}$.	$\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}$.	$\frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^3}$.
60°	0,84640 8389	1237 7225	— 15 2287	+ 145
61	0,84427 0773	1225 4604	— 15 6917	+ 67
62	0,84216 8257	1213 3430	— 16 1559	— 15
63	0,84010 3932	1201 3897	— 16 6203	— 104

et en opérant comme dans le cas précédent, on aura pour $\theta = 60^\circ$, les coefficients suivans :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \varphi} &= 1237 \ 7225, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} = -15 \ 2287, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^3} = 145, \\ \frac{\partial A}{\partial \theta} &= -213 \ 7616, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 3 \ 5100, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \theta^3} = 3091, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \theta} &= -12 \ 2621, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi \partial \theta^2} = 1447, \\ \frac{\partial^3 A}{\partial \varphi^2 \partial \theta} &= -4630;\end{aligned}$$

substituant ensuite ces valeurs dans la formule générale, on aura
1°. en se bornant aux termes du premier ordre, $E=0,85515 \ 69038$;
2°. en tenant compte des termes du second ordre, $E=0,85514 \ 48986$;
3°. enfin en tenant compte des termes du 3° ordre, $E=0,85514 \ 50801$.

222. Pour vérifier ces résultats par la méthode des modules croissans, on commencera par former l'échelle des modules qui convient à l'angle $\theta=60^\circ 15'$; elle est la même, aux dénominations près, que celle qui convient au complément $\theta=29^\circ 45'$, et on la trouvera comme il suit:

$$\begin{array}{ll} c \dots\dots 9,93861 \ 91884 \ 8 & b \dots\dots 9,69567 \ 12043 \ 9 \\ c' \dots\dots 9,99891 \ 64980 \ 4 & b' \dots\dots 8,84849 \ 62248 \ 0 \\ c'' \dots\dots 9,99999 \ 96621 \ 0 & b'' \dots\dots 7,09601 \ 52844 \ 4 \\ K \dots\dots 0,03014 \ 84858 \ 3 & b''' \dots\dots 3,58997 \ 09154 \ 6. \end{array}$$

Faisant ensuite $\varphi=54^\circ 45'$, on trouvera par les formules connues

$$\begin{aligned}\varphi' &= 49^\circ 57' \ 7'', 556664, \\ \varphi'' &= 49.52.2, 356394, \\ \varphi''' &= 49.52.2, 261216;\end{aligned}$$

il en résulte $45^\circ + \frac{1}{2}\varphi''' = 69^\circ 56' 1'', 130608$, $H = \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi''')$
 $= 0,43737 \ 14021$, et calculant $F\varphi$ d'après l'équation $F\varphi = KMH$,
on aura

$$\log F\varphi = 0,03321 \ 45573 \ 3, \quad F\varphi = 1,07947 \ 98929.$$

Enfin pour calculer $E\varphi$, on a l'équation $E\varphi = L'F\varphi + Pc \sin \varphi$, dans laquelle $L' = \frac{1}{2}b^2(1 + \frac{1}{2}b' + \frac{1}{4}b'b'')$, $P = P' \cdot 2c^{\frac{1}{2}} \sin \varphi' - c \sin \varphi$,
 $P' = \frac{2}{r''} - 1$, $\log P' = -2 \log r'' = -2 \log(c'' \cos \omega'') = 0,00000 \ 16266 \ 3$;

il en résulte les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
 P'. 2c^{\frac{1}{2}} \sin \phi' & = & 1,42656 \ 07198 \ 4 \\
 c \sin \phi \dots\dots & & 0,70900 \ 72300 \ 5 \\
 \hline
 P \sin \phi \dots\dots & = & 0,71755 \ 34897 \ 9
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 L'F\phi\dots & = & 0,13759 \ 15932 \ 6 \\
 P \sin \phi\dots & & 0,71755 \ 34897 \ 9 \\
 \hline
 E\phi\dots\dots & = & 0,85514 \ 50830 \ 5.
 \end{array}$$

On voit donc que la valeur de $F\phi$, trouvée par l'interpolation de la table IX, n'est en erreur que d'environ une unité décimale du huitième ordre, et que celle de $E\phi$ n'est en erreur que de trois unités décimales du neuvième ordre. Le résultat de l'interpolation serait un peu plus exact encore, si on avait égard aux termes du quatrième ordre; mais un si petit avantage ne vaut guère la peine qu'on prendrait pour l'obtenir, et il paraît convenable de s'en tenir, comme nous l'avons fait, aux termes du troisième ordre, même à ceux du second, si on veut se contenter de six décimales.

Nous ne dissimulerons pas qu'il y a des cas où l'interpolation de la table IX pourrait ne pas donner des résultats aussi exacts que dans l'exemple précédent; ce sont ceux où l'amplitude excéderait 70° ; car alors, les différences des fonctions, sur-tout celles de la fonction F , décroissent si lentement qu'il faudrait, dans la formule, tenir compte des termes du quatrième ordre, ou même de deux du cinquième, pour que l'erreur n'eût lieu que dans la huitième décimale. Mais cet inconvénient est inhérent à la nature des choses, et on pourra toujours l'éviter, soit par les formules de bisection, soit par les formules des fonctions complémentaires, en ramenant la détermination des fonctions proposées E et F à celle de deux autres fonctions dont l'amplitude sera beaucoup plus petite.

§ XVI. *Des cas où l'on voudrait pousser l'approximation au-delà de quatorze décimales dans le calcul des fonctions E et F .*

223. LE nombre de quatorze décimales dans les logarithmes, ou celui de quatorze chiffres significatifs dans les nombres, est la limite que nous n'avons pas pu passer jusqu'à présent dans le calcul des fonctions E et F , parce que les tables trigonométriques les plus étendues, ne comportent pas un plus grand degré de précision. S'il

devenait donc nécessaire dans quelques cas de pousser plus loin l'approximation, on pourrait toujours faire usage des formules générales, qui sont susceptibles d'un degré d'exactitude indéfini; mais il faudrait recourir à des moyens particuliers, pour déterminer avec la précision nécessaire les élémens qui entrent dans ces formules.

Soit proposé, par exemple, de calculer avec vingt décimales les logarithmes des fonctions complètes F^1c , E^1c , qui répondent au module $c = \sin 45^\circ$. Il faudra, pour cet effet, évaluer jusqu'à vingt décimales les logarithmes des modules c , c° , $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ\circ\circ}$, et ceux de leurs complémens b , b° , $b^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ\circ}$; ce nombre de termes suffit, quand même on voudrait pousser la précision jusqu'à vingt-huit décimales.

D'abord puisque $c = b = \sqrt{\frac{1}{2}}$, on a immédiatement

$$lc = lb = 9,84948 \ 50021 \ 68009 \ 40239 \ 313;$$

en second lieu, on a $c^\circ = \frac{1-b}{1+b} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$, ainsi il faut calculer le logarithme de $\sqrt{2}+1$ avec vingt décimales au moins. Pour cela, j'observe qu'en faisant $(1+\sqrt{2})^n = p+q\sqrt{2}$, on aura $p^2-2q^2=(-1)^n$, et $p+q\sqrt{2} = p + \sqrt{(p^2 \mp 1)}$; d'un autre côté

$$\log[p + \sqrt{(p^2 \mp 1)}] = \log 2p \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2p^2} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{m}{4p^4} \mp \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{m}{6p^6} - \text{etc.};$$

or en faisant $n=15$, on a $p = 275807 = 7.31.41$, $q = 195025$, $p^2 - 2q^2 = -1$; donc $15 \log(1 + \sqrt{2}) = \log 2p + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2p^2} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{m}{4p^4}$.

Par la table connue qui donne jusqu'à 25 décimales ou plus les logarithmes des nombres de 1 à 1100, on trouve $\log 2p$, auquel il suffit d'ajouter la correction $\frac{m}{4p^2}$ facile à calculer, ce qui donnera les résultats suivans:

$\log 2p \dots\dots\dots$	= 5,74163 52800 66518 87976 87
$\frac{m}{4p^2} \dots\dots\dots$	+ 1427 29502 20
$15 \log(1 + \sqrt{2}) \dots\dots$	= 5,74163 52800 67946 17479 07
$l(1 + \sqrt{2}) \dots\dots\dots$	= 0,38277 56855 57863 07831 938
$2l(1 + \sqrt{2}) \dots\dots\dots$	= 0,76555 13706 75726 15663 876
$lc \dots\dots\dots$	= 9,23444 86293 24273 84336 124;

ensuite par la valeur $b^{\circ} = \frac{2\sqrt{b}}{1+b} = \frac{2\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt{2}}$, on trouvera

$$lb^{\circ} = 9,99351 \ 18092 \ 42113 \ 41569 \ 78.$$

Il faut maintenant calculer $c^{\circ\circ}$ et $b^{\circ\circ}$, ce qui se fera par les formules, $b^{\circ\circ} = \frac{2\sqrt{b^{\circ}}}{1+b^{\circ}}$, $c^{\circ\circ} = \frac{c^{\circ\circ}}{(1+b^{\circ})^2}$; ainsi tout se réduit à trouver $\log(1+b^{\circ})$; or, une valeur approchée de b° étant $a = \frac{1063}{1079}$, on connaît par les tables le logarithme de a et celui de $1+a = \frac{2142}{1079}$, ce qui permettra de calculer $\log(1+b^{\circ})$ comme il suit :

$b^{\circ} \dots$	9,99351	18092	42113	41569	78	$1+a \dots$	0,29779	80218	12926	15600	789
$a \dots$	9,99351	18198	40386	08392	38	(1).....	—	52	59553	61641	094
$r =$	105 98272 66822 60								80165	53372	53959 695
						(2).....			+ 3232 708		
$lA=la-r$, $r' = \frac{r}{1+a}$, $R=ar'(1-\frac{1}{2}Mr')$,						$l(1+b^{\circ})=$	0,29779	80165	53372	57192	403
$l(1+A)=l(1+a)-R$,						$c^{\circ} \dots$	9,23444	86293	24273	84336	124
$\sqrt{b^{\circ}} \dots$	9,99675	59046	21056	70784	890				8,93665	06127	70901 27143 721
$2 \dots$	0,30102	99956	63981	19521	374	$lc^{\circ\circ} \dots$	7,87330	12255	41802	54287	442
	0,29778	59002	85037	90306	264	$2 \dots$	0,30102	99956	63981	19521	374
$1+b^{\circ}$	0,29779	80165	53372	57192	403	$\frac{1}{2} c^{\circ\circ} \dots$	7,57227	12298	77821	34766	068
$lb^{\circ\circ} =$	9,99998	78837	31665	33113	861		5,14454	24597	55642	69532	136
						$b^{\circ\circ} \dots$	9,99998	78837	31665	33113	861
						$p \dots$	5,14455	45760	23977	36418	275.

224. Ces premiers termes étant connus, on pourra calculer les modules suivans $c^{\circ\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ}$, par les formules ordinaires $p = \frac{(\frac{1}{2}c^{\circ\circ})^2}{b^{\circ\circ}}$, $P = mp^3 - \frac{3}{2}mp^4$, $lc^{\circ\circ\circ} = lp - P$, $lb^{\circ\circ\circ} = -\frac{1}{2}P$; voici ce calcul :

$mp^2 \dots$	84507	15154	866	$p \dots$	5,14455	45760	23977	36418	275
$\frac{3}{2} mp^4 \dots$		2	466	$P \dots$		—	84507	15152	400
$P =$	84507	15152	400	$lc^{\circ\circ\circ} \dots$	5,14455	45759	39470	21265	875
				$lb^{\circ\circ\circ} \dots$	—		42253	57576	200

on obtient ensuite très-facilement les modules $c^{\circ\circ\circ\circ}$, $b^{\circ\circ\circ\circ}$, comme il suit :

CONSTRUCTION DES TABLES ELLIPTIQUES. 311

$\frac{1}{2}c^{000}.....$	4,84352 45802 75489 01744 511		
	9,68704 91605 50978 03489 022		
$1:b^{000}.....$	42253 57576 200		
$p.....$	9,68704 91605 93231 61065 222	$p^2....$	$\overline{9,37409\ 832}$
$P.....$	— 103	$m....$	$\overline{9,63778\ 431}$
$lc^{000}.... =$	$\overline{9,68704\ 91605\ 93231\ 61065\ 119\ (*)}$	$P... =$	$\overline{9,01188\ 263}$
$lb^{000}.... =$	— 051.		

On voit qu'en s'en tenant à vingt décimales, il n'est pas nécessaire de prolonger la série des modules au-delà de c^{000} et b^{000} ; car $\log b^{000}$ n'est que d'une demi-unité décimale du vingt-unième ordre. Cependant le calcul étant amené à ce point, on peut sans peine avoir deux décimales de plus, en prenant la valeur suivante de lc^{0000} .

$c^0.....$	$\overline{9,68704\ 91605\ 93231\ 61065\ 119}$
	$\overline{0,30102\ 99956\ 63981\ 19521\ 374}$
	$\overline{9,38601\ 91649\ 29250\ 41543\ 745}$
	$\overline{8,77203\ 83298\ 58500\ 83087\ 490}$
$1:b^0.....$	051
$lc^{0000}.... =$	$\overline{8,77203\ 83298\ 58500\ 83087\ 541.}$

225. D'après ces élémens, le calcul de $K = \sqrt{\left(\frac{1}{b} \cdot b^0 b^{00} b^{000} b^{0000}\right)}$, et celui de $F^1c = \frac{\pi}{2} \cdot K$, donnent les résultats suivans :

$\log K.....$	$= 0,07200\ 73453\ 81757\ 88434\ 038$
$\frac{1}{2}\pi.....$	$\overline{0,19611\ 98770\ 30152\ 65913\ 753}$
$LF^1c.....$	$= 0,26812\ 72224\ 11910\ 54347\ 791.$

Maintenant pour avoir la valeur de $E^1c = LF^1c$, il faut calculer le coefficient L par la formule $L = \frac{b}{b^2} \left(1 - \frac{1}{2}c^{02}c^{00} - \frac{1}{4}c^{04}c^{00}c^{000} - \frac{1}{8}c^{06}c^{00}c^{000}c^{0000}\right)$. Pour cela, soit $r = \frac{1}{2}c^{02}c^{00} \left[1 + \frac{1}{2}c^{04} \left(1 + \frac{1}{2}c^{06}c^{0000}\right)\right]$; on aura d'abord $L = \frac{b}{b^2} (1 - r)$; soit ensuite $r' = \frac{1}{2}c^{04} \left(1 + \frac{1}{2}c^{06}c^{0000}\right)$

(*) Nous rappellerons ici un usage qui est commode à suivre dans le calcul des fractions très-petites. La caractéristique 9 place le premier chiffre d'un nombre au premier rang des décimales, la caractéristique $\overline{9}$ le place au onzième rang, la caractéristique $\overline{\overline{9}}$ au vingt-unième, et ainsi de suite.

$= \frac{1}{2} c^{000} \sqrt{(1 + c^{000})} = \frac{1}{2} c^{000} \sqrt[4]{\frac{1}{b^{000}}}$, on aura $r = \frac{1}{2} c^{00} (c^0)^2 (1 + r')$; d'où $\log r = \log \frac{1}{2} c^{00} + 2 \log c^0 + m r' - \frac{1}{2} m r'^2 + \frac{1}{3} m r'^3$; voici le calcul :

$\frac{1}{2} c^{00} \dots$	7,57227	12298	77821	34766
$c^{02} \dots$	8,46889	72586	48547	68672
(1) ... +		30290	67083	5444
(2) ... -			10563	3939
(3) ... +				491
$r \dots$	6,04117	15175	82889	2340

$\frac{1}{2} c^{000} \dots$	4,84352	45802	75489
$\sqrt[4]{\frac{1}{b^{000}}} \dots$			10563
$r' \dots$	4,84352	45802	8605
$m \dots$	9,63778	43113	0054
(1) ...	4,48130	88915	8659
$\frac{1}{2} r' \dots$	4,54249	45846	
(2) ...	9,02380	3476	
$\frac{2}{3} r' \dots$	4,66743	32	
(3) ...	3,69123	7	

D'après cette valeur de $\log r$, il faut calculer $\log(1 - r)$ par la suite $-mr(1 + \frac{1}{2}r + \text{etc.})$, dont cinq termes suffisent; on obtiendra ainsi :

$\log(1 - r) \dots$	= -	0,00004	77506	95768	98769	62
$\log \frac{b}{b^{02}} \dots$		9,86246	13836	83782	57099	75
$\log L \dots$	=	9,86241	36329	88013	58330	13
$lF^1c \dots$	=	0,26812	72224	11910	54347	79
$lE^1c \dots$	=	0,13054	08553	99924	12677	92.

226. Cette valeur de E^1c peut être vérifiée comme dans l'art. 28 par l'équation $E^1 = \frac{1}{2} F^1(1 + A)$, dans laquelle $A = \frac{1}{KF^1}$; en voici le calcul :

$KF^1 \dots$	0,34013	45677	93668	42781	829
$A \dots$	9,65986	54322	06331	57218	171
$a \dots$	9,65986	54935	01017	46903	483
$r =$		612	94685	89685	312

$$a = \frac{865}{1893}, \quad 1+a = \frac{2758}{1893},$$

$$lA = la - r, \quad r' = \frac{r}{1+a},$$

$$l(1+A) = l(1+a) - R,$$

$$R = ar' - \frac{1}{2} Mar'^2.$$

Le terme ar' se calculera plus facilement sans le secours des lo-

garithmes par la valeur $\frac{ar}{1+a} = \frac{865}{2758} r$, et on aura.....

$$ar' = 192 \ 24040 \ 35561 \ 202, \\ \text{l'autre partie } \frac{1}{2} Mar'^2, \text{ calculée par les log.} = \underline{93112 \ 831}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } R &= 192 \ 24039 \ 42448 \ 371 \\ l(1+a) &= 0,16344 \ 36478 \ 76034 \ 20298 \ 574 \\ l(1+A) &= 0,16344 \ 36286 \ 51994 \ 77850 \ 203 \\ l\frac{1}{2}F'c &= 9,96709 \ 72267 \ 47929 \ 34826 \ 417 \\ lE'c &= 0,13054 \ 08553 \ 99924 \ 12676 \ 62 \end{aligned}$$

Ces deux résultats ne diffèrent entr'eux que d'une unité décimale du vingtième ordre; le dernier est celui qui doit être le plus exact.

Quant à la valeur de $F'c$, on peut la vérifier aussi par les formules

$$F'c = KMH, \ H = \frac{1}{32} \log \frac{4}{c^{00000}} = 0,68218 \ 81769 \ 20920 \ 67373 \ 6.$$

Or, en faisant $a = \frac{39.119.233}{8.10^{11}} = 0,68218 \ 81762 \ 5$, $H = a + x$, on aura $x = 0,00000 \ 00006 \ 70920 \ 67373 \ 6$, et en appliquant les formules $l(a+x) = la + R$, $lR = l\left(\frac{mx}{a}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{mx}{a}$, on aura les résultats suivans:

$a \dots 9,83390 \ 41879 \ 03568 \ 08145 \ 556$ $R \dots \quad \quad + \quad 4 \ 27121 \ 36680 \ 055$ <hr style="width: 100%;"/> $H \dots 9,83390 \ 41883 \ 30689 \ 44825 \ 611$ $M \dots 0,36221 \ 56886 \ 99463 \ 21087 \ 71$ $K \dots 0,07200 \ 73453 \ 81757 \ 88434 \ 038$ <hr style="width: 100%;"/> $lF'c = 0,26812 \ 72224 \ 11910 \ 54347 \ 36$	$x \dots 0,82667 \ 11744 \ 23391$ $m \dots 9,63778 \ 43113 \ 00537$ <hr style="width: 100%;"/> $\frac{1}{a} \dots 0,16609 \ 58120 \ 96432$ <hr style="width: 100%;"/> $\frac{mx}{a} \dots 0,63055 \ 12978 \ 20360$ <hr style="width: 100%;"/> $\frac{1}{2} \cdot \frac{mx}{a} \dots \quad \quad \quad - \ 2 \ 13561$ <hr style="width: 100%;"/> $R \dots 0,63055 \ 12976 \ 0680.$
---	--

On voit que cette valeur ne diffère de celle qu'on a trouvée ci-dessus que de quatre unités décimales du vingt-unième ordre, ce qui confirme pleinement tous ces calculs.

227. Connaissant ainsi les fonctions complètes, si on propose de déterminer avec un pareil degré d'exactitude les fonctions $E\phi$, $F\phi$, pour une amplitude donnée ϕ , le calcul présentera de plus

grandes difficultés, parce que les tables connues des log-sinus ne passent pas quatorze décimales, au lieu que les logarithmes des nombres jusqu'à 1100, sont donnés avec un beaucoup plus grand nombre de décimales par la table de *Sharp*, et se trouvent dans plusieurs autres recueils, ce qui permet de suppléer aux limites des tables, en employant des réductions et des artifices de calcul, tels que ceux dont nous avons donné des exemples. Voici au reste quelle serait la marche qu'on pourrait suivre, si on entreprenait de semblables calculs.

Supposons qu'étant donné la valeur de ϕ , on veut déterminer avec vingt décimales exactes, la fonction $F\phi$ ou son logarithme; il faudra commencer par chercher, avec une semblable précision, la valeur de $\text{tang } \phi$ ou celle de son logarithme; c'est ce qu'on trouvera par les méthodes connues dans la théorie des fonctions angulaires. Ensuite il faudra procéder au calcul des angles croissans ϕ° , ϕ'' , ϕ''' , etc., ou à celui des angles décroissans ϕ' , ϕ'' , ϕ''' , etc., selon que le module sera plus ou moins près de l'unité.

Dans le premier cas, pour déterminer ϕ° par le moyen de ϕ , on ne doit plus employer l'équation succincte $\text{tang}(\phi^\circ - \phi) = b \text{ tang } \phi$, qui suppose l'usage des tables de sinus; mais il faudra déterminer simplement la valeur numérique de $\text{tang } \phi^\circ$ par la formule

$$\text{tang } \phi^\circ = \frac{(1+b) \text{ tang } \phi}{1-b \text{ tang}^2 \phi}.$$

On aura soin cependant de noter la valeur approchée de ϕ° , en degrés et minutes seulement, afin de ne pas confondre le véritable arc ϕ° dont on a besoin, avec les autres arcs qui peuvent avoir la même tangente; on se rappellera, pour cet effet, qu'en vertu de l'équation $\sin(2\phi - \phi^\circ) = c^\circ \sin \phi^\circ$, la valeur de $2\phi - \phi^\circ$, doit toujours être contenue entre les limites θ° et $-\theta^\circ$, θ° étant le plus petit angle qui a pour sinus c° .

On connaît déjà $l \text{ tang } \phi$, on connaît $l(1+b) = l\left(\frac{a\sqrt{b}}{b^\circ}\right)$; ainsi pour avoir $l \text{ tang } \phi^\circ$, il faut faire $b \text{ tang}^2 \phi = A$, et du logarithme connu de A , déduire celui de $1-A$, ce qui se fait par les formules dont nous avons donné beaucoup d'exemples.

Il est visible maintenant qu'un semblable calcul servira à déduire

φ° de φ° et ainsi de suite. On continuera donc le calcul des amplitudes croissantes φ° , $\varphi^{\circ\circ}$, $\varphi^{\circ\circ\circ}$, etc., jusqu'à la limite où un terme ne diffère plus sensiblement du double du précédent; cette limite aura lieu lorsque le b correspondant au dernier φ , pourra être pris pour l'unité; dans l'exemple précédent, c'était $b^{\circ\circ\circ}$. Ainsi lorsqu'on voudra avoir vingt décimales exactes, et que c ne surpassera pas $\sin 45^{\circ}$, il ne faudra pas prolonger le calcul de la suite φ° , $\varphi^{\circ\circ}$, etc., au-delà du quatrième terme $\varphi^{\circ\circ\circ}$; et pour des modules au-dessous de $\sin 26^{\circ}$, il suffirait d'aller jusqu'à $\varphi^{\circ\circ\circ}$.

Connaissant $\tan \varphi^{\circ\circ\circ}$, et sachant toujours d'avance à très-peu près combien l'arc $\varphi^{\circ 4}$ contient de degrés et de minutes, il restera à trouver l'arc lui-même $\varphi^{\circ 4}$ qui répond à cette tangente; c'est ce qu'on trouvera par les méthodes qui ont servi à trouver $\tan \varphi$ par le moyen de φ .

L'angle $\varphi^{\circ\circ\circ}$ étant connu et réduit en parties du rayon, on fera $\Phi = \frac{1}{16} \varphi^{\circ\circ\circ}$, et on aura la fonction cherchée $F\Phi = K\Phi$.

L'application de la même formule répétée quatre fois consécutives, suffira donc pour obtenir vingt décimales exactes; on en obtiendrait le double avec un terme de plus, mais alors il faudrait calculer aussi avec quarante décimales, les logarithmes des modules et ceux des différentes tangentes, ce qui serait un travail presque insurmontable.

228. La même méthode peut être suivie, quand même l'angle du module s'élèverait jusqu'à 70° ou 75° ; mais, passé cette limite, il est préférable de suivre la méthode des modules croissans.

Ayant donc calculé les termes de l'échelle des modules d'où se déduisent les fonctions complètes $F'c$, $E'c$, on procédera au calcul des amplitudes décroissantes φ' , φ'' , etc., de la manière suivante.

Il faut d'abord tirer la valeur de $\tan \varphi'$ de l'équation.....

$\tan \varphi = \frac{(1+b')\tan \varphi'}{1-b'\tan^2 \varphi'}$, laquelle donne

$$\cot \varphi' = \frac{1+b'}{2} \cot \varphi + \sqrt{\left[\left(\frac{1+b'}{2}\right)^2 \cot^2 \varphi + b'\right]};$$

et comme on a $1+b' = \frac{2\sqrt{b'}}{b} = \frac{c'}{\sqrt{c}}$, la valeur de $\tan \varphi'$ pourra être mise sous cette forme

$$\tan \varphi' = \frac{\sqrt{c}}{c'} \cdot \frac{2 \tan \varphi}{1 + \sqrt{(1+b'^2 \tan^2 \varphi)}};$$

mais lorsque b sera très-petit, on pourra substituer à cette formule la suite fort convergente

$$l \operatorname{tang} \phi' = l \left(\frac{\sqrt{c}}{c'} \operatorname{tang} \phi \right) - \frac{m}{4} \left(b^2 \operatorname{tang}^2 \phi - \frac{3}{4} \cdot \frac{b^4 \operatorname{tang}^4 \phi}{2} + \frac{3.5}{4.6} \cdot \frac{b^6 \operatorname{tang}^6 \phi}{3} - \text{etc.} \right).$$

On déduira semblablement $\operatorname{tang} \phi''$ de $\operatorname{tang} \phi'$, $\operatorname{tang} \phi'''$ de $\operatorname{tang} \phi''$, etc.; d'ailleurs on voit que la suite ϕ' , ϕ'' , ϕ''' , etc., va toujours en diminuant jusqu'à une limite qu'elle ne tarde pas à atteindre sensiblement.

Appelant donc Φ le dernier terme de la suite ϕ , ϕ' , ϕ'' , ..., on aura en logarithmes hyperboliques $F\phi = K \log \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi)$, ou en logarithmes vulgaires,

$$F\phi = KM l \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi) = KM \log [\operatorname{tang} \Phi + \sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 \Phi)}].$$

229. Pour avoir dans le même cas la valeur de la fonction $E\phi$, il faut recourir aux formules de l'art. 159 qui peuvent donner tel degré d'approximation qu'on voudra. Si on se borne à vingt décimales, le carré de b''' sera toujours négligeable, même en supposant l'angle du module peu au-dessus de 45° ; on pourra donc supposer $c''' = 1$, et faisant $P = \frac{4}{r' r'' r'''} - \frac{2}{r'} - 1$, on aura $E\phi = L'F\phi + Pc \sin \phi$. Dans beaucoup de cas, on pourra faire $c''' = 1$, alors on aurait simplement $P = \frac{2}{r' r''} - 1$. Quant aux valeurs de $\cos \omega'$, $\cos \omega''$, $\cos \omega'''$, par lesquelles on a $r' = c' \cos \omega'$, $r'' = c'' \cos \omega''$, $r''' = c''' \cos \omega'''$, elles se calculeront sans connaître les valeurs en degrés des angles ω , par les formules $\operatorname{tang} \omega' = b' \operatorname{tang} \phi'$, $\operatorname{tang} \omega'' = b'' \operatorname{tang} \phi''$, $\operatorname{tang} \omega''' = b''' \operatorname{tang} \phi'''$, ainsi on aura directement

$$r' = \frac{c'}{\sqrt{(1 + b'^2 \operatorname{tang}^2 \phi')}}, \quad r'' = \frac{c''}{\sqrt{(1 + b''^2 \operatorname{tang}^2 \phi'')}}, \quad r''' = \frac{c'''}{\sqrt{(1 + b'''^2 \operatorname{tang}^2 \phi''')}}.$$

230. Si on renonce au calcul par logarithmes qui devient très-pénible, lorsqu'on leur donne plus de quatorze décimales, on pourra néanmoins par le calcul arithmétique ordinaire, parvenir à tel degré d'exactitude qu'on voudra dans la détermination des fonctions E et F . Mais il y a un choix de formules à faire pour rendre le calcul le moins long qu'il est possible, dans l'hypothèse d'un degré d'approximation déterminé.

S'il est question d'abord de calculer les fonctions complètes $F'c$, $E'c$, on pourra recourir aux séries de l'art. 45, 1 p., lesquelles peuvent donner un degré d'exactitude indéfini. Mais les premières (pag. 66) ne sont bonnes à employer que lorsque le module ne surpasse pas $\sin 15^\circ$, et les secondes (pag. 68) que lorsque le module est plus grand que $\sin 75^\circ$; dans tous les autres cas, ces séries sont trop peu convergentes, et on parviendra plus facilement aux résultats cherchés par le calcul des différens termes de l'échelle des modules. Ce calcul pourra toujours se faire par les opérations ordinaires de l'Arithmétique.

231. En effet étant donné la valeur numérique du module c , on en déduira d'abord son complément $b = \sqrt{1 - c^2}$; on aura ensuite les deux termes c° , b° , par les formules $c^\circ = \frac{1-b}{1+b}$, $b^\circ = \frac{2\sqrt{b}}{1+b}$, les deux termes $c^{\circ\circ}$, $b^{\circ\circ}$, par les formules $c^{\circ\circ} = \frac{1-b^\circ}{1+b^\circ}$, $b^{\circ\circ} = \frac{2\sqrt{b^\circ}}{1+b^\circ}$, et ainsi de suite. Lorsqu'on sera parvenu à un c très-petit, le suivant désigné par c° , et son complément b° , se calculeront plus facilement par les suites convergentes

$$c^\circ = \frac{1}{4} c^2 + \frac{1.3}{4.6} c^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8} c^6 + \text{etc.}$$

$$b^\circ = 1 - \frac{7c^4}{64} \left(1 + \frac{11}{16} c^2 + \frac{11.15}{16.20} c^4 + \frac{11.15.19}{16.20.24} c^6 + \text{etc.} \right),$$

$$+ \frac{5c^4}{64} \left(1 + \frac{9}{16} c^2 + \frac{9.13}{16.20} c^4 + \frac{9.13.17}{16.20.24} c^6 + \text{etc.} \right);$$

la dernière résulte du développement de la formule.....

$$b^\circ = \frac{2\sqrt{b}}{1+b} = \frac{2}{c^2} (1 - c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{c^2} (1 - c^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Il faudra prolonger le calcul des modules c° , $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc., jusqu'à un terme dont le carré soit négligeable; soit ce terme $c^{(n)}$, la série des complémens sera de même terminée à $b^{(n)}$, ou plutôt à $b^{(n-1)}$, car dans ce cas, on pourrait supposer $b^{(n)} = 1$.

Cela posé, la fonction complète $F'c$ se calculera assez facilement par la formule

$$F'c = \frac{\pi}{2} (1 + c^\circ) (1 + c^{\circ\circ}) (1 + c^{\circ\circ\circ}) \dots (1 + c^{(n)});$$

hh

quant à la fonction complète $E'c$, elle ne paraît pas pouvoir être calculée plus simplement que par la formule

$$E'c = F'c \left(1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 c^\circ}{4} - \frac{c^2 c^\circ c^{\circ\circ}}{8} - \frac{c^2 c^\circ c^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ}}{16} - \text{etc.} \right);$$

on obtiendra de cette manière tel degré d'exactitude qu'on voudra, par le calcul de deux séries composées du moindre nombre de termes possible.

232. Supposons maintenant qu'on veuille déterminer les fonctions $F\phi$, $E\phi$ qui répondent à une amplitude donnée; il faudra d'abord déduire ϕ° de ϕ au moyen de la formule

$$\cot \phi^\circ = \frac{1}{2} (\cot \phi - \tan \phi) + \frac{1}{2} c^\circ (\cot \phi + \tan \phi),$$

dont le calcul est assez facile, pourvu qu'on connaisse à la fois $\cot \phi$ et $\tan \phi$; il faudra par la même raison déduire $\tan \phi^\circ$ de $\cot \phi^\circ$, et on calculera semblablement l'angle $\phi^{\circ\circ}$ par la formule

$$\cot \phi^{\circ\circ} = \frac{1}{2} (\cot \phi^\circ - \tan \phi^\circ) + \frac{1}{2} c^{\circ\circ} (\cot \phi^\circ + \tan \phi^\circ).$$

On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne au terme $\phi^{(n)}$ de même rang que $c^{(n)}$, et dans chacun de ces calculs, on aura soin de noter, comme il a été dit art. 225, la valeur approchée de l'arc dont on a calculé la cotangente. Connaissant donc le nombre total de degrés contenus dans le dernier terme $\phi^{(n)}$, la valeur exacte de cet arc pourra être déduite de sa tangente connue avec toute la précision nécessaire. Réduisant ensuite cet arc en parties du rayon, et faisant $\Phi = \frac{\phi^{(n)}}{2^n}$, on aura $F\phi = K\Phi$.

Il reste à calculer $E\phi$, ce qu'on fera par l'équation $E\phi = LF\phi + Pc \sin \phi$, dans laquelle on a

$$L = 1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 c^\circ}{4} - \frac{c^2 c^\circ c^{\circ\circ}}{8} - \text{etc.},$$

$$P = \frac{c}{2} \cos \omega + \frac{cc^\circ}{4} \cos \omega \cos \omega^\circ + \frac{cc^\circ c^{\circ\circ}}{8} \cos \omega \cos \omega^\circ \cos \omega^{\circ\circ} + \text{etc.};$$

d'ailleurs les angles ω , ω° , $\omega^{\circ\circ}$, etc., se déduisent des angles ϕ , ϕ° , $\phi^{\circ\circ}$, etc., par les formules $\tan \omega = b \tan \phi$, $\tan \omega^\circ = b^\circ \tan \phi^\circ$, $\tan \omega^{\circ\circ} = b^{\circ\circ} \tan \phi^{\circ\circ}$, etc.; et comme on connaît $\tan \phi$, $\tan \phi^\circ$, etc.,

$$\begin{cases} P = \frac{c}{2} \cos \omega \left(1 + \frac{c^\circ}{2} \cos \omega^\circ \left(1 + \frac{c^{\circ\circ}}{2} \cos \omega^{\circ\circ} \left(1 + \dots \right) \right) \right) \\ L = 1 - \frac{c^2}{2} \left(1 + \frac{c^\circ}{2} \left(1 + \frac{c^{\circ\circ}}{2} \left(1 + \dots \right) \right) \right) \end{cases}$$

on aura immédiatement

$$c \cos \omega = \frac{c}{\sqrt{(1 + b^2 \tan^2 \varphi)}}, \quad c^0 \cos \omega^0 = \frac{c^0}{\sqrt{(1 + b^{02} \tan^2 \varphi^0)}}, \text{ etc.}$$

Cette méthode, que nous employons ordinairement depuis $c=0$ jusqu'à $\sin 45^\circ$, peut être étendue beaucoup plus loin, jusqu'à $c=\sin 81^\circ$, parce que dans cette dernière limite les séries n'ont qu'un terme de plus que pour la limite $c=\sin 45^\circ$. Mais depuis $c=\sin 81^\circ$, jusqu'à $c=1$, la seconde méthode mérite la préférence, à raison du moindre nombre de termes dont les séries sont composées, et le calcul devra être fait comme il suit.

233. On formera d'abord la série des modules croissans c, c', c'', \dots et celle de leurs complémens b, b', b'', \dots par les mêmes formules que dans l'art. 229, ayant soin seulement d'échanger entr'elles les lettres b et c , ainsi que les signes 0 et $'$. La suite b, b', b'', \dots étant donc prolongée jusqu'à un terme $b^{(n)}$ dont le quarré soit négligeable, relativement au degré d'approximation qu'on a en vue, on aura en logarithmes hyperboliques $F'c = \frac{K}{2^n} \log \frac{4}{b^{(n)}}$, ou en logarithmes vulgaires, $F'c = \frac{KM}{2^n} \log \frac{4}{b^{(n)}}$, d'ailleurs le coefficient K a pour valeur

$$K = (1 + b') (1 + b'') (1 + b''') \dots (1 + b^{(n)});$$

on calculera en même tems la fonction $E'c$ par les formules

$$E'c = L'F'c + \frac{1}{K},$$

$$L' = \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{b'}{2} + \frac{b'b''}{4} + \frac{b'b''b'''}{8} + \text{etc.} \right).$$

Dans cette méthode, il reste à calculer le logarithme de $\frac{4}{b^{(n)}}$, avec le degré de précision requis.

Si ensuite il s'agit de calculer les fonctions $F\varphi, E\varphi$, qui répondent à une amplitude donnée, on suivra les formules de l'art. 225, lesquelles ne sont guère susceptibles d'être simplifiées, si ce n'est la formule principale qu'il convient de mettre sous la forme

$$\cot \varphi' = \frac{1+b'}{2} \cot \varphi + \sqrt{\left[\left(\frac{1+b'}{2} \right)^2 \cot^2 \varphi + b' \right]};$$

elle servira à déduire $\cot \phi'$ de $\cot \phi$; on déduira de même $\cot \phi''$ de $\cot \phi'$, et ainsi de suite.

234. En terminant ces recherches, nous croyons devoir faire observer que par la simple méthode de bisection qui n'exige que des extractions de racine quarrée, on peut calculer jusqu'à tel nombre de décimales qu'on voudra, les fonctions F et E correspondantes à des valeurs données du module et de l'amplitude.

Remarquons d'abord que pour la bisection des simples arcs de cercle, on a les formules

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} \phi &= \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin \phi)} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin \phi)}, \\ \cos \frac{1}{2} \phi &= \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin \phi)} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin \phi)};\end{aligned}$$

ainsi le sinus et le cosinus de l'arc $\frac{1}{2} \phi$ se déduisent à la fois de la valeur donnée de $\sin \phi$. Partant donc d'un sinus connu tel que $\sin 45^\circ$, $\sin 30^\circ$, ou en général $\sin \alpha$, on peut, par des bisections continues, parvenir au sinus d'un arc très-petit arc ω , qui sera sensiblement égal à l'arc; et de cet arc ou de ce sinus, on déduira la valeur de l'arc proposé $\alpha = 2^n \omega$, n étant le nombre des bisections.

On procédera d'une manière semblable pour déterminer par des bisections continues, la fonction F α dont l'amplitude est donnée. Soit en général F ϕ un terme quelconque de la bisection et F ϕ' le terme suivant, ensorte qu'on ait $F \phi' = \frac{1}{2} F \phi$, on déduira ϕ' de ϕ par la formule

$$\sin \phi' = \frac{\sin \frac{1}{2} \phi}{\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta \phi)}};$$

or on peut mettre $\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta \phi)}$ sous la forme $\frac{1}{2} \sqrt{(1 + c \sin \phi)} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - c \sin \phi)}$; ainsi on aura en général, pour déduire ϕ' de ϕ , la formule très-simple

$$\sin \phi' = \frac{\sqrt{(1 + \sin \phi)} - \sqrt{(1 - \sin \phi)}}{\sqrt{(1 + c \sin \phi)} + \sqrt{(1 - c \sin \phi)}};$$

Cette formule servira à continuer aussi loin qu'on voudra la suite des bisections; lorsqu'on sera parvenu à une valeur très-petite de $\sin \phi$, celle du terme suivant $\sin \phi'$ se trouvera plus facilement par la formule

$$\sin \phi' = \sin \frac{1}{2} \phi \left(1 + \frac{1.3}{4.6} c^2 \sin^2 \phi + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10} c^4 \sin^4 \phi + \frac{1.3 \dots 11}{4.6 \dots 14} c^6 \sin^6 \phi + \text{etc.} \right);$$

on aurait en même temps

$$\sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2} \sin \varphi \left(1 + \frac{1.3}{4.6} \sin^2 \varphi + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10} \sin^4 \varphi + \frac{1.3 \dots 11}{4.6 \dots 14} \sin^6 \varphi + \text{etc.} \right);$$

enfin si l'on fait les calculs par logarithmes, on préférera les formules suivantes dont la loi n'est pas moins simple,

$$l \sin \varphi' = l \sin \frac{1}{2} \varphi + \frac{mc^2 \sin^2 \varphi}{8} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{3.5}{4.6} \cdot \frac{c^4 \sin^4 \varphi}{3} + \frac{3.5.7}{4.6.8} \cdot \frac{c^6 \sin^6 \varphi}{4} + \text{etc.} \right),$$

$$l \sin \frac{1}{2} \varphi = l \left(\frac{1}{2} \sin \varphi \right) + \frac{m \sin^2 \varphi}{8} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2} + \frac{3.5}{4.6} \cdot \frac{\sin^4 \varphi}{3} + \frac{3.5.7}{4.6.8} \cdot \frac{\sin^6 \varphi}{4} + \text{etc.} \right).$$

Supposons qu'après un nombre n de bisections, on parvienne à un arc très-petit ω qui sera la dernière des valeurs de φ ; alors en supposant seulement ω' négligeable, on aura avec une exactitude suffisante

$$F\omega = \omega + \frac{c^2}{6} \omega^3 - \frac{c^2}{120} (4 - 9c^2) \omega^5, \quad = c^2 \omega c, \text{ p. 320}$$

$$E\omega = \omega - \frac{c^2}{6} \omega^3 + \frac{c^2}{120} (4 - 3c^2) \omega^5; \quad = c^2 \omega c, \text{ p. 320}$$

connaissant $F\omega$, on en déduira immédiatement $F\alpha = 2^n F\omega$, n étant le nombre des bisections. Quant à la valeur de $E\alpha$, elle se déduira de toutes les équations de la forme $E\varphi = 2E\varphi' - c^2 \sin^2 \varphi \sin \varphi'$, et on aura en général $E\alpha = 2^n E\omega - c^2 Z$, Z étant la somme des n termes $\sin^2 \varphi \sin \varphi' + 2 \sin^2 \varphi' \sin \varphi'' + 4 \sin^2 \varphi'' \sin \varphi''' + \text{etc.}$, formés avec toutes les valeurs de φ , en partant de la première α jusqu'à la dernière ω .

Nous n'insisterons pas davantage sur cette méthode, parce que malgré sa simplicité apparente et l'élégance des formules, la longueur des calculs qu'elle exige, la rendrait presque impraticable, dans les cas où l'on voudrait obtenir une très-grande approximation.

Les tables suivantes sont une continuation des tables données ci-dessus, pages 125—171.

La table VI donne avec quatorze décimales, l'échelle logarithmique des modules décroissans c , c° , $c^\infty \dots$, de leurs complémens b , b° , $b^\infty \dots$, et du nombre K , pour tous les angles du module

de dixième en dixième de degré, depuis $\theta = 0^\circ$ jusqu'à $\theta = 15^\circ$, et de demi-degré en demi-degré, depuis $\theta = 15^\circ$ jusqu'à $\theta = 45^\circ$; cette même table donne aussi, par un simple changement de dénominations, l'échelle logarithmique des modules croissans $c, c', c''...$, de leurs complémens $b', b'', b'''...$ et du nombre K , pour tous les angles du module de demi-degré en demi-degré, depuis $\theta = 45^\circ$ jusqu'à $\theta = 75^\circ$, et de dixième en dixième de degré, depuis $\theta = 75^\circ$ jusqu'à $\theta = 90^\circ$, ainsi qu'on l'a expliqué dans la note de la page 197.

La table VII donne la valeur de ϕ qui satisfait à l'équation $F\phi = \frac{1}{10} F'c$; cette valeur est calculée jusqu'à la septième décimale des secondes, pour tous les angles du module de dixième en dixième de degré, depuis $\theta = 0^\circ$, jusqu'à $\theta = 45^\circ$.

La table VIII donne, avec douze décimales, les valeurs des fonctions E et F dont l'amplitude est de 45° , et celles des fonctions complètes E' et F' , pour tous les angles du module de degré en degré, depuis $\theta = 0^\circ$ jusqu'à $\theta = 90^\circ$.

TABLE VI. (25.1.128.) (c=55) 323

θ	Log c , c° , c''	Log b , b° , K.	θ	Log c , c° , c''	Log b , b° , K.
0.1	7.24187 71471 0141 3.88169 49643 4326 7.16132 99373 5869	9.99999 93385 3134 9.99999 99999 9987 0.00000 03307 3427	1.5	8.41791 90153 8883 6.23392 68740 7274 1.86579 37631 9439	9.99985 11526 2321 9.99999 99936 2313 0.00007 44204 9996
0.2	7.54290 64812 9673 4.48375 56171 4014 8.36545 12429 5433	9.99999 73541 2133 9.99999 99999 9799 0.00000 13229 3833	1.6	8.44594 09034 8261 6.28999 11570 3030 1.97792 23309 8799	9.99983 06420 9626 9.99999 99917 4465 0.00008 46748 2420
0.3	7.71899 66379 0379 4.83593 92377 0134 9.06981 84840 8491	9.99999 40467 5789 9.99999 99999 8981 0.00000 29766 1596	1.7	8.47226 25656 5069 6.34265 63113 3118 2.08325 26418 5562	9.99980 88075 9979 9.99999 99894 7878 0.00009 55909 3949
0.4	7.84393 38310 8204 5.08581 82543 5080 9.56957 65174 0586	9.99998 94164 2087 9.99999 99999 6778 0.00000 52917 7345	1.8	8.49707 84317 6493 6.39231 11967 5238 2.18256 24154 0121	9.99978 56490 0069 9.99999 99867 7559 0.00010 71688 8745
0.5	7.94084 18596 7687 5.27964 02647 8658 9.95722 05383 2348	9.99998 34630 8204 9.99999 99999 2132 0.00000 82684 1964	1.9	8.52055 13689 3761 6.43928 15475 5378 2.27650 31201 9747	9.99976 11661 5773 9.99999 99835 8213 0.00011 94087 1220
0.6	8.02002 06803 2566 5.43800 51822 9180 0.27395 03734 1885	9.99997 61867 0514 9.99999 99998 3670 0.00001 19065 6583	2.0	8.54281 91638 9609 6.48384 29372 2734 2.36562 59032 8437	9.99973 53589 2158 9.99999 99798 4235 0.00013 23104 6039
0.7	8.08696 46035 6878 5.57190 16279 5900 0.54174 32648 9242	9.99996 75872 4584 9.99999 99996 9762 0.00001 62062 2589	2.1	8.56399 94221 2682 6.52623 05767 8530 2.45040 11867 4539	9.99970 82271 3490 9.99999 99754 9725 0.00014 58741 8118
0.8	8.14495 32431 6689 5.68788 88293 2234 0.77371 76678 3259	9.99995 76646 5174 9.99999 99994 8413 0.00002 11674 1620	2.2	8.58419 33262 7850 6.56664 68315 6632 2.55123 37013 2003	9.99967 97706 3202 9.99999 99704 8465 0.00016 00999 2632
0.9	8.19610 20172 3857 5.79019 76226 3414 0.97833 52547 6665	9.99994 64188 6238 9.99999 99991 7367 0.00002 67901 5565	2.3	8.60348 85584 2838 6.60526 70657 6832 2.60847 41754 6919	9.99964 99892 3947 9.99999 99647 3949 0.00017 49877 5001
1.0	8.24185 53184 2289 5.88171 67931 8966 1.16137 35963 1083	9.99993 38498 0922 9.99999 99987 4053 0.00003 30744 6566	2.4	8.62196 15999 5584 6.64224 42421 9540 2.68242 85348 6925	9.99961 88827 7550 9.99999 99581 9359 0.00019 05377 0905
1.1	8.28324 33731 9884 5.96450 67939 6620 1.32695 35984 4836	9.99991 99574 1508 9.99999 99981 5608 0.00004 00203 7020	2.5	8.63967 95616 1593 6.67771 25824 0502 2.75336 52227 0638	9.99958 64510 5027 9.99999 99507 7569 0.00020 67498 6271
1.2	8.32102 68626 9478 6.04008 89872 4104 1.47811 79857 6586	9.99990 47415 9708 9.99999 99973 8826 0.00004 76278 9559	2.6	8.65670 16544 6738 6.71179 05085 6404 2.82152 10833 8857	9.99955 26938 6587 9.99999 99424 1155 0.00022 36242 7284
1.3	8.35578 34565 4271 6.10961 87123 0194 1.61717 74368 7333	9.99988 82022 6069 9.99999 99964 0259 0.00005 58970 7095	2.7	8.67308 03830 4776 6.74458 30297 9904 2.88710 61352 4631	9.99951 76110 1615 9.99999 99330 2381 0.00024 11610 0383
1.4	8.38796 21864 7860 6.17399 40326 4584 1.74592 80788 0255	9.99987 03393 0569 9.99999 99951 6117 0.00006 48279 2774	2.8	8.68886 25214 4827 6.77618 36943 4582 2.95030 74748 3158	9.99948 12022 8696 9.99999 99225 3210 0.00025 93601 2257

TABLE VI.

θ	Log c , c° , $c^{\circ\circ}$	Log b , b° , $b^{\circ\circ}$, K.	θ	Log c , c° , $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$	Log b , b° , $b^{\circ\circ}$, K.
2°9	8.70408 99180 3281 6.80667 61989 8766 3.01129 24957 9437	9.99944 34674 5598 9.99999 99108 5299 0.00027 82216 9851	4°1	8.85429 05182 7596 7.10763 32107 9516 3.61320 67867 3074 6.62435 35821 5356	9.99888 71214 9189 9.99999 96435 3154 9.99999 99999 9996 0.00055 62610 1981
3.0	8.71880 01636 7602 6.83613 57255 3124 3.07021 15618 3457	9.99940 44062 9272 9.99999 98978 9994 0.00029 77458 0361	4.2	8.86473 76449 2571 7.12858 23899 8402 3.65510 51812 1215 6.70815 03710 9638	9.99883 21233 9510 9.99999 96074 2785 9.99999 99999 9996 0.00058 37420 1635
3.1	8.73302 71503 9255 6.86463 00580 6552 3.12720 02412 1957	9.99936 40185 5864 9.99999 98835 8350 0.00031 79325 1243	4.3	8.87493 80616 2574 7.14903 94739 8008 3.69601 93880 0396 6.78997 87846 8002	9.99877 57952 2670 9.99999 95686 4613 9.99999 99999 9994 0.00061 18867 0969
3.2	8.74680 15412 4285 6.89222 05227 7270 3.18258 11864 0650	9.99932 23040 0690 9.99999 98678 1093 0.00033 87819 0201	4.4	8.88490 30925 7450 7.16902 71112 9296 3.73599 47042 0103 6.86992 94170 7416	9.99871 81366 4168 9.99999 95270 5680 9.99999 99999 9994 0.00064 06952 0753
3.3	8.76015 11679 1134 6.91896 27850 8536 3.23586 57243 5611	9.99927 92623 8263 9.99999 98504 8663 0.00036 02940 5200	4.5	8.89464 32984 0645 7.18856 64232 5250 3.77507 33726 4982 6.94808 67539 7175	9.99865 91472 8658 9.99999 94825 2707 9.99999 99999 9992 0.00067 01676 2021
3.4	8.77310 15089 1446 6.94490 75161 0180 3.28775 52093 6381 5.97345 04273 9967	9.99923 48934 2278 9.99999 98315 1181 9.99999 99999 9999 0.00038 24690 4451	4.6	8.90416 85433 3183 7.20767 71383 7782 3.81329 48505 0644 7.02452 97096 8500	9.99859 88268 0000 9.99999 94349 2106 9.99999 99999 9991 0.00070 03040 6048
3.5	8.78567 52787 7168 6.97010 09909 2856 3.33814 21797 4454 6.07422 43681 6113	9.99918 91968 5603 9.99999 98107 8460 9.99999 99999 9999 0.00040 53069 6428	4.7	8.91348 80550 5718 7.22637 77121 7400 3.85069 60489 2002 7.09933 21065 1219	9.99853 71748 1200 9.99999 95840 9980 9.99999 99999 9989 0.00073 11046 4385
3.6	8.79789 40764 2960 6.99458 55655 2848 3.38711 13515 2882 6.17216 27117 2970	9.99914 21724 0306 9.99999 97882 0015 9.99999 99999 9999 0.00042 88078 9854	4.8	8.92261 04783 9532 7.24468 54343 6068 3.88731 15474 7188 7.17256 31036 1592	9.99847 41909 4453 9.99999 95299 2126 9.99999 99999 9987 0.00076 25694 8830
3.7	8.80977 71996 4293 7.01840 01154 8258 3.43474 04759 8670 6.26742 09606 4545	9.99909 58197 7626 9.99999 97636 5047 9.99999 99999 9998 0.00045 29719 3710	4.9	8.93154 39233 4785 7.26261 65250 3686 3.92317 37865 0528 7.24428 75816 8275	9.99840 98748 1123 9.99999 92722 4018 9.99999 99999 9985 0.00079 46987 1440
3.8	8.82134 25307 5952 7.04158 04055 5976 3.48110 10827 6708 6.36014 21742 0621	9.99904 41586 7981 9.99999 97370 2444 9.99999 99999 9998 0.00047 77991 7231	5.0	8.94029 60083 3018 7.28018 62211 3132 3.95831 32400 2611 7.31456 64887 2444	9.99834 42260 1750 9.99999 92109 0821 9.99999 99999 9982 0.00082 74924 4527
3.9	8.83260 65583 6853 7.06415 94130 1530 3.52625 91264 9462 6.45045 82616 6129	9.99899 31288 0975 9.99999 97082 0793 9.99999 99999 9997 0.00050 32896 9910	5.1	5.94887 38991 1553 7.29740 88542 9054 3.99275 85714 7882 7.38345 71516 2989	9.99827 72441 6032 9.99999 91457 7388 9.99999 99999 9979 0.00086 09508 0668
4.0	8.84358 45184 8165 7.08616 76099 4902 3.57027 55514 8623 6.53849 11116 4452	9.99894 07898 5391 9.99999 96770 8379 9.99999 99999 9997 0.00052 94436 1493			

TABLE VI.

θ .	Log c , c° , c'' , c''' .	Log b , b° , b'' , b''' , K.	θ .	Log c , c° , c'' , c''' .	Log b , b° , b'' , b''' , K.
5.2	8.95728 43439 9723 7.31429 79212 0302 4.02653 67743 9513 7.45101 35574 6255	9.99820 89288 2839 9.99999 90766 8246 9.99999 99999 9975 0.00089 50739 2691	6.3	9.04034 24415 0061 7.48125 15830 7042 4.36044 51666 7363 8.11883 03420 2044	9.99736 93248 7677 9.99999 80081 3697 9.99999 99999 9886 0.00131 43416 2953
5.3	8.96553 37056 0184 7.33086 61472 2612 4.05967 32996 4742 7.51728 66079 6717	9.99813 92796 0217 9.99999 90034 7629 9.99999 99999 9971 0.00092 98619 3692	6.4	9.04715 38409 1373 7.49495 84744 7190 4.58785 90792 6150 8.17365 81671 9633	9.99728 49727 3110 9.99999 78783 5175 9.99999 99999 9870 0.00135 64528 0968
5.4	8.97362 79897 2789 7.34712 55440 6322 4.03219 21707 8325 7.58232 43502 3887	9.99806 82960 5373 9.99999 89259 9456 9.99999 99999 9967 0.00096 53149 7025	6.5	9.05385 87563 7394 7.50845 37250 3960 4.41484 97164 3681 8.22763 94415 4713	9.99719 92810 0333 9.99999 77423 1150 9.99999 99999 9853 0.00139 92306 5335
5.5	8.98157 28715 3959 7.36308 74621 5034 4.12411 60888 9901 7.64617 21864 7044	9.99799 59777 4684 9.99999 88440 7294 9.99999 99999 9962 0.00100 14331 6286	6.6	9.06046 04259 5795 7.52174 38110 5742 4.44143 00309 6647 8.28080 00706 0664	9.99711 22491 6471 9.99999 75998 1710 9.99999 99999 9834 0.00144 26753 2536
5.6	8.98937 37193 9921 7.37876 26583 2262 4.15546 65277 7185 7.70887 30642 1618	9.99792 23242 3692 9.99999 87575 4454 9.99999 99999 9956 0.00103 82166 5359	6.7	9.06696 19416 5009 7.53483 49166 2654 4.46761 23912 5516 8.33316 47911 8423	9.99702 38766 7812 9.99999 74506 6622 9.99999 99999 9813 0.00148 67869 9312
5.7	8.99703 56165 9042 7.39416 12392 5920 4.18626 38209 5077 7.77046 76505 7409	9.99784 73350 7097 9.99999 86662 3864 9.99999 99999 9949 0.00107 56655 8358	6.8	9.07336 62580 0122 7.54773 29509 8336 4.49340 86159 8124 8.38475 72406 3663	9.99693 41629 9773 9.99999 72946 5331 9.99999 99999 9789 0.00153 15658 2674
5.8	9.00456 33811 5277 7.40929 29011 5366 4.21652 72409 9631 7.83099 44906 6525	9.99777 10097 8766 9.99999 85699 8187 9.99999 99999 9941 0.00111 37800 9681	6.9	9.07967 62001 5396 7.56044 35645 4988 4.51883 00061 9742 8.43560 00210 6926	9.99684 31075 6936 9.99999 71315 6964 9.99999 99999 9763 0.00157 70119 9896
5.9	9.01196 15840 1942 7.42416 67659 8844 4.24627 50720 5014 7.89049 01527 7300	9.99769 33479 1730 9.99999 84685 9743 9.99999 99999 9933 0.00115 25603 3973	7.0	9.08589 44712 9169 7.57297 21638 3130 4.54388 73751 2625 8.48571 47589 2720	9.99675 07098 3027 9.99999 69612 0307 9.99999 99999 9734 0.00162 31256 8507
6.0	9.01923 45656 3272 7.43879 15147 6660 4.27552 46762 9821 7.94898 93612 6923	9.99761 43489 8185 9.99999 83619 0549 9.99999 99999 9923 0.00119 20064 6143	7.1	9.09202 36595 5880 7.58532 39252 5720 4.56859 10758 4213 8.53512 21603 5928	9.99665 69692 0915 9.99999 67833 3835 9.99999 99999 9702 0.00166 99070 6311
6.1	9.02638 64511 8408 7.45317 53979 9104 4.30429 25549 2968 8.00652 51185 3227	9.99753 40124 9452 9.99999 82497 2268 9.99999 99999 9912 0.00123 21186 1364	7.2	9.09806 62444 9664 7.59750 38080 5308 4.59295 10270 1455 8.58384 20627 0448	9.99656 18851 2621 9.99999 65977 5698 9.99999 99999 9667 0.00171 73563 1372
6.2	9.03342 11646 1518 7.46732 62636 6784 4.33259 44041 4267 8.06312 88169 5838	9.99745 23379 6064 9.99999 81318 6304 9.99999 99999 9900 0.00127 28969 5070	7.3	9.10402 46030 3642 7.60951 65662 2608 4.61697 67368 7966 8.63189 34824 3507	9.99646 54569 9300 9.99999 64042 3710 9.99999 99999 9628 0.00176 54736 2019

θ	Log c , c° , c'' , c'''	Log b , b° , b'' , b''' , K.	θ	Log c , c° , c'' , c'''	Log b , b° , b'' , b''' , K.
7.4	9.10990 10150 8317 7.62136 67597 3334 4.64067 73255 7666 8.67929 46598 2952	9.99636 76842 1255 9.99999 62025 5376 9.99999 99999 9585 0.00181 42591 6853	8.5	9.16970 20867 7564 7.74212 76798 5840 4.88220 19907 7715 9.16234 39902 3896	9.99520 32575 3781 9.99999 33775 8644 9.99999 99999 8758 0.00239 50600 1801
7.5	9.11569 76687 2611 7.63305 87649 0210 4.66406 15459 8844 8.72606 31006 5352	9.99626 85661 7928 9.99999 59924 7856 9.99999 99999 9538 0.00186 37131 4733	8.6	9.17474 38525 1642 7.75232 45327 9808 4.90259 60150 5311 9.20313 20387 9213	9.99508 92992 8151 9.99999 30591 8736 9.99999 99999 8613 0.00245 18799 4599
7.6	9.12141 66651 0311 7.64459 67841 5902 4.68713 78031 9992 8.77221 56150 7702	9.99616 81022 7900 9.99999 57737 7988 9.99999 99999 9486 0.00191 38357 4787	8.7	9.17972 64511 3002 7.76240 43818 9940 4.92275 60430 4211 9.24345 20947 7148	9.99497 39878 2928 9.99999 27293 9830 9.99999 99999 8478 0.00250 93707 7690
7.7	9.12706 00229 4778 7.65598 48551 2436 4.70991 41726 8650 8.81776 83540 5075	9.99606 62918 8892 9.99999 55462 2284 9.99999 99999 9429 0.00196 46271 6411	8.8	9.18465 12248 8016 7.77236 99118 6564 4.94268 74444 2216 9.28331 48975 3303	9.99485 73224 6234 9.99999 23879 4781 9.99999 99999 8532 0.00256 75327 3440
7.8	9.13262 96828 4226 7.66722 68591 1756 4.73239 84173 2522 8.86273 68433 2881	9.99596 31343 7755 9.99999 53095 6927 9.99999 99999 9367 0.00201 60875 9270	8.9	9.18951 94705 2635 7.78222 37163 9366 4.96239 54068 6184 9.32273 08224 1398	9.99473 93024 5307 9.99999 20345 6099 9.99999 99999 8174 0.00262 63660 4483
7.9	9.13812 75112 0056 7.67832 65291 2372 4.75459 80033 2778 8.90713 60153 3461	9.99585 86291 0479 9.99999 50635 7767 9.99999 99999 9299 0.00206 82172 3294	9.0	9.19433 24413 5701 7.79196 83022 3974 4.98188 49441 5219 9.36170 98969 9640	9.99461 99270 6508 9.99999 16689 5938 9.99999 99999 8002 0.00268 58709 3716
8.0	9.14355 53039 9954 7.68928 74572 5548 4.77652 01151 6436 8.95098 02390 0852	9.99575 27754 2188 9.99999 48080 0312 9.99999 99999 9224 0.00212 10162 8674	9.1	9.19909 13491 1137 7.80160 60930 6418 5.00116 09038 9556 9.40026 18164 8500	9.99449 91955 5295 9.99999 12908 6117 9.99999 99999 7817 0.00274 60476 4320
8.1	9.14891 47902 8000 7.70011 31017 5596 4.79817 16695 6921 8.99428 33478 1902	9.99564 55726 7130 9.99999 45425 9761 9.99999 99999 9143 0.00217 44849 5887	9.2	9.20379 73657 9581 7.81113 94330 6366 5.02022 79747 7042 9.43839 59582 3672	9.99437 71071 6254 9.99999 08999 8127 9.99999 99999 7617 0.00280 68963 9745
8.2	9.15420 76354 3183 7.71080 67935 6814 4.81955 93286 7974 9.03705 86660 4098	9.99553 70201 8688 9.99999 42671 0966 9.99999 99999 9054 0.00222 86234 5666	9.3	9.20845 16254 0201 7.82057 05904 0762 5.03909 06934 0413 9.47612 13955 0629	9.99425 36611 3076 9.99999 04960 3116 9.99999 99999 7400 0.00286 84174 3720
8.3	9.15943 54442 7955 7.72137 17425 0638 4.84068 95123 7949 9.07931 90334 4145	9.99542 71172 9367 9.99999 39812 8446 9.99999 99999 8957 0.00228 34319 9018	9.4	9.21305 52255 3316 7.82990 17604 9036 5.05775 34508 7732 9.51344 69104 5501	9.99412 88566 8556 9.99999 00787 1878 9.99999 99999 7167 0.00293 06110 0244
8.4	9.16459 97639 8479 7.73181 10430 6122 4.86156 84099 0765 9.12107 68284 9881	9.99531 58633 0815 9.99999 36848 6388 9.99999 99999 8852 0.00233 89107 7212	9.5	9.21760 92289 4481 7.83913 50690 1310 5.07622 04988 8784 9.55038 10064 7857	9.99400 26930 4597 9.99998 96477 4870 9.99999 99999 6915 0.00299 34773 3594

TABLE VI.

θ .	Log c , c° , c'' , c''' .	Log b , b° , b'' , b''' , K.	θ .	Log c , c° , c'' , c''' .	Log b , b° , b'' , b''' , K.
9° 6	9.22211 46650 0383 7.84827 25749 0158 5.09449 59555 8613 9.58693 19198 7786	9.99387 51694 2204 9.99998 92028 2196 9.99999 99999 6645 0.00305 70166 8318	10° 7	9.26873 38205 0210 7.94299 18310 9508 5.28394 03721 7093 9.96582 07530 9419	9.99238 24156 4256 9.99998 32985 3070 9.99999 99999 1972 0.00380 04414 0393
9.7	9.22657 25310 7278 7.85731 62730 7520 5.11258 38111 1313 9.62310 76309 3477	9.99374 62850 1494 9.99998 87436 3627 9.99999 99999 6353 0.00312 12292 9243	10.8	9.27272 62814 4560 7.95111 93873 4832 5.30019 61216 5197 9.99833 22520 6250	9.99223 85073 0224 9.99998 26615 4366 9.99999 99999 1347 0.00387 20770 7745
9.8	9.23098 37938 2306 7.86626 80970 7324 5.13048 79328 5345 9.65891 58744 1854	9.99361 60390 1665 9.99998 82698 8587 9.99999 99999 6040 0.00318 61154 1481	10.9	9.27668 10629 1067 7.95917 29194 0254 5.31630 38408 9435 0.03054 76905 5393	9.99209 32278 8363 9.99998 20063 9640 9.99999 99999 0681 0.00394 43892 0979
9.9	9.23534 93904 8089 7.87512 99215 4626 5.14821 20704 1724 9.69436 21495 4949	9.99348 44306 1031 9.99998 77812 6138 9.99999 99999 5703 0.00325 16753 0405	11.0	9.28059 88449 5041 7.96715 37875 8550 5.33226 62509 0163 0.06247 25105 7560	9.99194 65764 6900 9.99998 13327 4082 9.99999 99998 9970 0.00401 73780 8576
10.0	9.23967 02300 1167 7.88390 35646 2536 5.16575 98603 7962 9.72945 97294 7787	9.99335 14589 6992 9.99998 72774 4996 9.99999 99999 5341 0.00331 79092 1672	11.1	9.28448 02891 5219 7.97506 33152 9490 5.34808 59988 2110 0.09411 20064 2211	9.99179 85521 3150 9.99998 06402 2499 9.99999 99998 9212 0.00409 10439 9281
10.1	9.24394 71942 4392 7.89259 07901 7040 5.18313 48307 7643 9.76420 96702 7536	9.99321 71232 6043 9.99998 67581 3548 9.99999 99999 4953 0.00338 48174 1229	11.2	9.28832 60393 0011 7.98290 27903 2458 5.36376 56605 9567 0.12547 13299 7933	9.99164 91539 3493 9.99997 99284 9362 9.99999 99998 8405 0.00416 53872 2137
10.2	9.24818 11389 3983 7.90119 33099 1042 5.20034 04053 8539 9.79862 08194 9746	9.99308 14226 3771 9.99998 62229 9822 9.99999 99999 4537 0.00345 24001 5294	11.3	9.29213 67220 0829 7.99067 34661 3030 5.37930 77434 9583 0.15655 54957 8827	9.99149 83809 3370 9.99997 91971 8769 9.99999 99998 7544 0.00424 04080 6472
10.3	9.25237 28948 1138 7.90971 27854 7592 5.21737 99077 9086 9.83269 98243 1285	9.99294 43562 4856 9.99998 56717 1484 9.99999 99999 4091 0.00352 06577 0360	11.4	9.29591 29473 2537 7.99837 65630 3890 5.39471 46885 3785 0.18736 93858 8146	9.99134 62321 7299 9.99997 84459 4456 9.99999 99998 6628 0.00431 61068 1892
10.4	9.25652 32684 8960 7.91815 08303 3768 5.23425 65652 6116 9.86645 31392 5823	9.99280 59232 3057 9.99998 51039 5851 9.99999 99999 3613 0.00358 95903 3204	11.5	9.29965 53093 1415 8.00601 32694 0774 5.40998 88728 0267 0.21791 77544 2088	9.99119 27066 8845 9.99997 76743 9792 9.99999 99998 5654 0.00439 24837 8301
10.5	9.26063 30434 4538 7.92650 90116 4828 5.25097 35124 3180 9.89988 70336 0462	9.99266 61227 1221 9.99998 45193 9884 9.99999 99999 3102 0.00365 91983 0883	11.6	9.30336 43866 0441 8.01358 47427 3022 5.42513 26116 4698 0.24820 52321 1983	9.99103 78035 0634 9.99997 68821 7785 9.99999 99998 4618 0.00446 95392 5884
10.6	9.26470 29808 6799 7.93478 88519 9934 5.26753 37948 1974 9.93300 75983 8596	9.99252 49538 1287 9.99998 39177 0209 9.99999 99999 2556 0.00372 94819 0739	11.7	9.30704 07429 2267 8.02109 21106 9518 5.44014 81608 2204 0.27823 63304 8096	9.99088 15216 4357 9.99997 60689 1069 9.99999 99998 3516 0.00454 72735 5114

θ	Log c , c° , c'' , c'''	Log b , b° , b'' , b''' , K.	θ	Log c , c° , c'' , c'''	Log b , b° , b'' , b''' , K.
11.8	9.31068 49276 0070 8.02853 64722 0424 5.45503 77185 0827 0.30801 54458 6511	9.99072 38601 0753 9.99997 52342 1917 9.99999 99998 2346 0.00462 56869 6755	12.9	9.34879 16932 3968 8.10655 42177 6052 5.61108 39164 9361 0.62010 78420 2145	9.98889 82313 4150 9.99996 45269 7511 9.99999 99996 3782 0.00553 31476 3572
11.9	9.31429 74760 6010 8.03591 88983 4048 5.46980 34272 5292 0.33754 68633 6683	9.99056 48178 9610 9.99997 43777 2217 9.99999 99998 1104 0.00470 47798 1856	13.0	9.35208 80330 4125 8.11331 89507 4122 5.62461 45049 7851 0.64716 90190 1452	9.98872 39328 2340 9.99996 34044 0504 9.99999 99996 1454 0.00561 97355 9809
12.0	9.31787 89102 7855 8.04324 04333 0174 5.48444 73758 3608 0.36683 47605 4644	9.99040 43939 9773 9.99997 34990 3516 9.99999 99997 9786 0.00478 45524 1765	13.1	9.35535 82286 2733 8.12003 27354 0170 5.63804 32234 9026 0.67402 64560 6261	9.98854 82408 5514 9.99996 22551 6507 9.99999 99995 8995 0.00570 70069 4994
12.1	9.32142 97392 3600 8.05050 20952 9244 5.49897 16010 5484 0.39588 32109 9784	9.99024 25873 9128 9.99997 25977 6984 9.99999 99997 8388 0.00486 50050 8122	13.2	9.35860 26707 8664 8.12669 63535 8648 5.65137 16361 4797 0.70068 32814 0399	9.98837 11543 0886 9.99996 10788 2501 9.99999 99995 6399 0.00579 49620 4007
12.2	9.32495 04593 4258 8.05770 48773 7912 5.51337 80894 3446 0.42469 61877 7191	9.99007 93970 4593 9.99997 16735 3393 9.99999 99997 6905 0.00494 61381 2853	13.3	9.36182 17414 5723 8.13331 05694 4122 5.66460 12716 7692 0.72714 25524 8928	9.98819 26720 4679 9.99995 98749 5075 9.99999 99995 3660 0.00588 36012 2028
12.3	9.32844 15548 4876 8.06484 97483 1088 5.52766 87788 6906 0.45327 75666 5682	9.98991 48219 2154 9.99997 07259 3143 9.99999 99997 5334 0.00502 79518 8162	13.4	9.36501 58139 9219 8.13987 61299 4394 5.67773 36244 7097 0.75340 72581 0627	9.98801 27929 2122 9.99995 86431 0437 9.99999 99995 0771 0.00597 29248 4543
12.4	9.33190 34982 3980 8.07193 76533 0908 5.54184 55602 0083 0.48163 11293 3700	9.98974 88609 6812 9.99996 97545 6278 9.99999 99997 3670 0.00511 04466 6568	13.5	9.36818 52534 1441 8.14639 37654 1454 5.69077 01556 1148 0.77948 03204 1775	9.98783 15157 7460 9.99995 73828 4414 9.99999 99994 7725 0.00606 29332 7340
12.5	9.33533 67506 1310 8.07896 95148 2124 5.55591 02787 2816 0.50976 05664 0927	9.98958 15131 2607 9.99996 87590 2453 9.99999 99997 1909 0.00519 36228 0877	13.6	9.37133 04166 6293 8.15286 41900 0698 5.70371 22938 5208 0.80536 45969 3105	9.98764 88394 3934 9.99995 60937 2421 9.99999 99994 4515 0.00615 36268 6501
12.6	9.33874 17620 4136 8.08594 62332 4768 5.56986 47356 5870 0.53766 94802 8900	9.98941 27773 2624 9.99996 77389 0958 9.99999 99997 0044 0.00527 74806 4189	13.7	9.37445 16528 2963 8.15928 81021 8330 5.71656 14365 6639 0.83106 28823 9349	9.98746 47627 3780 9.99995 47752 9490 9.99999 99994 1132 0.00624 50059 8421
12.7	9.34211 89719 2141 8.09286 86876 3890 5.58371 06895 0446 0.56536 13880 0025	9.98924 26524 8958 9.99996 66938 0681 9.99999 99996 8072 0.00536 20204 9897	13.8	9.37754 93033 8730 8.16566 61851 6920 5.72931 89506 5933 0.85657 79106 1501	9.98727 92844 8246 9.99995 34271 0251 9.99999 99993 7570 0.00633 70709 9788
12.8	9.34546 88093 0881 8.09973 77363 6526 5.59744 98574 2075 0.59282 97238 5368	9.98907 11375 2747 9.99996 56233 0154 9.99999 99996 5986 0.00544 72427 1696	13.9	9.38062 37024 1024 8.17199 91073 9592 5.74198 61734 5074 0.88191 23562 3532	9.98709 24034 7568 9.99995 20486 8954 9.99999 99993 3820 0.00642 98222 7603

TABLE VI.

θ .	Log c , c° , c'' , c''' .	Log b , b° , b'' , b''' , K.	θ .	Log c , c° , c'' , c''' .	Log b , b° , b'' , b''' , K.
14.0	9.38367 51767 8594 8.17828 75229 2284 5.75456 44135 2093 0.90706 88364 1517	9.98690 41185 0959 9.99995 06395 9426 9.99999 99992 9873 0.00652 32601 9170	15.5	9.42689 88240 2170 8.26767 81304 6256 5.93337 07713 4354 1.26468 15529 5682	9.98391 05163 6931 9.99992 54950 5821 9.99999 99984 0230 0.00800 74885 4560
14.1	9.38670 40464 1969 8.18453 20718 4738 5.76705 49515 3004 0.93204 99124 7490	9.98671 44283 6642 9.99994 91993 5119 9.99999 99992 5721 0.00661 73851 2099	16.0	9.44033 80750 8540 8.29560 50571 5532 5.98923 48511 8188 1.37640 97131 0225	9.98284 16370 2333 9.99991 52676 6791 9.99999 99979 3355 0.00853 68142 8906
14.2	9.38971 06244 3193 8.19073 33806 9930 5.77945 90410 0699 0.95685 80914 7247	9.98652 33318 1809 9.99994 77274 9074 9.99999 99992 1355 0.00671 21974 4310	16.5	9.45304 18046 2526 8.32269 46675 8700 6.04342 53315 5839 1.48479 06744 4100	9.98173 69643 0211 9.99990 40069 8327 9.99999 99973 4781 0.00908 35200 1449
14.3	9.39269 52173 4906 8.19689 20628 2224 5.79177 79091 1259 0.98149 58277 2959	9.98633 08276 2634 9.99994 62235 3921 9.99999 99991 6764 0.00680 76975 4026	17.0	9.46593 53399 7743 8.34899 76584 7566 6.09604 36761 1722 1.59002 73642 8590	9.98059 63156 4586 9.99989 16427 4731 9.99999 99966 2058 0.00964 76618 6102
14.4	9.39565 81252 8683 8.20300 87187 4086 5.80401 27573 7357 1.00596 55242 9978	9.98613 69145 4281 9.99994 46870 1898 9.99999 99991 1940 0.00690 38857 9779	17.5	9.47814 18041 1781 8.37456 03191 8598 6.14718 25365 6510 1.69230 50860 7904	9.97941 95015 7227 9.99987 81019 2530 9.99999 99957 2319 0.01022 92980 3811
14.5	9.39859 96421 2791 8.20908 39365 1594 5.81616 47623 9298 1.03026 95343 8929	9.98594 15913 0865 9.99994 31174 4836 9.99999 99990 6871 0.00700 07626 0421	18.0	9.48998 23640 8607 8.39942 50285 8386 6.19692 67464 4173 1.79179 35069 3335	9.97820 63255 4501 9.99986 33086 4235 9.99999 99946 2216 0.01082 84888 5975
14.6	9.40152 00556 9340 8.21511 82920 8684 5.82823 50765 3520 1.05441 01627 2697	9.98574 48566 5495 9.99994 15143 4147 9.99999 99990 1548 0.00709 83283 5100	18.5	9.50147 64453 6292 8.42363 06837 9836 6.24535 41787 0707 1.88864 83728 0763	9.97695 65838 3711 9.99984 71841 1880 9.99999 99932 7855 0.01144 52967 8012
14.7	9.40441 96479 0785 8.22111 23496 0242 5.84022 48285 8753 1.07838 96668 8751	9.98554 67093 0239 9.99993 98772 0854 9.99999 99989 5959 0.00719 65834 3287	19.0	9.51264 19176 5476 8.44721 30717 9768 6.29253 64889 6026 1.98301 29949 4527	9.97567 00653 8733 9.99982 96466 0173 9.99999 99916 4729 0.01207 97864 3084
14.8	9.40729 86949 5970 8.22706 66617 4124 5.85213 51244 0086 1.10221 02585 7283	9.98534 71479 6125 9.99993 82055 5553 9.99999 99989 0093 0.00729 55282 4760	19.5	9.52349 52565 3965 8.47020 51926 8922 6.33853 97621 0878 2.07501 95432 1326	9.97434 65516 5086 9.99981 06112 9437 9.99999 99896 7634 0.01273 20246 5992
14.9	9.41015 74674 5557 8.23298 17700 2038 5.86396 70475 0719 1.12587 41048 4704	9.98514 61713 3155 9.99993 64988 8438 9.99999 99988 3938 0.00739 51631 9610	20.0	9.53405 16846 4555 8.49263 75420 8350 6.38342 50771 6908 2.16479 01757 0438	9.97298 58164 4290 9.99978 99902 8161 9.99999 99873 0582 0.01340 20805 7227
15.0	9.41299 62305 6937 8.23885 82050 9366 5.87572 16597 1624 1.14938 33293 2969	9.98494 37781 0267 9.99993 47566 9278 9.99999 99987 7483 0.00749 54886 8247	20.5	9.54432 52953 9244 8.51453 83585 8648 6.42724 90023 2652 2.25243 80288 5797	9.97158 76257 7583 9.99976 76924 5270 9.99999 99844 6711 0.01409 00255 7199

θ	Log c , c° , c'' , c'''	Log b , b° , b'' , b''' , K.	θ	Log c , c° , c'' , c'''	Log b , b° , b'' , b''' , K.
21.0	9.55432 91618 2157 8.53593 38414 6634 6.47006 40303 4811 2.33806 80882 8657	9.97015 17376 8881 9.99974 36234 1999 9.99999 99810 1831 0.01479 59334 0644	26.5	9.64952 74374 0309 8.74386 65326 2306 6.88634 14003 1534 3.17062 29379 6085	9.95179 11834 2827 9.99933 14162 8655 9.99999 98713 4187 0.02377 00521 0008
21.5	9.56407 54326 1623 8.55684 83427 0370 6.51191 89627 6480 2.42177 79571 4158	9.96867 79020 7033 9.99971 76854 3477 9.99999 99770 6006 0.01551 98802 1225	27.0	9.65704 67648 5299 8.76070 74752 7962 6.92007 72481 8060 3.23809 46553 1593	9.94988 08840 6900 9.99927 74104 8530 9.99999 98497 1731 0.02469 81880 6681
22.0	9.57357 54170 8339 8.57730 45369 6282 6.55285 92498 9995 2.50365 85361 7150	9.96716 58604 7322 9.99968 97772 9861 9.99999 99723 0044 0.01626 19445 6292	27.5	9.66440 55998 0202 8.77726 24127 6060 6.95324 44198 0627 3.30442 92033 6732	9.94792 89239 5886 9.99922 00642 2149 9.99999 98249 1726 0.02564 54825 8994
22.5	9.58283 96605 8310 8.59732 35724 6080 6.59292 72926 9663 2.58379 46273 7793	9.96561 53459 2094 9.99965 97942 7175 9.99999 99666 8737 0.01702 22075 1909	28.0	9.67160 92909 5951 8.79354 21165 5270 6.98586 46084 2298 3.36966 94289 8020	9.94593 49268 9848 9.99915 92264 3006 9.99999 97965 3780 0.02661 20480 3469
23.0	9.59187 80116 6658 8.61692 52052 5140 6.63216 27113 7887 2.66226 54713 3960	9.96402 60827 0645 9.99962 76279 7632 9.99999 99600 9018 0.01780 07526 8003	28.5	9.67866 29015 4139 8.80955 67887 3302 7.01795 83733 7122 3.43385 69912 8369	9.94389 85050 7857 9.99909 47410 2839 9.99999 97641 3076 0.02759 80000 4028
23.5	9.60069 96819 9343 8.63612 79190 7038 6.67060 25852 3879 2.73914 52267 8829	9.96239 77861 8189 9.99959 31662 9669 9.99999 99523 6134 0.01859 76652 3807	29.0	9.68557 12291 0054 8.82531 61016 3852 7.04954 52195 9269 3.49703 07206 5779	9.94181 92587 4572 9.99902 64467 5556 9.99999 97271 9958 9.99999 99999 9998
24.0	9.60931 32999 4026 8.65494 90325 6164 6.70828 16671 9041 2.81450 33997 1823	9.96073 01625 3927 9.99955 62932 7418 9.99999 99433 3463 0.01941 30370 3477	29.5	9.69233 88236 6248 8.84082 92341 5132 7.08064 36703 6049 3.55922 76641 9822	9.93969 67758 5305 9.99895 41770 0368 9.99999 96851 9475 9.99999 99999 9997
24.5	9.61772 69586 7965 8.67340 47954 4530 6.74523 25762 1098 2.88840 52282 7084	9.95902 29085 8202 9.99951 68889 9799 9.99999 99328 2317 0.02024 69566 1957	30.0	9.69897 00043 3602 8.85610 49049 3328 7.11127 13339 1388 3.62048 30389 9082	9.93753 06316 9585 9.99887 77596 4252 9.99999 96375 0890 9.99999 99999 9996
25.0	9.62594 82594 0315 8.69151 04749 7406 6.78148 59703 6354 2.96091 20287 8193	9.95727 57114 8638 9.99947 48294 9105 9.99999 99206 1716 0.02109 95193 1092	30.5	9.70546 88745 5072 8.87115 14029 1484 7.14144 49646 0865 3.68083 03544 1768	9.93532 03885 3102 9.99879 70168 3619 9.99999 95834 7156 9.99999 99999 9995
25.5	9.63398 43502 6242 8.70928 04338 2640 6.81707 07026 9739 3.03208 15075 8495	9.95548 82485 5286 9.99942 99865 9119 9.99999 99064 8187 0.02197 08222 6010	31.0	9.71183 93360 5499 8.88597 66153 0478 7.17118 05191 1716 3.74030 15245 6288	9.93306 55951 7951 9.99871 17648 5113 9.99999 95223 4335 9.99999 99999 9993
26.0	9.64184 19615 2863 8.72672 82004 3570 6.85201 39620 2574 3.10196 80425 6904	9.95366 01869 4693 9.99938 22278 2667 9.99999 98901 5448 0.02286 09655 1711		6.87854 30577 9787	0.03282 28460 0745

TABLE VI.

θ	$\text{Log } c, c^{\circ}, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ\circ}$	$\text{Log } b, b^{\circ}, b^{\circ\circ}, b^{\circ\circ\circ}, K.$	θ	$\text{Log } c, c^{\circ}, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ\circ}$	$\text{Log } b, b^{\circ}, b^{\circ\circ}, b^{\circ\circ\circ}, K.$
31.5	9.71808 51017 9397 8.90058 80533 5926 7.20049 32081 5502 3.79892 69716 7210 6.99579 39520 1633	9.93076 57866 1105 9.99862 18138 5517 9.99999 94533 0981 9.99999 99999 9991 0.03392 77402 7692	36.0	9.76921 86852 9506 9.02355 20770 8212 7.44747 45817 8406 4.29289 08771 6312 7.98372 17629 9912	9.90795 76445 8597 9.99756 61712 0297 9.99999 82950 7537 9.99999 99999 9916 0.04480 34108 4577
32.0	9.72420 97077 7271 8.91499 28761 2414 7.22939 75441 6128 3.85673 57215 1967 7.11141 14517 1148	9.92842 04835 1024 9.99852 69677 0846 9.99999 93754 7471 9.99999 99999 9989 0.03505 29298 3641	36.5	9.77438 75973 2607 9.03637 10496 4886 7.47326 09836 8310 4.34446 38959 3432 8.08686 78005 4174	9.90517 87226 5581 9.99741 72844 9025 9.99999 80801 0179 9.99999 99999 9894 0.04611 83209 6758
32.5	9.73021 65239 9902 8.92919 79123 3468 7.25790 73853 0292 3.91375 54914 2483 7.22545 09915 2185	9.92602 91918 2338 9.99842 70237 4399 9.99999 92878 5276 9.99999 99999 9985 0.03619 85598 8661	37.0	9.77946 30248 6401 9.04903 97230 5162 7.49875 59960 8423 4.39545 01598 9660 8.18884 03284 6658	9.90234 86164 9534 9.99726 11405 7345 9.99999 78409 4122 9.99999 99999 9866 0.04745 51825 0899
33.0	9.73610 87645 9135 8.94320 96806 4630 7.28603 59761 5044 3.97001 27716 1077 7.33796 55518 9377	9.92359 14022 8394 9.99832 17725 3775 9.99999 91893 6177 9.99999 99999 9981 0.03736 47798 0770	37.5	9.78444 71278 3059 9.06156 25235 8606 7.52396 27492 4317 4.44586 79319 9024 8.28967 58726 5421	9.89946 66546 0810 9.99709 74569 3047 9.99999 75751 6474 9.99999 99999 9831 0.04881 41887 4271
33.5	9.74188 94971 2528 8.95703 44083 4368 7.31379 59853 1878 4.02553 29004 9485 7.44900 58096 6198	9.92110 65899 1719 9.99821 09976 6913 9.99999 90788 1426 9.99999 99999 9976 0.03855 17432 8298	38.0	9.78934 19787 0607 9.07394 37045 3486 7.54889 60366 9460 4.49573 48019 3301 8.38940 96125 4019	9.89653 21441 3954 9.99692 59412 9511 9.99999 72801 2398 9.99999 99999 9787 0.05019 55386 3871
34.0	9.74756 16512 8727 8.97067 80486 6314 7.34119 95403 4545 4.08034 01344 5411 7.55862 02775 8057	9.91857 42135 2197 9.99809 44754 6926 9.99999 89549 0820 9.99999 99999 9969 0.03975 96084 2759	38.5	9.79414 95670 7095 9.08618 73552 7174 7.57356 23338 0801 4.54506 77233 4991 8.48807 54553 7453	9.89354 43700 8847 9.99674 62912 7314 9.99999 69529 3281 9.99999 99999 9733 0.05159 94370 5740
34.5	9.75312 80268 9774 8.98414 62968 5620 7.36825 82600 6098 4.13445 77125 7599 7.66685 54338 2442	9.91599 37151 2709 9.99797 19747 5789 9.99999 88162 1721 9.99999 99999 9960 0.04098 85379 2380	39.0	9.79887 18038 5449 9.09829 74097 7758 7.59796 98151 8471 4.59388 30485 8706 8.58570 61058 4951	9.89050 25944 7926 9.99655 81939 3791 9.99999 65904 4771 9.99999 99999 9665 0.05302 60949 5151
35.0	9.75859 13013 5406 8.99744 46050 9108 7.39498 32846 4596 4.18790 79167 8305 7.77375 58422 3866	9.91336 45194 2486 9.99784 32565 6799 9.99999 86611 7988 9.99999 99999 9948 0.04223 86991 6125	39.5	9.80351 05253 1226 9.11027 76546 1556 7.62212 63709 9009 4.64219 65613 9746 8.68233 31314 7114	9.88740 60554 9276 9.99636 13254 0588 9.99999 61892 4641 9.99999 99999 9582 0.05447 57295 7767
35.5	9.76395 40365 4769 9.01057 81963 0506 7.42138 53036 0206 4.24071 21277 8656 7.87936 42642 4582	9.91068 60331 7566 9.99770 80738 5665 9.99999 84880 8828 9.99999 99999 9934 0.04351 02643 8431	40.0	9.80806 74967 5243 9.12213 17364 0530 7.64603 96223 0162 4.69002 35076 5990 8.77798 70239 9705	9.88425 39665 5351 9.99615 53503 9095 9.99999 57456 0496 9.99999 99999 9479 0.05594 85647 1860

θ	Log c, $c^\circ, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ\circ}$	Log b, $b^\circ, b^{\circ\circ}, b^{\circ\circ\circ}, K$	θ	Log c, $c^\circ, c^{\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ}, c^{\circ\circ\circ\circ}$	Log b, $b^\circ, b^{\circ\circ}, b^{\circ\circ\circ}, K$
40.5	9.81254 44160 3118 9.13386 31688 3276 7.66971 69355 4924 4.73737 86242 8465 8.87269 72572 4782	9.88104 55153 6992 9.99593 99217 3414 9.99999 52554 7291 9.99999 99999 9352 0.05744 48309 1533	43.0	9.83378 33303 5054 9.19079 50610 9180 7.78480 60816 1055 4.96756 02325 8876 9.33306 04732 6826	9.86412 74638 3939 9.99470 79277 7903 9.99999 19392 6697 9.99999 99999 8130 0.06528 62015 9396
41.0	9.81694 29168 3225 9.14547 53392 3322 7.69316 54361 2032 4.78427 61664 5009 8.96649 23415 8026	9.87777 98629 2565 9.99571 46799 1117 9.99999 47144 4650 9.99999 99999 9166 0.05896 47657 1199	43.5	9.83781 22036 4207 9.20185 77219 4458 7.80720 98224 5844 5.01236 85903 2056 9.42267 71893 3615	9.86056 22069 8667 9.99442 77564 8754 9.99999 10631 8239 9.99999 99999 7701 0.06692 83063 3013
41.5	9.82126 45717 4779 9.15697 15147 7310 7.71639 20211 8164 4.83072 99332 7571 9.05939 98752 3342	9.87445 61424 1850 9.99547 92525 1199 9.99999 41177 3970 9.99999 99999 9004 0.06050 86139 1161	44.0	9.84177 12732 2059 9.21281 91132 2034 7.82942 31121 6924 5.05679 61323 8982 9.51153 22734 7989	9.85693 40900 3701 9.99413 53240 7206 9.99999 01005 6430 9.99999 99999 7179 0.06859 56672 8557
42.0	9.82551 08951 7436 9.16835 48482 6552 7.73940 33718 1465 4.87675 32921 2387 9.15144 65929 3209	9.87107 34581 4351 9.99523 32536 9414 9.99999 34601 5285 9.99999 99999 8769 0.06207 66278 4559	44.5	9.84566 18003 2841 9.22368 18919 6442 7.85145 17115 3354 5.10085 43880 9060 9.59964 87848 8779	9.85324 20538 1683 9.99383 01682 2620 9.99998 90435 7943 9.99999 99999 6545 0.07028 85789 7712
42.5	9.82968 33460 3618 9.17962 83836 3888 7.76220 59644 2119 4.92235 92014 4540 9.24265 84115 7803	9.86763 08843 1734 9.99497 62836 0591 9.99999 27360 3865 9.99999 99999 8481 0.06366 90676 5601	45.0	9.84948 50021 6801 9.23444 86293 2427 7.87330 12255 4180 5.14455 45759 3947 9.68704 91605 9324	9.84948 50021 6801 9.99351 18092 4211 9.99998 78837 3166 9.99999 99999 5775 0.07200 73453 8176

0.	φ.	Diff. I.	II.	III.	0.	φ.	Diff. I.	II.	III.
0° 0'	0° 0' 0" 000000 00	2427 02	4854 04	8	4° 5'	9° 0' 49" 21568 67	2.21489 73	4896 66	187
0.1	9. 0. 0.02427 02	7281 06	4854 12	9	4.6	9. 0. 51.43058 40	2.26386 39	4898 53	193
0.2	9. 0. 0.09708 08	12135 18	4854 21	14	4.7	9. 0. 53.69444 79	2.31284 92	4900 46	196
0.3	9. 0. 0.21843 26	16989 39	4854 35	18	4.8	9. 0. 56.00729 71	2.36185 38	4902 42	201
0.4	9. 0. 0.38832 65	21843 74	4854 53	23	4.9	9. 0. 58.36915 09	2.41087 80	4904 47	204
0.5	9. 0. 0.60676 39	26698 27	4854 76	25	5.0	9. 1. 0.78002 89	2.45992 23	4906 47	210
0.6	9. 0. 0.87374 66	31553 03	4855 01	31	5.1	9. 1. 3.23995 12	2.50898 70	4908 57	213
0.7	9. 0. 1.18927 69	36408 04	4855 32	33	5.2	9. 1. 5.74893 82	2.55807 27	4910 70	215
0.8	9. 0. 1.55335 73	41263 36	4855 65	39	5.3	9. 1. 8.30701 09	2.60717 97	4912 85	223
0.9	9. 0. 1.96599 09	46119 01	4856 04	41	5.4	9. 1.10.91419 06	2.65630 82	4915 08	225
1.0	9. 0. 2.42718 10	50975 05	4856 45	48	5.5	9. 1.13.57049 88	2.70545 90	4917 37	229
1.1	9. 0. 2.93693 15	55831 50	4856 93	49	5.6	9. 1.16.27595 78	2.75463 23	4919 67	235
1.2	9. 0. 3.49524 65	60688 43	4857 42	55	5.7	9. 1.19.03059 01	2.80382 85	4921 97	236
1.3	9. 0. 4.10213 08	65545 85	4857 97	58	5.8	9. 1.21.83441 86	2.85304 82	4924 37	243
1.4	9. 0. 4.75758 93	70403 82	4858 55	61	5.9	9. 1.24.68746 68	2.90229 15	4926 77	247
1.5	9. 0. 5.46162 75	75262 37	4859 16	67	6.0	9. 1.27.58975 83	2.95155 91	4929 27	250
1.6	9. 0. 6.21425 12	80121 53	4859 83	70	6.1	9. 1.30.54131 74	3.00085 14	4931 77	255
1.7	9. 0. 7.01546 65	84981 36	4860 53	75	6.2	9. 1.33.54216 88	3.05016 87	4934 26	258
1.8	9. 0. 7.86528 01	89841 89	4861 28	78	6.3	9. 1.36.59233 75	3.09951 15	4936 86	264
1.9	9. 0. 8.76369 90	94703 17	4862 06	83	6.4	9. 1.39.69184 90	3.14888 01	4939 50	267
2.0	9. 0. 9.71073 07	99565 23	4862 89	86	6.5	9. 1.42.84072 91	3.19827 51	4942 17	270
2.1	9. 0. 10.70658 30	1.04428 12	4863 75	90	6.6	9. 1.46.03900 42	3.24769 68	4944 87	277
2.2	9. 0. 11.75066 42	1.09291 87	4864 65	95	6.7	9. 1.49.28670 10	3.29714 55	4947 64	280
2.3	9. 0. 12.84358 29	1.14156 52	4865 60	99	6.8	9. 1.52.58384 65	3.34662 19	4950 44	284
2.4	9. 0. 13.98514 81	1.19022 12	4866 59	101	6.9	9. 1.55.93046 84	3.39612 63	4953 28	288
2.5	9. 0. 15.17536 93	1.23888 71	4867 60	108	7.0	9. 1.59.32659 47	3.44565 91	4956 16	294
2.6	9. 0. 16.41425 64	1.28756 31	4868 68	110	7.1	9. 2. 2.77225 38	3.49522 07	4959 10	297
2.7	9. 0. 17.70181 95	1.33624 99	4869 78	115	7.2	9. 2. 6.26747 45	3.54481 17	4962 07	300
2.8	9. 0. 19.03806 94	1.38494 77	4870 93	118	7.3	9. 2. 9.81228 62	3.59443 24	4965 07	306
2.9	9. 0. 20.42301 71	1.43365 70	4872 11	124	7.4	9. 2.13.40671 86	3.64408 31	4968 13	310
3.0	9. 0. 21.85667 41	1.48237 81	4873 35	127	7.5	9. 2.17.05080 17	3.69376 44	4971 23	314
3.1	9. 0. 23.33905 22	1.53111 16	4874 62	130	7.6	9. 2.20.74456 61	3.74347 67	4974 37	318
3.2	9. 0. 24.87016 38	1.57985 78	4875 92	135	7.7	9. 2.24.48804 28	3.79322 04	4977 55	323
3.3	9. 0. 26.45002 16	1.62861 70	4877 27	140	7.8	9. 2.28.28126 32	3.84299 59	4980 78	327
3.4	9. 0. 28.07863 86	1.67738 97	4878 67	142	7.9	9. 2.32.12425 91	3.89280 37	4984 05	331
3.5	9. 0. 29.75602 83	1.72617 64	4880 09	148	8.0	9. 2.36.01706 28	3.94264 42	4987 36	337
3.6	9. 0. 31.48220 47	1.77497 73	4881 57	150	8.1	9. 2.39.95970 70	3.99251 78	4990 73	339
3.7	9. 0. 33.25718 20	1.82379 30	4883 07	157	8.2	9. 2.43.95222 48	4.04242 51	4994 12	344
3.8	9. 0. 35.08097 50	1.87262 37	4884 64	158	8.3	9. 2.47.99464 99	4.09236 63	4997 56	350
3.9	9. 0. 36.95359 87	1.92147 01	4886 22	165	8.4	9. 2.52.08701 62	4.14234 19	5001 06	352
4.0	9. 0. 38.87506 88	1.97033 23	4887 87	168	8.5	9. 2.56.22935 81	4.19235 25	5004 58	357
4.1	9. 0. 40.84540 11	2.01921 10	4889 55	170	8.6	9. 3. 0.42171 06	4.24239 83	5008 15	364
4.2	9. 0. 42.86461 21	2.06810 65	4891 25	176	8.7	9. 3. 4.66410 89	4.29247 98	5011 79	364
4.3	9. 0. 44.93271 86	2.11701 90	4893 01	181	8.8	9. 3. 8.95658 87	4.34259 77	5015 43	372
4.4	9. 0. 47.04973 76	2.16594 91	4894 82	184	8.9	9. 3.13.29918 64	4.39275 20	5019 15	374
4.5	9. 0. 49.21568 67	2.21489 73	4896 66	187	9.0	9. 3.17.69193 84	4.44294 35	5022 89	380

θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.	θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.
9° 0	9° 3' 17" 69193 84	4.44294 35	5022 89	380	13° 5	9° 7' 27" 95676 60	6.74725 34	5239 02	590
9.1	9. 3.22.13488 19	4.49517 24	5026 69	385	13.6	9. 7.34.70401 94	6.79964 36	5244 92	593
9.2	9. 3.26.62805 43	4.54343 93	5030 54	387	13.7	9. 7.41.50366 30	6.85209 28	5250 85	602
9.3	9. 3.31.17149 36	4.59374 47	5034 41	393	13.8	9. 7.48.35575 58	6.90460 13	5256 87	603
9.4	9. 3.35.76523 83	4.64408 88	5038 34	397	13.9	9. 7.55.26035 71	6.95717 00	5262 90	612
9.5	9. 3.40.40932 71	4.69447 22	5042 31	403	14.0	9. 8. 2.21752 71	7.00979 90	5269 02	613
9.6	9. 3.45.10379 93	4.74489 53	5046 34	405	14.1	9. 8. 9.22732 61	7.06248 92	5275 15	621
9.7	9. 3.49.84869 46	4.79535 87	5050 39	412	14.2	9. 8.16.28981 53	7.11524 07	5281 36	625
9.8	9. 3.54.64405 33	4.84586 25	5054 51	414	14.3	9. 8.23.40505 60	7.16805 43	5287 61	629
9.9	9. 3.59.48991 58	4.89640 76	5058 65	419	14.4	9. 8.30.57311 03	7.22093 04	5293 90	636
10.0	9. 4. 4.38632 34	4.94699 41	5062 84	425	14.5	9. 8.37.79404 07	7.27386 94	5300 26	640
10.1	9. 4. 9.33331 75	4.99762 25	5067 09	429	14.6	9. 8.45.06791 01	7.32687 20	5306 66	646
10.2	9. 4.14.33094 00	5.04829 34	5071 38	433	14.7	9. 8.52.39478 21	7.37993 86	5313 12	649
10.3	9. 4.19.37923 34	5.09900 72	5075 71	437	14.8	9. 8.59.77472 07	7.43306 98	5319 61	657
10.4	9. 4.24.47824 06	5.14976 43	5080 08	444	14.9	9. 9. 7.20779 05	7.48626 59	5326 18	661
10.5	9. 4.29.62800 49	5.20056 51	5084 52	446	15.0	9. 9.14.69405 64	7.53952 77	5332 79	666
10.6	9. 4.34.82857 00	5.25141 03	5088 98	451	15.1	9. 9.22.23358 41	7.59285 56	5339 45	671
10.7	9. 4.40.07998 03	5.30230 01	5093 49	457	15.2	9. 9.29.82643 97	7.64625 01	5346 16	677
10.8	9. 4.45.38228 04	5.35323 50	5098 06	460	15.3	9. 9.37.47268 98	7.69971 17	5352 93	682
10.9	9. 4.50.73551 54	5.40421 56	5102 66	466	15.4	9. 9.45.17240 15	7.75324 10	5359 75	686
11.0	9. 4.56.13973 10	5.45524 22	5107 32	470	15.5	9. 9.52.92564 25	7.80683 85	5366 61	695
11.1	9. 5. 1.59497 32	5.50631 54	5112 02	474	15.6	9.10. 0.73248 10	7.86050 46	5373 56	695
11.2	9. 5. 7.10128 86	5.55743 56	5116 76	480	15.7	9.10. 8.59298 56	7.91424 02	5380 51	704
11.3	9. 5.12.65872 42	5.60860 32	5121 56	483	15.8	9.10.16.50722 58	7.96804 53	5387 55	709
11.4	9. 5.18.26732 74	5.65981 88	5126 39	489	15.9	9.10.24.47527 11	8.02192 08	5394 64	713
11.5	9. 5.23.92714 62	5.71108 27	5131 28	494	16.0	9.10.32.49719 19	8.07586 72	5401 77	720
11.6	9. 5.29.63822 89	5.76239 55	5136 22	497	16.1	9.10.40.57305 91	8.12988 49	5408 97	724
11.7	9. 5.35.40062 44	5.81375 77	5141 19	503	16.2	9.10.48.70294 40	8.18397 46	5416 21	730
11.8	9. 5.41.21438 21	5.86516 96	5146 22	507	16.3	9.10.56.88691 86	8.23813 67	5423 51	736
11.9	9. 5.47.07955 17	5.91663 18	5151 29	514	16.4	9.11. 5.12505 53	8.29237 18	5430 87	740
12.0	9. 5.52.99618 35	5.96814 47	5156 43	514	16.5	9.11.13.41742 71	8.34668 05	5438 27	747
12.1	9. 5.58.96432 82	6.01970 90	5161 57	524	16.6	9.11.21.76410 76	8.40106 32	5445 74	751
12.2	9. 6. 4.98403 72	6.07132 47	5166 81	526	16.7	9.11.30.16517 08	8.45552 06	5453 23	758
12.3	9. 6.11.05536 19	6.12299 28	5172 07	531	16.8	9.11.38.62069 14	8.51005 31	5460 83	763
12.4	9. 6.17.17835 47	6.17471 35	5177 38	535	16.9	9.11.47.13074 45	8.56466 14	5468 46	769
12.5	9. 6.23.35306 82	6.22648 73	5182 73	543	17.0	9.11.55.69540 59	8.61934 60	5476 15	774
12.6	9. 6.29.57955 55	6.27831 46	5188 16	544	17.1	9.12. 4.31475 19	8.67410 75	5483 89	779
12.7	9. 6.35.85787 01	6.33019 62	5193 60	551	17.2	9.12.12.98885 94	8.72894 64	5491 68	786
12.8	9. 6.42.18806 63	6.38213 22	5199 11	556	17.3	9.12.21.71780 58	8.78386 32	5499 54	791
12.9	9. 6.48.57019 85	6.43412 33	5204 67	559	17.4	9.12.30.50166 90	8.83885 86	5507 45	796
13.0	9. 6.55.00432 18	6.48617 00	5210 26	567	17.5	9.12.39.34052 76	8.89393 31	5515 41	803
13.1	9. 7. 1.49049 18	6.53827 26	5215 93	568	17.6	9.12.48.23446 07	8.94908 72	5523 44	808
13.2	9. 7. 8.02876 44	6.59043 19	5221 61	576	17.7	9.12.57.18354 79	9.00432 16	5531 52	813
13.3	9. 7.14.61919 63	6.64264 80	5227 37	580	17.8	9.13. 6.18786 95	9.05963 68	5539 65	820
13.4	9. 7.21.26184 43	6.69492 17	5233 17	585	17.9	9.13.15.24750 63	9.11503 33	5547 85	826
13.5	9. 7.27.95676 60	6.74725 34	5239 02	590	18.0	9.13.24.36253 96	9.17051 18	5556 11	830

0.	φ.	Diff. I.	II.	III.	0.	φ.	Diff. I.	II.	III.
18.0	9° 13' 24" 36253 96	9.17051 18	5556 11	830	22.5	9° 21' 13" 31011 14	11.76167 08	5991 33	1119
18.1	9.13.33.53305 14	9.22607 29	5564 41	838	22.6	9.21.25.07178 22	11.82158 41	6002 52	1125
18.2	9.13.42.75912 43	9.28171 70	5572 79	842	22.7	9.21.36.89336 63	11.88160 93	6013 77	1134
18.3	9.13.52.04084 13	9.33744 49	5581 21	851	22.8	9.21.48.77497 56	11.94174 70	6025 11	1140
18.4	9.14. 1.37828 62	9.39325 70	5589 70	855	22.9	9.22. 0.71672 26	12.00199 81	6036 51	1148
18.5	9.14.10.77154 32	9.44915 40	5598 25	860	23.0	9.22.12.71872 07	12.06236 32	6047 99	1153
18.6	9.14.20.22069 72	9.50513 65	5606 85	866	23.1	9.22.24.78108 39	12.12284 31	6059 52	1163
18.7	9.14.29.72583 37	9.56120 50	5615 51	873	23.2	9.22.36.90392 70	12.18343 83	6071 15	1169
18.8	9.14.39.28703 87	9.61736 01	5624 24	879	23.3	9.22.49.08736 53	12.24414 98	6082 84	1176
18.9	9.14.48.90439 88	9.67360 25	5633 03	883	23.4	9.23. 1.33151 51	12.30497 82	6094 60	1184
19.0	9.14.58.57800 13	9.72993 28	5641 86	891	23.5	9.23.13.63649 33	12.36592 42	6106 44	1192
19.1	9.15. 8.30793 41	9.78635 14	5650 77	896	23.6	9.23.26.00241 75	12.42698 86	6118 36	1197
19.2	9.15.18.09428 55	9.84285 91	5659 73	903	23.7	9.23.38.42940 61	12.48817 22	6130 33	1207
19.3	9.15.27.93714 46	9.89945 64	5668 76	909	23.8	9.23.50.91757 83	12.54947 55	6142 40	1213
19.4	9.15.37.83660 10	9.95614 40	5677 85	914	23.9	9.24. 3.46705 38	12.61089 95	6154 53	1222
19.5	9.15.47.79274 50	10.01292 25	5686 99	922	24.0	9.24.16.07795 33	12.67244 48	6166 75	1228
19.6	9.15.57.80566 75	10.06979 24	5696 21	927	24.1	9.24.28.75039 81	12.73411 23	6179 03	1236
19.7	9.16. 7.87545 99	10.12675 45	5705 48	933	24.2	9.24.41.48451 04	12.79590 26	6191 39	1244
19.8	9.16.18.00221 44	10.18380 93	5714 81	940	24.3	9.24.54.28041 30	12.85781 65	6203 83	1251
19.9	9.16.28.18602 37	10.24095 74	5724 21	945	24.4	9.25. 7.13822 95	12.91985 48	6216 34	1261
20.0	9.16.38.42698 11	10.29819 95	5733 66	953	24.5	9.25.20.05808 43	12.98201 82	6228 95	1265
20.1	9.16.48.72518 06	10.35553 61	5743 19	958	24.6	9.25.33.04010 25	13.04430 77	6241 60	1276
20.2	9.16.59.08071 67	10.41296 80	5752 77	965	24.7	9.25.46.08441 02	13.10672 37	6254 36	1282
20.3	9.17. 9.49368 47	10.47049 57	5762 42	971	24.8	9.25.59.19113 39	13.16926 73	6267 18	1291
20.4	9.17.19.96418 04	10.52811 99	5772 13	978	24.9	9.26.12.36040 12	13.23193 91	6280 09	1298
20.5	9.17.30.49230 03	10.58584 12	5781 91	985	25.0	9.26.25.59234 03	13.29474 00	6293 07	1306
20.6	9.17.41.07814 15	10.64366 03	5791 76	990	25.1	9.26.38.88708 03	13.35767 07	6306 13	1316
20.7	9.17.51.72180 18	10.70157 79	5801 66	996	25.2	9.26.52.24475 10	13.42073 20	6319 29	1320
20.8	9.18. 2.42337 97	10.75959 45	5811 62	1004	25.3	9.27. 5.66548 30	13.48392 49	6332 49	1333
20.9	9.18.13.18297 42	10.81771 07	5821 66	1011	25.4	9.27.19.14940 79	13.54724 98	6345 82	1337
21.0	9.18.24.00068 49	10.87592 73	5831 77	1015	25.5	9.27.32.69665 77	13.61070 80	6359 19	1347
21.1	9.18.34.87661 22	10.93424 50	5841 92	1024	25.6	9.27.46.30736 57	13.67429 99	6372 66	1354
21.2	9.18.45.81085 72	10.99266 42	5852 16	1030	25.7	9.27.59.98166 56	13.73802 65	6386 20	1365
21.3	9.18.56.80352 14	11.05118 58	5862 46	1036	25.8	9.28.13.71969 21	13.80188 85	6399 85	1371
21.4	9.19. 7.85470 72	11.10981 04	5872 82	1044	25.9	9.28.27.52158 06	13.86588 70	6413 56	1380
21.5	9.19.18.96451 76	11.16853 86	5883 26	1050	26.0	9.28.41.38746 76	13.93002 26	6427 36	1388
21.6	9.19.30.13305 62	11.22737 12	5893 76	1056	26.1	9.28.55.31749 02	13.99429 62	6441 24	1396
21.7	9.19.41.36042 74	11.28630 88	5904 32	1063	26.2	9.29. 9.31178 64	14.05870 86	6455 20	1406
21.8	9.19.52.64673 62	11.34535 20	5914 95	1072	26.3	9.29.23.37049 50	14.12326 06	6469 26	1413
21.9	9.20. 3.99208 82	11.40450 15	5925 67	1076	26.4	9.29.37.49375 56	14.18795 32	6483 39	1423
22.0	9.20.15.39658 97	11.46375 82	5936 43	1084	26.5	9.29.51.68170 88	14.25278 71	6497 62	1430
22.1	9.20.26.86034 79	11.52312 25	5947 27	1092	26.6	9.30. 5.93449 59	14.31776 33	6511 92	1440
22.2	9.20.38.38347 04	11.58259 52	5958 19	1097	26.7	9.30.20.25225 92	14.38288 25	6526 32	1447
22.3	9.20.49.96606 56	11.64217 71	5969 16	1105	26.8	9.30.34.63514 17	14.44814 57	6540 79	1458
22.4	9.21. 1.60824 27	11.70186 87	5980 21	1112	26.9	9.30.49.08328 74	14.51355 36	6555 37	1465
22.5	9.21.13.31011 14	11.76167 08	5991 33	1119	27.0	9.31. 3.59684 10	14.57910 73	6570 02	1476

θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.	θ.	φ.	Diff. I.	II.	III.
27.0	9° 31' 3" 59684	10	14.57910	73	31.5	9° 43' 6" 93087	70	17.69497	76
27.1	9.31.18.17594	83	14.64480	75	31.6	9.43.24.62585	46	17.76826	81
27.2	9.31.32.82075	58	14.71065	53	31.7	9.43.42.39412	27	17.84175	16
27.3	9.31.47.53141	11	14.77665	13	31.8	9.44.0.23587	43	17.91542	90
27.4	9.32.2.30806	24	14.84279	65	31.9	9.44.18.15130	33	17.98950	16
27.5	9.32.17.15085	89	14.90909	19	32.0	9.44.36.14060	49	18.06337	07
27.6	9.32.32.05995	08	14.97553	83	32.1	9.44.54.20397	56	18.13763	74
27.7	9.32.47.03548	91	15.04213	67	32.2	9.45.12.34161	30	18.21210	26
27.8	9.33.2.07762	58	15.10888	79	32.3	9.45.30.55371	56	18.28676	79
27.9	9.33.17.18651	37	15.17579	28	32.4	9.45.48.84048	35	18.36163	41
28.0	9.33.32.36230	65	15.24285	25	32.5	9.46.7.20211	76	18.43670	28
28.1	9.33.47.60515	90	15.31006	78	32.6	9.46.25.63882	04	18.51197	49
28.2	9.34.2.91522	68	15.37743	97	32.7	9.46.44.15079	53	18.58745	19
28.3	9.34.18.29266	65	15.44496	90	32.8	9.47.2.73824	72	18.66313	46
28.4	9.34.33.73763	55	15.51265	68	32.9	9.47.21.40138	18	18.73902	47
28.5	9.34.49.25029	23	15.58050	39	33.0	9.47.40.14040	65	18.81512	32
28.6	9.35.4.83079	62	15.64851	16	33.1	9.47.58.95552	97	18.89143	14
28.7	9.35.20.87930	78	15.71668	04	33.2	9.48.17.84696	11	18.96795	07
28.8	9.35.36.19598	82	15.78501	15	33.3	9.48.36.81491	18	19.04468	20
28.9	9.35.51.98099	97	15.85350	59	33.4	9.48.55.85959	38	19.12162	69
29.0	9.36.7.83450	56	15.92216	45	33.5	9.49.14.98122	07	19.19878	66
29.1	9.36.23.75567	01	15.99098	82	33.6	9.49.34.18000	73	19.27616	24
29.2	9.36.39.74765	83	16.05997	83	33.7	9.49.53.45616	97	19.35375	55
29.3	9.36.55.80763	66	16.12913	53	33.8	9.50.12.80992	52	19.43156	74
29.4	9.37.11.93677	19	16.19846	07	33.9	9.50.32.24149	26	19.50959	91
29.5	9.37.28.13523	26	16.26795	52	34.0	9.50.51.75109	17	19.58785	23
29.6	9.37.44.40318	78	16.33762	00	34.1	9.51.11.33894	40	19.66632	82
29.7	9.38.0.74080	78	16.40745	59	34.2	9.51.31.00527	22	19.74502	80
29.8	9.38.17.14826	37	16.47746	41	34.3	9.51.50.75030	02	19.82395	31
29.9	9.38.33.62572	78	16.54764	56	34.4	9.52.10.57425	33	19.90310	50
30.0	9.38.50.17337	34	16.61800	12	34.5	9.52.30.47735	83	19.98248	50
30.1	9.39.6.79137	47	16.68853	25	34.6	9.52.50.45984	33	20.06209	45
30.2	9.39.23.47990	72	16.75924	00	34.7	9.53.10.52193	78	20.14193	49
30.3	9.39.40.23914	72	16.83012	49	34.8	9.53.30.66387	27	20.22200	75
30.4	9.39.57.06927	21	16.90118	84	34.9	9.53.50.88588	02	20.30231	36
30.5	9.40.13.97046	05	16.97243	14	35.0	9.54.11.18819	38	20.38285	48
30.6	9.40.30.94289	19	17.04385	51	35.1	9.54.31.57104	86	20.46363	28
30.7	9.40.47.98674	70	17.11546	06	35.2	9.54.52.03468	14	20.54464	86
30.8	9.41.5.10220	76	17.18724	87	35.3	9.55.12.57933	00	20.62590	38
30.9	9.41.28.28945	63	17.25922	08	35.4	9.55.33.20523	38	20.70739	96
31.0	9.41.39.54867	71	17.33137	79	35.5	9.55.53.91263	34	20.78913	79
31.1	9.41.56.88005	50	17.40372	12	35.6	9.56.14.70177	13	20.87112	00
31.2	9.42.14.28377	62	17.47625	17	35.7	9.56.35.57289	13	20.95334	73
31.3	9.42.31.76002	79	17.54897	04	35.8	9.56.56.52623	86	21.03582	13
31.4	9.42.49.30899	83	17.62187	87	35.9	9.57.17.56205	99	21.11854	36
31.5	9.43.6.93087	70	17.69497	76	36.0	9.57.38.68060	35	21.20151	57

TABLE VII.

0.	φ.	Diff. I.	II.	III.	0.	φ.	Diff. I.	II.	III.						
36° 0	9° 57' 38" 68060	35	21.20151	57	8322	35	2527	40° 5	10° 14' 58" 97206	69	25.22054	66	9630	03	3347
36.1	9.57.59.88211	92	21.28473	92	8347	62	2543	40.6	10.15.24.19261	35	25.31684	69	9663	50	3365
36.2	9.58.21.16685	84	21.36821	54	8373	05	2560	40.7	10.15.49.50946	04	25.41348	19	9697	15	3390
36.3	9.58.42.53507	38	21.45194	59	8398	65	2576	40.8	10.16.14.92294	23	25.51045	34	9731	05	3412
36.4	9.59.3.98701	97	21.53593	24	8424	41	2591	40.9	10.16.40.43339	57	25.60776	39	9765	17	3435
36.5	9.59.25.52295	21	21.62017	65	8450	32	2606	41.0	10.17.6.04115	96	25.70541	56	9799	52	3454
36.6	9.59.47.14312	86	21.70467	97	8476	38	2623	41.1	10.17.31.74657	52	25.80341	08	9834	06	3476
36.7	10. 0. 8.84780	83	21.78944	35	8502	61	2639	41.2	10.17.57.54998	60	25.90175	14	9868	82	3500
36.8	10. 0.30.63725	18	21.87446	96	8529	00	2655	41.3	10.18.23.45173	74	26.00043	96	9903	82	3524
36.9	10. 0.52.51172	14	21.95975	96	8555	55	2672	41.4	10.18.49.45217	70	26.09947	78	9939	06	3546
37.0	10. 1.14.47148	10	22.04531	51	8582	27	2688	41.5	10.19.15.55165	48	26.19886	84	9974	52	3566
37.1	10. 1.36.51679	61	22.13113	78	8609	15	2703	41.6	10.19.41.75052	32	26.29861	36	10010	18	3593
37.2	10. 1.58.64793	39	22.21722	93	8636	18	2722	41.7	10.20.8.04913	68	26.39871	54	10046	11	3614
37.3	10. 2.20.86516	31	22.30359	11	8663	40	2738	41.8	10.20.34.44785	22	26.49917	65	10082	25	3640
37.4	10. 2.43.16875	42	22.39022	51	8690	78	2756	41.9	10.21.0.94702	87	26.59999	90	10118	65	3662
37.5	10. 3. 5.55897	93	22.47713	29	8718	34	2771	42.0	10.21.27.54702	77	26.70118	55	10155	27	3687
37.6	10. 3.28.03611	22	22.56431	63	8746	05	2788	42.1	10.21.54.24821	32	26.80273	82	10192	14	3708
37.7	10. 3.50.60042	85	22.65177	68	8773	93	2808	42.2	10.22.21.05095	14	26.90465	96	10229	22	3735
37.8	10. 4.13.25220	53	22.73951	61	8802	01	2823	42.3	10.22.47.95561	10	27.00695	18	10266	57	3760
37.9	10. 4.35.99172	14	22.82753	62	8830	24	2845	42.4	10.23.14.96256	28	27.10961	75	10304	17	3786
38.0	10. 4.58.81925	76	22.91583	86	8858	69	2855	42.5	10.23.42.07218	03	27.21265	92	10342	03	3807
38.1	10. 5.21.73509	62	23.00442	55	8887	24	2879	42.6	10.24.9.28483	95	27.31607	95	10380	10	3833
38.2	10. 5.44.73952	17	23.09329	79	8916	03	2894	42.7	10.24.36.60091	90	27.41988	05	10418	43	3859
38.3	10. 6. 7.83281	96	23.18245	82	8944	97	2914	42.8	10.25.4.02079	95	27.52406	48	10457	02	3886
38.4	10. 6.31.01527	78	23.27190	79	8974	11	2931	42.9	10.25.31.54486	43	27.62863	50	10495	88	3911
38.5	10. 6.54.28718	57	23.36164	90	9003	42	2949	43.0	10.25.59.27349	93	27.73359	38	10534	99	3935
38.6	10. 7.17.64883	47	23.45168	32	9032	91	2968	43.1	10.26.26.90709	31	27.83894	37	10574	34	3962
38.7	10. 7.41.10051	79	23.54201	23	9062	59	2986	43.2	10.26.54.74603	68	27.94468	71	10613	96	3988
38.8	10. 8. 4.64253	02	23.63263	82	9092	45	3005	43.3	10.27.22.69072	39	28.05082	67	10653	84	4018
38.9	10. 8.28.27516	84	23.72356	27	9122	50	3027	43.4	10.27.50.74155	05	28.15736	51	10694	02	4042
39.0	10. 8.51.99873	11	23.81478	77	9152	77	3042	43.5	10.28.18.89891	57	28.26430	53	10734	44	4069
39.1	10. 9.15.81351	88	23.90631	54	9183	19	3062	43.6	10.28.47.16322	10	28.37164	97	10775	13	4095
39.2	10. 9.39.71983	42	23.99814	73	9213	81	3083	43.7	10.29.15.53487	07	28.47940	10	10816	08	4123
39.3	10. 10. 3.71798	15	24.09028	54	9244	64	3098	43.8	10.29.44.01427	17	28.58756	18	10857	31	4155
39.4	10. 10.27.80826	69	24.18273	18	9275	62	3123	43.9	10.30.12.60183	35	28.69613	49	10898	86	4179
39.5	10. 10.51.99099	87	24.27548	80	9306	85	3141	44.0	10.30.41.29796	84	28.80512	35	10940	65	4207
39.6	10. 11.16.26648	67	24.36855	65	9338	26	3158	44.1	10.31.10.10309	19	28.91453	00	10982	72	4234
39.7	10. 11.40.63504	32	24.46193	91	9369	84	3182	44.2	10.31.39.01762	19	29.02435	72	11025	06	4265
39.8	10. 12. 5.09698	23	24.55563	75	9401	66	3200	44.3	10.32.8.04197	90	29.13460	78	11067	71	4296
39.9	10. 12.29.65261	98	24.64965	41	9433	66	3223	44.4	10.32.37.17658	68	29.24528	49	11110	67	4322
40.0	10. 12.54.30227	39	24.74399	07	9465	89	3240	44.5	10.33.6.42187	17	29.35639	16	11153	89	4352
40.1	10. 13.19.04626	46	24.83864	96	9498	29	3260	44.6	10.33.35.77826	33	29.46793	05	11197	41	4380
40.2	10. 13.43.88491	42	24.93363	25	9530	89	3285	44.7	10.34.5.24619	38	29.57990	46	11241	21	4410
40.3	10. 14. 8.81854	67	25.02894	14	9563	74	3304	44.8	10.34.34.82609	85	29.69231	67	11285	31	
40.4	10. 14.33.84748	81	25.12457	88	9596	78	3325	44.9	10.35.4.51841	53	29.80516	98			
40.5	10. 14.58.97206	69	25.22054	66	9630	03	3347	45.0	10.35.34.32358	50					

mm

0.	E (45°).	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.
0°	0.78539 81633 97	2 17326 22	4 34449 61	608 49	405 49	22
1	0.78537 64307 75	6 51775 83	4 33841 12	1013 98	405 27	39
2	0.78531 12531 92	10 85616 95	4 32827 14	1419 25	404 88	39
3	0.78520 26914 97	15 18444 09	4 31407 89	1824 13	404 49	60
4	0.78505 08470 88	19 49851 98	4 29583 76	2228 62	403 89	57
5	0.78485 58618 90	23 79435 74	4 27355 14	2632 51	403 32	89
6	0.78461 79183 16	28 06790 88	4 24722 63	3035 83	402 43	74
7	0.78433 72392 28	32 31513 51	4 21686 80	3438 26	401 69	1 06
8	0.78401 40878 77	36 53200 31	4 18248 54	3839 95	400 63	1 09
9	0.78364 87678 46	40 71448 85	4 14408 59	4240 58	399 54	1 20
10	0.78324 16229 61	44 85857 44	4 10168 01	4640 12	398 34	1 41
11	0.78279 30372 17	48 96025 45	4 05527 89	5038 46	396 93	1 44
12	0.78230 34346 72	53 01553 34	4 00489 43	5435 39	395 49	1 68
13	0.78177 32793 38	57 02042 77	3 95054 04	5830 88	393 81	1 75
14	0.78120 30750 61	60 97096 81	3 89223 16	6224 69	392 06	1 97
15	0.78059 33653 80	64 86319 97	3 82998 47	6616 75	390 09	2 07
16	0.77994 47333 83	68 69318 44	3 76381 72	7006 84	388 02	2 33
17	0.77925 78015 39	72 45700 16	3 69374 88	7394 86	385 69	2 42
18	0.77853 32315 23	76 15075 04	3 61980 02	7780 55	383 27	2 69
19	0.77777 17240 19	79 77055 06	3 54199 47	8163 82	380 58	2 84
20	0.77697 40185 13	83 31254 53	3 46035 65	8544 40	377 74	3 13
21	0.77614 08930 60	86 77290 18	3 37491 25	8922 14	374 61	3 28
22	0.77527 31640 42	90 14781 43	3 28569 11	9296 75	371 33	3 58
23	0.77437 16858 99	93 43350 54	3 19272 36	9668 08	367 75	3 85
24	0.77343 73508 45	96 62622 90	3 09604 28	10035 83	363 90	4 08
25	0.77247 10885 55	99 72227 18	2 99568 45	10399 73	359 82	4 43
26	0.77147 38658 37	102 71795 63	2 89168 72	10759 55	355 39	4 78
27	0.77044 66862 74	105 60964 35	2 78499 17	11114 94	350 61	4 92
28	0.76939 05898 39	108 39373 52	2 67294 23	11465 58	345 69	5 54
29	0.76830 66524 87	111 06667 75	2 55828 65	11811 27	340 15	5 75
30	0.76719 59857 12	113 62496 40	2 44017 38	12151 42	334 40	6 15
31	0.76605 97360 72	116 06513 78	2 31865 96	12485 82	328 25	6 69
32	0.76489 90846 94	118 38379 74	2 19380 14	12814 07	321 56	7 01
33	0.76371 52467 20	120 57759 88	2 06566 07	13135 63	314 55	7 59
34	0.76250 94707 32	122 64325 95	1 93430 44	13450 18	306 96	8 08
35	0.76128 30381 37	124 57756 39	1 79980 26	13757 14	298 88	8 55
36	0.76003 72624 98	126 37736 65	1 66223 12	14056 02	290 33	9 19
37	0.75877 34888 33	128 03959 77	1 52167 10	14346 35	281 14	9 78
38	0.75749 30928 56	129 56126 87	1 37820 75	14627 49	271 36	10 36
39	0.75619 74801 69	130 93947 62	1 23193 26	14898 85	261 00	11 12
40	0.75488 80854 07	132 17140 88	1 08294 41	15159 85	249 88	11 71
41	0.75356 63713 19	133 25435 29	93134 56	15409 73	238 17	12 51
42	0.75223 38277 90	134 18569 85	77724 83	15647 90	225 66	13 33
43	0.75089 19708 05	134 96294 68	62076 93	15873 56	212 33	14 01
44	0.74954 23413 37	135 58371 61	46203 37	16085 89	198 32	14 93
45	0.74818 65041 76	136 04574 98	30117 48	16284 21	183 39	15 79

TABLE VIII.

0.	F (45°).	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0°	0.78539 81633 97	2 17336 56	4 34594 14	237 15	159 11	1 44	59
1	0.78541 98970 53	6 51930 70	4 34356 99	396 26	160 55	2 03	69
2	0.78548 50901 23	10 86287 69	4 33960 73	556 81	162 58	2 72	43
3	0.78559 37188 92	15 20248 42	4 33403 92	719 39	165 30	3 15	73
4	0.78574 57437 34	19 53652 34	4 32684 53	884 69	168 45	3 88	59
5	0.78594 11089 68	23 86336 87	4 31799 84	1053 14	172 33	4 47	53
6	0.78617 97426 55	28 18136 71	4 30746 70	1225 47	176 80	5 00	68
7	0.78646 15563 26	32 48883 41	4 29521 23	1402 27	181 80	5 68	60
8	0.78678 64446 67	36 78404 64	4 28118 96	1584 07	187 48	6 28	63
9	0.78715 42851 31	41 06523 60	4 26534 89	1771 55	193 76	6 91	61
10	0.78756 49374 91	45 33058 49	4 24763 34	1965 31	200 67	7 52	68
11	0.78801 82433 40	49 57821 83	4 22798 03	2165 98	208 19	8 20	60
12	0.78851 40255 23	53 80619 86	4 20632 05	2374 17	216 39	8 80	62
13	0.78905 20875 09	58 01251 91	4 18257 88	2590 56	225 19	9 42	80
14	0.78963 22127 00	62 19509 79	4 15667 32	2815 75	234 61	10 22	46
15	0.79025 41636 79	66 35177 11	4 12851 57	3050 36	244 83	10 68	76
16	0.79091 76813 90	70 48028 68	4 09801 21	3295 19	255 51	11 44	73
17	0.79162 24842 58	74 57829 89	4 06506 02	3550 70	266 95	12 17	53
18	0.79236 82672 47	78 64335 91	4 02955 32	3817 65	279 12	12 70	71
19	0.79315 47008 38	82 67291 23	3 99137 67	4096 77	291 82	13 41	73
20	0.79398 14299 61	86 66428 90	3 95040 90	4388 59	305 23	14 14	53
21	0.79484 80728 51	90 61469 80	3 90652 31	4693 82	319 37	14 67	73
22	0.79575 42198 31	94 52122 11	3 85958 49	5013 19	334 04	15 40	60
23	0.79669 94320 42	98 38080 60	3 80945 30	5347 23	349 44	16 00	59
24	0.79768 32401 02	102 19025 90	3 75598 07	5696 67	365 44	16 59	61
25	0.79870 51426 92	105 94623 97	3 69901 40	6062 11	382 03	17 20	57
26	0.79976 46050 89	109 64525 37	3 63839 29	6444 14	399 23	17 77	52
27	0.80086 10576 26	113 28364 66	3 57395 15	6843 37	417 00	18 29	42
28	0.80199 38940 92	116 85759 81	3 50551 78	7260 37	435 29	18 71	54
29	0.80316 24700 73	120 36311 59	3 43291 41	7695 66	454 00	19 25	30
30	0.80436 61012 32	123 79603 00	3 35595 75	8149 66	473 25	19 55	37
31	0.80560 40615 32	127 15198 75	3 27446 09	8622 91	492 80	19 92	20
32	0.80687 55814 07	130 42644 84	3 18823 18	9115 71	512 72	20 12	10
33	0.80817 98458 91	133 61468 02	3 09707 47	9628 43	532 84	20 22	+ 18
34	0.80951 59926 93	136 71175 49	3 00079 04	10161 27	553 06	20 40	- 23
35	0.81088 31102 42	139 71254 53	2 89917 77	10714 33	573 46	20 17	1
36	0.81228 02356 95	142 61172 30	2 79203 44	11287 79	593 63	20 16	54
37	0.81370 63529 25	145 40375 74	2 67915 65	11881 42	613 79	19 62	36
38	0.81516 03904 99	148 02891 39	2 56034 23	12495 21	633 41	19 26	70
39	0.81664 12196 38	150 64325 62	2 43539 02	13128 62	652 67	18 56	90
40	0.81814 76522 00	153 07864 64	2 30410 40	13781 29	671 23	17 66	1 05
41	0.81967 84386 64	155 38275 04	2 16629 11	14452 52	688 89	16 61	1 34
42	0.82123 22661 68	157 54904 15	2 02176 59	15141 41	705 50	15 27	1 56
43	0.82280 77565 83	159 57080 74	1 87035 18	15846 91	720 77	13 71	1 85
44	0.82440 34646 57	161 44115 92	1 71188 27	16567 68	734 48	11 86	2 11
45	0.82601 78762 49	163 15304 19	1 54620 59	17302 16	746 34	9 75	2 46

0.	E (45°).	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
45°	0.74818 65041 76	136 04574 98	30117 48	16284 21	183 39	15 79	94
46	0.74682 60466 78	136 34692 46	+ 13833 27	16467 60	167 60	16 73	89
47	0.74546 25774 32	136 48525 73	- 2634 33	16635 20	150 87	17 62	96
48	0.74409 77248 59	136 45891 40	19269 53	16786 07	133 25	18 58	1 11
49	0.74273 31357 19	136 26621 87	36055 60	16919 32	114 67	19 69	86
50	0.74137 04735 32	135 90566 27	52974 92	17033 99	94 98	20 55	1 17
51	0.74001 14169 05	135 37591 35	70008 91	17128 97	74 43	21 72	1 06
52	0.73865 76577 70	134 67582 44	87137 88	17203 40	52 71	22 78	98
53	0.73731 08995 26	133 80444 56	1 04341 28	17256 11	29 93	23 76	1 17
54	0.73597 28550 70	132 76103 28	1 21597 39	17286 04	+ 6 17	24 93	1 07
55	0.73464 52447 42	131 54505 89	1 38883 43	17292 21	-18 76	26 00	1 01
56	0.73332 97941 53	130 15622 46	1 56175 64	17273 45	44 76	27 01	1 16
57	0.73202 82319 07	128 59446 82	1 73449 09	17228 69	71 77	28 17	96
58	0.73074 22872 25	126 85997 73	1 90677 78	17156 92	99 94	29 13	1 02
59	0.72947 36874 52	124 95319 95	2 07834 70	17056 98	129 07	30 15	93
60	0.72822 41554 57	122 87485 25	2 24891 68	16927 91	159 22	31 08	96
61	0.72699 54069 32	120 62593 57	2 41819 59	16768 39	190 30	32 04	72
62	0.72578 91475 75	118 20773 98	2 58588 28	16578 69	222 34	32 76	81
63	0.72460 70701 77	115 62185 70	2 75166 67	16356 05	255 10	33 57	67
64	0.72345 08516 07	112 87019 03	2 91522 72	16100 95	288 67	34 24	45
65	0.72232 21497 04	109 95496 31	3 07623 67	15812 28	322 91	34 69	44
66	0.72122 26000 73	106 87872 64	3 23435 95	15489 37	357 60	35 13	29
67	0.72015 38128 09	103 64436 69	3 38925 32	15131 77	392 73	35 42	+ 7
68	0.71911 73691 40	100 25511 37	3 54057 09	14739 04	428 15	35 49	- 2
69	0.71811 48180 03	96 71454 28	3 68796 13	14310 89	463 64	35 47	21
70	0.71714 76725 75	93 02658 15	3 83107 02	13847 25	499 11	35 26	50
71	0.71621 74067 60	89 19551 13	3 96954 27	13348 14	534 37	34 76	58
72	0.71532 54516 47	85 22596 86	4 10302 41	12813 77	569 13	34 18	76
73	0.71447 31919 61	81 12294 45	4 23116 18	12244 64	603 31	33 42	1 16
74	0.71366 19625 16	76 89178 27	4 35360 82	11641 33	636 73	32 26	1 21
75	0.71289 30446 89	72 53817 45	4 47002 15	11004 60	668 99	31 05	1 46
76	0.71216 76629 44	68 06815 30	4 58006 75	10335 61	700 04	29 59	1 69
77	0.71148 69814 14	63 48808 55	4 68342 36	9635 57	729 63	27 90	1 94
78	0.71085 21005 59	58 80466 19	4 77977 93	8905 94	757 53	25 96	2 10
79	0.71026 40539 40	54 02488 26	4 86883 87	8148 41	783 49	23 86	2 31
80	0.70972 38051 14	49 15604 39	4 95032 28	7364 92	807 35	21 55	2 42
81	0.70923 22446 75	44 20572 11	5 02397 20	6557 57	828 90	19 13	2 72
82	0.70879 01874 64	39 18174 91	5 08954 77	5728 67	848 03	16 41	2 78
83	0.70839 83699 73	34 09220 14	5 14683 44	4880 64	864 44	13 63	2 84
84	0.70805 74479 59	28 94536 70	5 19564 08	4016 20	878 07	10 79	3 06
85	0.70776 79942 89	23 74972 62	5 23580 28	3138 13	888 86	7 73	3 06
86	0.70753 04970 27	18 51392 34	5 26718 41	2249 27	896 59	4 67	3 09
87	0.70734 53577 93	13 24673 93	5 28967 68	1352 68	901 26	+ 1 58	3 16
88	0.70721 28904 00	7 95706 25	5 30320 36	+ 451 42	902 84	- 1 58	3 09
89	0.707131 33197 75	+ 2 65385 89	5 30771 78	- 451 42	901 26	4 67	3 06
90	0.70710 67811 86	- 2 65385 89	5 30320 36	1352 68	896 59	7 73	3 06

TABLE VIII.

0.	F(45°).	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
45°	0.82601 78762 49	163 15304 19	1 54620 59	17302 16	746 34	9 75	2 46
46	0.82764 94066 68	164 69924 78	1 37318 43	18048 50	756 09	7 29	2 82
47	0.82929 63991 46	166 07243 21	1 19269 93	18804 59	763 38	4 47	3 05
48	0.83095 71234 67	167 26513 14	1 00465 34	19567 97	767 85	+ 1 42	3 55
49	0.83262 97747 81	168 26978 48	80897 37	20335 82	769 27	- 2 13	3 82
50	0.83431 24726 29	169 07875 85	60561 55	21105 09	767 14	5 95	4 35
51	0.83600 32602 14	169 68437 40	39456 46	21872 23	761 19	10 30	4 53
52	0.83770 01039 54	170 07893 86	+ 17584 23	22633 42	750 89	14 83	5 05
53	0.83940 08933 40	170 25478 09	- 5049 19	23384 31	736 06	19 88	5 57
54	0.84110 34411 49	170 20428 90	28433 50	24120 37	716 18	25 45	5 72
55	0.84280 54840 39	169 91995 40	52553 87	24836 55	690 73	31 17	6 13
56	0.84450 46835 79	169 39441 53	77390 42	25527 28	659 56	37 30	6 60
57	0.84619 86277 32	168 62051 11	1 02917 70	26186 84	622 26	43 90	6 79
58	0.84788 48328 43	167 59133 41	1 29104 54	26809 10	578 36	50 69	7 15
59	0.84956 07461 84	166 30028 87	1 55913 64	27387 46	527 67	57 82	7 25
60	0.85122 37490 71	164 74115 23	1 83301 10	27915 13	469 85	65 07	7 43
61	0.85287 11605 94	162 90814 13	2 11216 23	28384 98	404 78	72 50	7 54
62	0.85450 02420 07	160 79597 90	2 39601 21	28789 76	332 28	80 04	7 52
63	0.85610 82017 97	158 39996 69	2 68390 97	29122 04	252 24	87 56	7 32
64	0.85769 22014 66	155 71605 72	2 97513 01	29374 28	164 68	94 88	7 19
65	0.85924 93620 38	152 74092 71	3 26887 29	29538 96	+ 69 80	102 07	6 86
66	0.86077 67713 09	149 47205 42	3 56426 25	29608 76	- 32 27	108 93	6 32
67	0.86227 14918 51	145 90779 17	3 86035 01	29576 49	141 20	115 25	5 88
68	0.86373 05697 68	142 04744 16	4 15611 50	29435 29	256 45	121 13	4 95
69	0.86515 10441 84	137 89132 66	4 45046 79	29178 84	377 58	126 08	4 34
70	0.86652 99574 50	133 44085 87	4 74225 63	28801 26	503 66	130 42	3 24
71	0.86786 43660 37	128 69860 24	5 03026 89	28297 60	634 08	133 66	2 05
72	0.86915 13520 61	123 66833 35	5 31324 49	27663 52	767 74	135 71	+1 07
73	0.87038 80353 96	118 35508 86	5 58988 01	26895 78	903 45	136 78	- 46
74	0.87157 15862 82	112 76520 85	5 85883 79	25992 33	1040 23	136 32	1 78
75	0.87269 92383 67	106 90637 06	6 11876 12	24952 10	1176 55	134 54	3 25
76	0.87376 83020 73	100 78760 94	6 36828 22	23775 55	1311 09	131 29	4 73
77	0.87477 61781 67	94 41932 72	6 60603 77	22464 46	1442 38	126 56	6 31
78	0.87572 03714 39	87 81328 95	6 83068 23	21022 08	1568 94	120 25	7 76
79	0.87659 85043 34	80 98260 72	7 04090 31	19453 14	1689 19	112 49	9 28
80	0.87740 83304 06	73 94170 41	7 23543 45	17763 95	1801 68	103 21	10 56
81	0.87814 77474 47	66 70626 96	7 41307 40	15962 27	1904 89	92 65	11 92
82	0.87881 48101 43	59 29319 56	7 57269 67	14057 38	1997 54	80 73	13 04
83	0.87940 77420 99	51 72049 89	7 71327 05	12059 84	2078 27	67 69	13 94
84	0.87992 49470 88	44 00722 84	7 83386 89	9981 57	2145 96	53 75	14 87
85	0.88036 50193 72	36 17335 95	7 93368 46	7835 61	2199 71	38 88	15 22
86	0.88072 67529 67	28 23967 49	8 01204 07	5635 90	2238 59	23 66	15 79
87	0.88100 91497 16	20 22763 42	8 06839 97	3397 31	2262 25	+ 7 87	15 74
88	0.88121 14260 58	12 15923 45	8 10237 28	+ 1135 06	2270 12	- 7 87	15 79
89	0.88133 30184 03	+ 4 05686 17	8 11372 34	- 1135 06	2262 25	23 66	15 22
90	0.88137 35870 20	- 4 05686 17	8 10237 28	3397 31	2238 59	38 88	14 87

0.	E.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0°	1.57079 63267 95	11 96176 67	23 91715 64	1913 22	1275 77	52	20
1	1.57067 67091 28	35 87892 31	23 89802 42	3188 99	1276 29	72	10
2	1.57031 79198 97	59 77694 73	23 86613 43	4465 28	1277 01	82	37
3	1.56972 91504 24	83 64308 16	23 82148 15	5742 29	1277 83	1 19	9
4	1.56888 37196 08	107 46456 31	23 76405 86	7020 12	1279 02	1 28	32
5	1.56780 90739 77	131 22862 17	23 69385 74	8299 14	1280 30	1 60	16
6	1.56649 67877 60	154 92247 91	23 61086 60	9579 44	1281 90	1 76	37
7	1.56494 75629 69	178 53334 51	23 51507 16	10861 34	1283 66	2 13	13
8	1.56316 22295 18	202 04841 67	23 40645 82	12145 00	1285 79	2 26	43
9	1.56114 17453 51	225 45487 49	23 28500 82	13430 79	1288 05	2 69	19
10	1.55888 71966 02	248 73988 31	23 25070 03	14718 84	1290 74	2 88	39
11	1.55639 97977 71	271 89058 34	23 00351 19	16009 58	1293 62	3 27	35
12	1.55368 08919 37	294 89409 53	22 84341 61	17303 20	1296 89	3 62	35
13	1.55073 19509 84	317 73751 14	22 67038 41	18600 09	1300 51	3 97	42
14	1.54755 45758 70	340 40789 55	22 48438 32	19900 60	1304 48	4 39	46
15	1.54415 04969 15	362 89227 87	22 28537 72	21205 08	1308 87	4 85	38
16	1.54052 15741 28	385 17765 59	22 07332 64	22513 95	1313 72	5 23	61
17	1.53666 97975 69	407 25098 23	21 84818 69	23827 67	1318 95	5 84	50
18	1.53259 72877 46	429 09916 92	21 60991 02	25146 62	1324 79	6 34	60
19	1.52830 62960 54	450 70907 94	21 35844 40	26471 41	1331 13	6 94	53
20	1.52379 92052 60	472 06752 34	21 09372 99	27802 54	1338 07	7 47	86
21	1.51907 85300 26	493 16125 33	20 81570 45	29140 61	1345 54	8 33	62
22	1.51414 69174 93	513 97695 78	20 52429 84	30486 15	1353 87	8 95	86
23	1.50900 71479 15	534 50125 62	20 21943 69	31840 02	1362 82	9 81	78
24	1.50366 21353 53	554 72069 31	19 90103 67	33202 84	1372 63	10 59	98
25	1.49811 49284 22	574 62172 98	19 56900 83	34575 47	1383 22	11 57	1 12
26	1.49236 87111 24	594 19073 81	19 22325 36	35958 69	1394 79	12 69	88
27	1.48642 68037 43	613 41399 17	18 86366 67	37353 48	1407 48	13 57	1 37
28	1.48029 26638 26	632 27765 84	18 49013 19	38760 96	1421 05	14 94	1 19
29	1.47396 98872 42	650 76779 03	18 10252 23	40182 01	1435 99	16 13	1 45
30	1.46746 22093 39	668 87031 26	17 70070 22	41618 00	1452 12	17 58	1 44
31	1.46077 35062 13	686 57101 48	17 28452 22	43070 12	1469 70	19 02	1 75
32	1.45390 77960 65	703 85553 70	16 85382 10	44539 82	1488 72	20 77	1 69
33	1.44686 92406 95	720 70935 80	16 40842 28	46028 54	1509 49	22 46	1 99
34	1.43966 21471 15	737 11778 08	15 94813 74	47538 03	1531 95	24 45	2 11
35	1.43229 09693 07	753 06591 82	15 47275 71	49069 98	1556 40	26 56	2 29
36	1.42476 03101 25	768 53867 53	14 98205 73	50626 38	1582 96	28 85	2 52
37	1.41707 49233 72	783 52073 26	14 47579 35	52209 34	1611 81	31 37	2 75
38	1.40923 97160 46	797 99652 61	13 95370 01	53821 15	1643 16	34 12	2 98
39	1.40125 97507 85	811 95022 62	13 41548 86	55464 31	1677 28	37 10	3 25
40	1.39314 02485 23	825 36571 48	12 86084 55	57141 59	1714 38	40 35	3 61
41	1.38488 65913 75	838 22656 03	12 28942 96	58855 97	1754 73	43 96	3 90
42	1.37650 43257 72	850 51598 99	11 70086 99	60610 70	1798 69	47 86	4 38
43	1.36799 91658 73	862 21685 98	11 09476 29	62409 39	1846 55	52 24	4 66
44	1.35937 69972 75	873 31162 27	10 47066 90	64255 94	1898 79	56 90	5 29
45	1.35064 38810 48	883 78229 17	9 82810 96	66154 73	1955 69	62 19	5 79

0.	F.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0°	1.57079 63267 95	11 96313 32	23 93629 13	3009 84	2014 58	12 10	4 85
1	1.57091 59581 27	35 89942 45	23 96638 97	5024 42	2026 68	16 95	5 11
2	1.57127 49523 72	59 86581 42	24 01663 39	7051 10	2043 63	22 06	4 99
3	1.57187 36105 14	83 88244 81	24 08714 49	9094 73	2065 69	27 05	5 36
4	1.57271 24349 95	107 96959 30	24 17809 22	11160 42	2092 74	32 41	5 37
5	1.57379 21309 25	132 14768 52	24 28969 64	13253 16	2125 15	37 78	5 65
6	1.57511 36077 77	156 43738 16	24 42222 80	15378 31	2162 93	43 43	5 81
7	1.57667 79815 93	180 85960 96	24 57601 11	17541 24	2206 36	49 24	6 16
8	1.57848 65776 89	205 43562 07	24 75142 35	19747 60	2255 60	55 40	6 36
9	1.58054 09338 96	230 18704 42	24 94889 95	22003 20	2311 00	61 76	6 84
10	1.58284 28043 38	255 13594 37	25 16893 15	24314 20	2372 76	68 60	7 02
11	1.58539 41637 75	280 30487 52	25 41207 35	26686 96	2441 36	75 62	7 66
12	1.58819 72125 27	305 71694 87	25 67894 31	29128 32	2516 98	83 28	7 98
13	1.59125 43820 14	331 39589 18	25 97022 63	31645 30	2600 26	91 26	8 55
14	1.59456 83409 32	357 36611 81	26 28667 93	34245 56	2691 52	99 81	9 25
15	1.59814 20021 13	383 65279 74	26 62913 49	36937 08	2791 33	109 06	9 76
16	1.60197 85300 87	410 28193 23	26 99850 57	39728 41	2900 39	118 82	10 54
17	1.60608 13494 10	437 28043 80	27 39578 98	42628 80	3019 21	129 36	11 45
18	1.61045 41537 90	464 67622 78	27 82207 78	45648 01	3148 57	140 81	12 24
19	1.61510 09160 68	492 49830 56	28 27855 79	48796 58	3289 38	153 05	13 30
20	1.62002 58991 24	520 77686 35	28 76652 37	52085 96	3442 43	166 35	14 46
21	1.62523 36677 59	549 54338 72	29 28738 33	55528 39	3608 78	180 81	15 69
22	1.63072 91016 31	578 83077 05	29 84266 72	59137 17	3789 59	196 50	17 04
23	1.63651 74093 36	608 67343 77	30 43403 89	62926 76	3986 09	213 54	18 69
24	1.64260 41437 13	639 10747 66	31 06330 65	66912 85	4199 63	232 23	20 46
25	1.64899 52184 79	670 17078 31	31 73243 50	71112 48	4431 86	252 69	22 27
26	1.65569 69263 10	701 90321 81	32 44355 98	75544 34	4684 55	274 96	24 65
27	1.66271 59584 91	734 34677 79	33 19900 32	80228 89	4959 51	299 61	27 00
28	1.67005 94262 70	767 54578 11	34 00129 21	85188 40	5259 12	326 61	29 77
29	1.67773 48840 81	801 54707 32	34 85317 61	90447 52	5585 73	356 38	33 06
30	1.68575 03548 13	836 40024 93	35 75765 13	96033 25	5942 11	389 44	36 32
31	1.69411 43573 06	872 15790 06	36 71798 38	1 01975 36	6331 55	425 76	40 56
32	1.70283 59363 12	908 87588 44	37 73773 74	1 08306 91	6757 31	466 32	44 96
33	1.71192 46951 56	946 61362 18	38 82080 65	1 15064 22	7223 63	511 28	50 12
34	1.72139 08313 74	985 43442 83	39 97144 87	1 22287 85	7734 91	561 40	56 03
35	1.73124 51756 57	1025 40587 70	41 19432 72	1 30022 76	8296 31	617 43	62 50
36	1.74149 92344 27	1066 60020 42	42 49455 48	1 38319 07	8913 74	679 93	70 55
37	1.75216 52364 69	1109 09475 90	43 87774 55	1 47232 81	9593 67	750 48	78 89
38	1.76325 61840 59	1152 97250 45	45 35007 36	1 56826 48	10344 15	829 37	89 18
39	1.77478 59091 04	1198 32257 81	46 91833 84	1 67170 63	11173 52	918 55	100 81
40	1.78676 91348 85	1245 24091 65	48 59004 47	1 78344 15	12092 07	1019 36	114 30
41	1.79922 15440 50	1293 83096 12	50 37348 62	1 90436 22	13111 43	1133 66	129 51
42	1.81215 98536 62	1344 20444 74	52 27784 84	2 03547 65	14245 09	1263 17	148 62
43	1.82560 18981 36	1396 48229 58	54 31332 49	2 17792 74	15508 26	1411 79	168 75
44	1.83956 67210 94	1450 79562 07	56 49125 23	2 33301 00	16920 05	1580 54	194 26
45	1.85407 46773 01	1507 28687 30	58 82426 23	2 50221 05	18500 59	1774 80	223 61

0.	E.	Diff.	0.	F.	Diff.
45°	1.35064 38810 48	883 78229 17	45°	1.85407 46773 01	1507 28687 30
46	1.34180 60581 31	893 61040 13	46	1.86914 75460 31	1566 11113 53
47	1.33286 99541 18	902 77696 36	47	1.88480 86573 84	1627 43760 81
48	1.32384 21844 82	911 26242 17	48	1.90108 30334 65	1691 45129 73
49	1.31472 95602 65	919 04659 68	49	1.91799 75464 38	1758 35495 68
50	1.30553 90942 97	926 10863 03	50	1.93558 10960 06	1828 37132 46
51	1.29627 80079 94	932 42692 11	51	1.95386 48092 52	1901 74570 23
52	1.28695 37387 83	937 97905 33	52	1.97288 22662 75	1978 74894 60
53	1.27757 39482 50	942 74171 86	53	1.99266 97557 35	2059 68094 66
54	1.26814 65310 64	946 69062 86	54	2.01326 65652 01	2144 87469 85
55	1.25867 96247 78	949 80041 71	55	2.03471 53121 86	2234 70106 11
56	1.24918 16206 07	952 04453 18	56	2.05706 23227 97	2329 57438 95
57	1.23966 11752 89	953 39511 03	57	2.08035 80666 92	2429 95917 99
58	1.23012 72241 86	953 82284 32	58	2.10465 76584 91	2536 37799 08
59	1.22058 89957 54	953 29681 86	59	2.13002 14383 99	2649 42091 01
60	1.21105 60275 68	951 78434 54	60	2.15651 56475 00	2769 75694 49
61	1.20153 81841 14	949 25075 34	61	2.18421 32169 49	2898 14780 32
62	1.19204 56765 80	945 65916 35	62	2.21319 46949 81	3035 46467 28
63	1.18258 90849 45	940 97022 61	63	2.24354 93416 99	3182 70879 03
64	1.17317 93826 84	935 14181 91	64	2.27537 64296 12	3341 03685 55
65	1.16382 79644 93	928 12869 68	65	2.30878 67981 67	3511 79262 81
66	1.15454 66775 25	919 88208 44	66	2.34390 47244 47	3696 54661 57
67	1.14534 78566 81	910 34919 97	67	2.38087 01906 04	3897 14631 35
68	1.13624 43646 84	899 47269 27	68	2.41984 16537 39	4115 78045 65
69	1.12724 96377 57	887 18997 87	69	2.46099 94583 04	4355 06206 98
70	1.11837 77379 70	873 43244 27	70	2.50455 00790 02	4618 13706 25
71	1.10964 34135 43	858 12447 85	71	2.55073 14496 27	4908 82804 34
72	1.10106 21687 58	841 18232 22	72	2.59981 97300 61	5231 82745 69
73	1.09265 03455 36	822 51261 62	73	2.65213 80046 30	5592 96099 60
74	1.08442 52193 74	802 01062 98	74	2.70806 76145 90	5999 55307 79
75	1.07640 51130 76	779 55800 98	75	2.76806 31453 69	6460 94375 49
76	1.06860 95329 78	755 01992 24	76	2.83267 25829 18	6989 23577 52
77	1.06105 93337 54	728 24133 47	77	2.90256 49406 70	7600 40105 11
78	1.05377 69204 07	699 04210 62	78	2.97856 89511 81	8315 96608 58
79	1.04678 64993 45	667 21036 39	79	3.06172 86120 39	9165 66398 49
80	1.04011 43957 06	632 49333 15	80	3.15338 52518 88	10191 76902 55
81	1.03378 94623 91	594 58426 50	81	3.25530 29421 43	11456 50845 25
82	1.02784 36197 41	553 10315 73	82	3.36986 80266 68	13055 44725 05
83	1.02231 25881 68	507 56698 27	83	3.50042 24991 73	15143 34703 06
84	1.01723 69183 41	457 34121 07	84	3.65185 59694 79	17988 60302 87
85	1.01266 35062 34	401 55493 27	85	3.83174 19997 66	22101 61697 83
86	1.00864 79569 07	338 93696 98	86	4.05275 81695 49	28589 58064 51
87	1.00525 85872 09	267 45016 81	87	4.33865 39760 00	40406 32892 79
88	1.00258 40855 28	183 25078 26	88	4.74271 72652 79	69219 25643 46
89	1.00075 15777 02	75 15777 02	89	5.43490 98296 25	
90	1.00000 00000 00		$\frac{1}{2}\pi$	log hyp. $\frac{1}{2}$.	

TABLE IX.

345

of p. 417.

ϕ .	$E(0^\circ)$.	$E(1^\circ)$.	$E(2^\circ)$.	$E(3^\circ)$.	$E(4^\circ)$.	$E(5^\circ)$.
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 32925	0.01745 32922	0.01745 32914	0.01745 32901	0.01745 32882	0.01745 32858
2	0.03490 65850	0.03490 65829	0.03490 65764	0.03490 65656	0.03490 65505	0.03490 65312
3	0.05235 98776	0.05235 98703	0.05235 98484	0.05235 98121	0.05235 97612	0.05235 96960
4	0.06981 31701	0.06981 31528	0.06981 31010	0.06981 30149	0.06981 28944	0.06981 27397
5	0.08726 64626	0.08726 64290	0.08726 63278	0.08726 61597	0.08726 59244	0.08726 56225
6	0.10471 97551	0.10471 96970	0.10471 95224	0.10471 92320	0.10471 88258	0.10471 83045
7	0.12217 30476	0.12217 29554	0.12217 26784	0.12217 22176	0.12217 15731	0.12217 07458
8	0.13962 63402	0.13962 62026	0.13962 57896	0.13962 51023	0.13962 41411	0.13962 29073
9	0.15707 96327	0.15707 94369	0.15707 88497	0.15707 78720	0.15707 65048	0.15707 47499
10	0.17453 29252	0.17453 26569	0.17453 18525	0.17453 05129	0.17452 86395	0.17452 62350
11	0.19198 62177	0.19198 58611	0.19198 47917	0.19198 30110	0.19198 05208	0.19197 73243
12	0.20943 95102	0.20943 90479	0.20943 76615	0.20943 53528	0.20943 21244	0.20942 79803
13	0.22689 28028	0.22689 22158	0.22689 04558	0.22688 75250	0.22688 34266	0.22687 81657
14	0.24434 60953	0.24434 53635	0.24434 31688	0.24433 95143	0.24433 44039	0.24432 78438
15	0.26179 93878	0.26179 84893	0.26179 57948	0.26179 13078	0.26178 50333	0.26177 69787
16	0.27925 26803	0.27925 15919	0.27924 83281	0.27924 28927	0.27923 52920	0.27922 55350
17	0.29670 59728	0.29670 46700	0.29669 07631	0.29669 42565	0.29668 51579	0.29667 34781
18	0.31415 92654	0.31415 77221	0.31415 30943	0.31414 53870	0.31413 46094	0.31412 07742
19	0.33161 25579	0.33161 07469	0.33160 53164	0.33159 62723	0.33158 36253	0.33156 73900
20	0.34906 58504	0.34906 37432	0.34905 74244	0.34904 69007	0.34903 21847	0.34901 32933
21	0.36651 91429	0.36651 67096	0.36650 94131	0.36649 72610	0.36648 02677	0.36645 84526
22	0.38397 24354	0.38396 96451	0.38396 12776	0.38394 73420	0.38392 78546	0.38390 28376
23	0.40142 57280	0.40142 25483	0.40141 30133	0.40139 71333	0.40137 49266	0.40134 64184
24	0.41887 90205	0.41887 54182	0.41886 46156	0.41884 66245	0.41882 14653	0.41878 91667
25	0.43633 23130	0.43632 82535	0.43631 60800	0.43629 58056	0.43626 74531	0.43623 10547
26	0.45378 56055	0.45378 10534	0.45376 74022	0.45374 46670	0.45371 28731	0.45367 20559
27	0.47123 88980	0.47123 38166	0.47121 85783	0.47119 31996	0.47115 77087	0.47111 21449
28	0.48869 21906	0.48868 65424	0.48866 96043	0.48864 13947	0.48860 19445	0.48855 12971
29	0.50614 54831	0.50613 92296	0.50612 04765	0.50608 92439	0.50604 55656	0.50598 94895
30	0.52359 87756	0.52359 18776	0.52357 11914	0.52353 67391	0.52348 85580	0.52342 67000
31	0.54105 20681	0.54104 44854	0.54102 17457	0.54098 38730	0.54093 09081	0.54086 29077
32	0.55850 53606	0.55849 70522	0.55847 21362	0.55843 06385	0.55837 26035	0.55829 80929
33	0.57595 86532	0.57594 95774	0.57592 23598	0.57587 70289	0.57581 36324	0.57573 22372
34	0.59341 19457	0.59340 20602	0.59337 24140	0.59332 30381	0.59325 39838	0.59316 53236
35	0.61086 52382	0.61085 44999	0.61082 22962	0.61076 86604	0.61069 36477	0.61059 73361
36	0.62831 85307	0.62830 68961	0.62827 20041	0.62821 38904	0.62813 26146	0.62802 82601
37	0.64577 18232	0.64575 92482	0.64572 15355	0.64565 87236	0.64557 08761	0.64545 80825
38	0.66322 51158	0.66321 15557	0.66317 08885	0.66310 31555	0.66300 84247	0.66288 67913
39	0.68067 84083	0.68066 38181	0.68062 00615	0.68054 71826	0.68044 52536	0.68031 43760
40	0.69813 17008	0.69811 60351	0.69806 90531	0.69799 08014	0.69788 13568	0.69774 08275
41	0.71558 49933	0.71556 82065	0.71551 78619	0.71543 40091	0.71531 67296	0.71516 61379
42	0.73303 82858	0.73302 03319	0.73296 64871	0.73287 68035	0.73275 13677	0.73259 03009
43	0.75049 15784	0.75047 24112	0.75041 49277	0.75031 91828	0.75018 52681	0.75001 33113
44	0.76794 48709	0.76792 44442	0.76786 31831	0.76776 11458	0.76761 84283	0.76743 51657
45	0.78539 81634	0.78537 64308	0.78531 12532	0.78520 26915	0.78505 08471	0.78485 58619

ϕ .	F(0°).		F(1°).		F(2°).		F(3°).		F(4°).		F(5°).	
0°	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000
1	0.01745	32925	0.01745	32928	0.01745	32936	0.01745	32949	0.01745	32969	0.01745	32993
2	0.03490	65850	0.03490	65871	0.03490	65936	0.03490	66044	0.03490	66196	0.03490	66389
3	0.05235	98776	0.05235	98848	0.05235	99067	0.05235	99430	0.05235	99939	0.05235	100591
4	0.06981	31701	0.06981	31873	0.06981	32391	0.06981	33252	0.06981	34458	0.06981	36004
5	0.08726	64626	0.08726	64962	0.08726	65972	0.08726	67655	0.08726	70008	0.08726	73027
6	0.10471	97551	0.10471	98132	0.10471	99877	0.10472	102782	0.10472	106844	0.10472	112058
7	0.12217	30476	0.12217	31399	0.12217	32467	0.12217	33776	0.12217	35222	0.12217	36849
8	0.13962	63402	0.13962	64777	0.13962	68905	0.13962	75780	0.13962	85392	0.13962	97731
9	0.15707	96327	0.15707	98284	0.15708	104155	0.15708	13934	0.15708	17606	0.15708	21556
10	0.17453	29252	0.17453	31934	0.17453	39978	0.17453	53376	0.17453	72110	0.17453	96158
11	0.19198	62177	0.19198	65742	0.19198	76437	0.19198	94245	0.19199	119149	0.19199	151118
12	0.20943	95102	0.20943	99725	0.20944	13589	0.20944	36678	0.20944	68965	0.20945	10412
13	0.22689	28028	0.22689	33896	0.22689	51496	0.22689	80807	0.22690	21795	0.22690	74414
14	0.24434	60953	0.24434	68270	0.24434	90217	0.24435	26765	0.24435	77876	0.24436	43491
15	0.26179	93878	0.26180	102863	0.26180	29809	0.26180	74682	0.26181	37437	0.26182	18003
16	0.27925	26803	0.27925	37688	0.27925	70326	0.27926	24686	0.27927	100706	0.27927	98303
17	0.29670	59728	0.29670	72757	0.29671	11827	0.29671	76900	0.29672	67904	0.29673	84738
18	0.31415	92654	0.31416	108087	0.31416	54366	0.31417	31448	0.31418	39248	0.31419	77648
19	0.33161	25579	0.33161	43689	0.33161	97996	0.33162	88449	0.33164	14950	0.33165	77366
20	0.34906	58504	0.34906	79576	0.34907	42768	0.34908	48019	0.34909	95219	0.34911	84215
21	0.36651	91429	0.36652	15762	0.36652	88732	0.36654	10272	0.36655	80255	0.36657	98510
22	0.38397	24354	0.38397	52258	0.38398	35938	0.38399	75318	0.38401	70255	0.38404	20556
23	0.40142	57280	0.40142	89077	0.40143	84433	0.40145	43262	0.40147	65407	0.40150	50652
24	0.41887	90205	0.41888	26228	0.41889	34262	0.41891	14209	0.41893	65896	0.41896	89085
25	0.43633	23130	0.43633	63725	0.43634	85470	0.43636	88259	0.43639	71899	0.43643	36130
26	0.45378	56055	0.45379	101577	0.45380	38100	0.45382	65507	0.45385	83587	0.45389	92055
27	0.47123	88980	0.47124	39795	0.47125	92192	0.47128	46044	0.47132	11121	0.47136	57116
28	0.48869	21906	0.48869	78387	0.48871	47785	0.48874	29958	0.48878	24660	0.48883	31558
29	0.50614	54831	0.50615	17365	0.50617	104917	0.50620	17334	0.50624	54353	0.50630	15615
30	0.52359	87756	0.52360	56736	0.52362	63622	0.52366	108251	0.52370	90341	0.52377	109509
31	0.54105	20681	0.54105	96508	0.54108	23934	0.54112	102784	0.54117	32759	0.54124	13450
32	0.55850	53606	0.55851	36692	0.55853	85885	0.55858	103004	0.55863	81732	0.55871	27636
33	0.57595	86532	0.57596	77291	0.57599	49504	0.57604	102978	0.57610	37380	0.57618	52253
34	0.59341	19457	0.59342	18314	0.59345	14819	0.59350	108768	0.59356	99812	0.59365	87474
35	0.61086	52382	0.61087	59767	0.61090	81855	0.61096	18430	0.61103	69131	0.61113	33460
36	0.62831	85307	0.62833	101657	0.62836	50634	0.62842	32017	0.62850	45430	0.62860	90357
37	0.64577	18232	0.64578	43987	0.64582	21178	0.64588	49576	0.64597	28795	0.64608	58300
38	0.66322	51158	0.66323	86764	0.66327	93507	0.66334	71152	0.66344	19301	0.66356	37410
39	0.68067	84083	0.68069	29991	0.68073	67637	0.68080	96781	0.68091	17019	0.68104	27792
40	0.69813	17008	0.69814	73672	0.69819	43582	0.69827	26497	0.69838	22006	0.69852	29541
41	0.71558	49933	0.71560	17809	0.71565	21356	0.71573	60328	0.71585	34313	0.71600	42737
42	0.73303	82858	0.73305	62406	0.73311	109968	0.73319	98298	0.73332	53982	0.73348	67445
43	0.75049	15784	0.75051	107464	0.75056	82426	0.75066	40424	0.75079	81044	0.75097	103717
44	0.76794	48709	0.76796	52985	0.76802	65736	0.76812	86718	0.76827	15525	0.76845	51590
45	0.78539	81634	0.78541	98970	0.78548	50901	0.78559	37189	0.78574	57437	0.78594	11090

TABLE IX.

ϕ .	E (0°).		E (1°).		E (2°).		E (3°).		E (4°).		E (5°).	
45°	0.78539	81634	0.78537	64308	0.78531	12532	0.78520	26915	0.78505	08471	0.78485	58619
46	0.80285	14559	0.80282	83710	0.80275	91377	0.80264	38199	0.80248	25239	0.80227	53990
47	0.82030	47484	0.82028	02650	0.82020	68368	0.82008	45310	0.81991	34592	0.81969	37777
48	0.83775	80410	0.83773	21126	0.83765	43507	0.83752	48258	0.83734	36542	0.83711	10001
49	0.85521	13335	0.85518	39142	0.85510	16802	0.85496	47054	0.85477	31114	0.85452	70695
50	0.87266	46260	0.87263	56698	0.87254	88259	0.87240	41716	0.87220	18336	0.87194	19908
51	0.89011	79185	0.89008	73796	0.88999	57889	0.88984	32266	0.88952	98250	0.88935	57703
52	0.90757	12110	0.90753	90441	0.90744	25703	0.90728	18732	0.90705	70905	0.90676	84157
53	0.92502	45036	0.92499	06635	0.92488	91718	0.92472	01148	0.92448	36358	0.92417	99359
54	0.94247	77961	0.94244	22384	0.94233	55948	0.94215	79551	0.94190	94677	0.94159	03414
55	0.95993	10886	0.95989	37692	0.95978	18414	0.95959	53983	0.95933	45936	0.95899	96439
56	0.97738	43811	0.97734	52564	0.97722	79136	0.97703	24491	0.97675	90221	0.97640	78566
57	0.99483	76736	0.99479	67005	0.99467	38138	0.99446	91128	0.99418	27623	0.99381	49939
58	1.01229	09662	1.01224	81023	1.01211	95443	1.01190	53950	1.01160	58244	1.01122	10715
59	1.02974	42587	1.02969	94623	1.02956	51081	1.02934	13019	1.02902	82193	1.02862	61065
60	1.04719	75512	1.04715	07815	1.04701	05081	1.04677	68402	1.04644	99586	1.04603	01172
61	1.06465	08437	1.06460	20604	1.06445	57474	1.06421	20169	1.06387	10551	1.06343	31232
62	1.08210	41362	1.08205	32999	1.08190	08293	1.08164	68394	1.08129	15219	1.08083	51453
63	1.09955	74288	1.09950	45011	1.09934	57573	1.09908	13157	1.09871	13732	1.09823	62055
64	1.11701	07213	1.11695	56647	1.11679	05351	1.11651	54542	1.11613	06237	1.11563	63269
65	1.13446	40138	1.13440	67917	1.13423	51668	1.13394	92636	1.13354	92892	1.13303	55340
66	1.15191	73063	1.15185	78833	1.15167	96563	1.15138	27531	1.15096	73858	1.15043	38520
67	1.16937	05988	1.16930	89403	1.16912	40079	1.16881	59323	1.16838	49306	1.16783	13076
68	1.18682	38914	1.18675	99640	1.18656	82260	1.18624	88110	1.18580	19413	1.18522	79284
69	1.20427	71839	1.20421	09554	1.20401	23152	1.20368	13996	1.20321	84361	1.20262	37429
70	1.22173	04764	1.22166	19158	1.22145	62802	1.22111	37087	1.22063	44340	1.22001	87808
71	1.23918	37689	1.23911	28463	1.23890	01258	1.23854	57494	1.23804	99545	1.23741	30725
72	1.25663	70614	1.25656	37484	1.25634	38572	1.25597	75331	1.25546	50178	1.25480	66497
73	1.27409	03540	1.27401	46231	1.27378	74795	1.27340	90712	1.27287	96445	1.27219	95445
74	1.29154	36465	1.29146	54719	1.29123	09981	1.29084	03757	1.29029	38559	1.28959	17902
75	1.30899	69390	1.30891	62961	1.30867	44183	1.30827	14589	1.30770	76737	1.30698	34206
76	1.32645	02315	1.32636	70971	1.32611	77457	1.32570	23333	1.32512	11203	1.32437	44705
77	1.34390	35240	1.34381	78763	1.34356	09859	1.34313	30116	1.34253	42180	1.34176	49755
78	1.36135	08166	1.36126	86352	1.36100	41449	1.36056	35068	1.35994	69901	1.35915	49714
79	1.37881	01091	1.37871	93753	1.37844	72283	1.37799	38321	1.37735	94602	1.37654	44951
80	1.39626	34016	1.39617	00979	1.39589	02422	1.39542	40009	1.39477	16520	1.39393	35839
81	1.41371	66941	1.41362	08047	1.41333	31926	1.41285	40269	1.41218	35898	1.41132	22755
82	1.43116	99866	1.43107	14971	1.43077	60857	1.43028	39238	1.42959	52980	1.42871	06083
83	1.44862	32792	1.44852	21767	1.44821	89276	1.44771	37056	1.44700	68014	1.44609	86211
84	1.46607	65717	1.46597	28452	1.46566	17245	1.46514	33863	1.46441	81251	1.46348	63530
85	1.48352	98642	1.48342	35039	1.48310	44830	1.48257	29801	1.48182	92943	1.48087	38434
86	1.50098	31567	1.50087	41547	1.50054	72092	1.50000	25015	1.49924	03346	1.49826	11322
87	1.51843	64492	1.51832	47989	1.51798	99094	1.51743	19647	1.51665	12715	1.51564	82593
88	1.53588	97418	1.53577	54383	1.53543	25904	1.53486	13842	1.53406	21307	1.53303	52650
89	1.55334	30343	1.55322	60745	1.55287	52585	1.55229	07746	1.55147	29381	1.55042	21898
90	1.57079	63268	1.57067	67091	1.57031	79199	1.56972	01504	1.56888	37196	1.56780	90740

ϕ .	F (0°).	F (1°).	F (2°).	F (3°).	F (4°).	F (5°).
45°	0.78539 81634	0.78541 98970	0.78548 50901	0.78559 37189	0.78574 57437	0.78594 11090
46	0.80285 14559	0.80287 45419	0.80294 37923	0.80305 91841	0.80322 06788	0.80342 82223
47	0.82030 47484	0.82032 92332	0.82040 26801	0.82052 50671	0.82069 63572	0.82091 64986
48	0.83775 80410	0.83778 39707	0.83786 17530	0.83799 13671	0.83817 27777	0.83840 59360
49	0.85521 13335	0.85523 87544	0.85532 10106	0.85545 80829	0.85564 99383	0.85589 65312
50	0.87266 46260	0.87269 35840	0.87278 04521	0.87292 52127	0.87312 78357	0.87338 82795
51	0.89011 79185	0.89014 84593	0.89024 00765	0.89039 27542	0.89060 64661	0.89088 11746
52	0.90757 12110	0.90760 33800	0.90769 98825	0.90786 07049	0.90808 58246	0.90837 52092
53	0.92502 45036	0.92505 83458	0.92515 98687	0.92532 90614	0.92556 59053	0.92587 03742
54	0.94247 77961	0.94251 33561	0.94262 00334	0.94279 78199	0.94304 67018	0.94336 66594
55	0.95993 10886	0.95996 84106	0.96008 03747	0.96026 69762	0.96052 82064	0.96086 40531
56	0.97738 43811	0.97742 35087	0.97754 08905	0.97773 65256	0.97801 04108	0.97836 25421
57	0.99483 76736	0.99487 86497	0.99500 15785	0.99520 64627	0.99549 33057	0.99586 21123
58	1.01229 09662	1.01233 38332	1.01246 24362	1.01267 67820	1.01297 68811	1.01336 27478
59	1.02974 42587	1.02978 90584	1.02992 34609	1.03014 74774	1.03046 11261	1.03086 44316
60	1.04719 75512	1.04724 45246	1.04738 46496	1.04761 85423	1.04794 60290	1.04836 71455
61	1.06465 08437	1.06469 96308	1.06484 59991	1.06508 99695	1.06543 15770	1.06587 08698
62	1.08210 41362	1.08215 49765	1.08230 75061	1.08256 17516	1.08291 77571	1.08337 55838
63	1.09955 74288	1.09961 03607	1.09976 91671	1.10003 38806	1.10040 45551	1.10088 12655
64	1.11701 07213	1.11706 57824	1.11723 09784	1.11750 63482	1.11789 19563	1.11838 78915
65	1.13446 40138	1.13452 12407	1.13469 29361	1.13497 91456	1.13537 99446	1.13589 54377
66	1.15191 73063	1.15197 67345	1.15215 50360	1.15245 22636	1.15286 85041	1.15340 38784
67	1.16937 05988	1.16943 22628	1.16961 72740	1.16992 56927	1.17035 76177	1.17091 31870
68	1.18682 38914	1.18688 78245	1.18707 96457	1.18739 94229	1.18784 72677	1.18842 33359
69	1.20427 71839	1.20434 34184	1.20454 21465	1.20487 34439	1.20533 74357	1.20593 42963
70	1.22173 04764	1.22179 90434	1.22200 47715	1.22234 77450	1.22282 81027	1.22344 60385
71	1.23918 37689	1.23925 46981	1.23946 75160	1.23982 23152	1.24031 92491	1.24095 85319
72	1.25663 70614	1.25671 03815	1.25693 03749	1.25729 71432	1.25781 08548	1.25847 17448
73	1.27409 03540	1.27416 60921	1.27439 33430	1.27477 22172	1.27530 28990	1.27598 56448
74	1.29154 36465	1.29162 18288	1.29185 64150	1.29224 75255	1.29279 53603	1.29350 01985
75	1.30899 69390	1.30907 75899	1.30931 95853	1.30972 30556	1.31028 82170	1.31101 53717
76	1.32645 02315	1.32653 33743	1.32678 28487	1.32719 87951	1.32778 14468	1.32853 11296
77	1.34390 35240	1.34398 91805	1.34424 61993	1.34467 47312	1.34527 50268	1.34604 74364
78	1.36135 68166	1.36144 50069	1.36170 96313	1.36215 08509	1.36276 89339	1.36356 42559
79	1.37881 01091	1.37890 08524	1.37917 31390	1.37962 71409	1.38026 51446	1.38108 15511
80	1.39626 34016	1.39635 67151	1.39663 67161	1.39710 35878	1.39775 76349	1.39859 92845
81	1.41371 66941	1.41381 25937	1.41410 03569	1.41458 01780	1.41525 23804	1.41611 74179
82	1.43116 99866	1.43126 84867	1.43156 40551	1.43205 68976	1.43274 73566	1.43363 59128
83	1.44862 32792	1.44872 43925	1.44902 78045	1.44953 37325	1.45024 25385	1.45115 47302
84	1.46607 65717	1.46618 03095	1.46649 15989	1.46701 06688	1.46773 79010	1.46867 38306
85	1.48352 98342	1.48363 62361	1.48395 54319	1.48448 76922	1.48523 34187	1.48619 31743
86	1.50098 31567	1.50109 21708	1.50141 92972	1.50196 47884	1.50272 90660	1.50371 27211
87	1.51843 64492	1.51854 81120	1.51888 31883	1.51944 19428	1.52022 48171	1.52123 24308
88	1.53588 97418	1.53600 40580	1.53634 70988	1.53691 91410	1.53772 06464	1.53875 22628
89	1.55334 30343	1.55346 00072	1.55381 10223	1.55439 63684	1.55521 65277	1.55627 21764
90	1.57079 63268	1.57091 59581	1.57127 49524	1.57187 36105	1.57271 24350	1.57379 21309

TABLE IX.

ϕ .	E(5°).	E(6°).	E(7°).	E(8°).	E(9°).	E(10°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 32858	0.01745 32829	0.01745 32793	0.01745 32753	0.01745 32709	0.01745 32658
2	0.03490 65312	0.03490 65076	0.03490 64798	0.03490 64477	0.03490 64116	0.03490 63713
3	0.05235 96960	0.05235 96163	0.05235 95224	0.05235 94144	0.05235 92924	0.05235 91565
4	0.06981 27397	0.06981 25511	0.06981 23286	0.06981 20727	0.06981 17836	0.06981 14617
5	0.08726 56225	0.08726 52543	0.08726 48200	0.08726 43204	0.08726 37561	0.08726 31277
6	0.10471 83045	0.10471 76684	0.10471 69186	0.10471 60559	0.10471 50814	0.10471 39961
7	0.12217 07458	0.12216 97366	0.12216 85469	0.12216 71781	0.12216 56317	0.12216 39097
8	0.13962 29073	0.13962 14023	0.13961 96279	0.13961 75865	0.13961 52802	0.13961 27120
9	0.15707 47499	0.15707 26092	0.15707 00854	0.15706 71817	0.15706 39012	0.15706 02482
10	0.17452 62350	0.17452 33019	0.17451 98438	0.17451 58651	0.17451 13702	0.17450 63648
11	0.19197 73243	0.19197 34253	0.19196 88284	0.19196 35393	0.19195 75641	0.19195 09101
12	0.20942 79803	0.20942 29253	0.20941 69655	0.20941 01081	0.20940 23612	0.20939 37341
13	0.22687 81657	0.22687 17483	0.22686 41823	0.22685 54767	0.22684 56417	0.22683 46891
14	0.24432 78438	0.24431 98417	0.24431 04071	0.24429 95515	0.24428 72873	0.24427 36295
15	0.26177 69787	0.26176 71536	0.26175 55696	0.26174 22407	0.26172 71820	0.26171 04120
16	0.27922 55350	0.27921 36332	0.27919 96006	0.27918 34540	0.27916 52118	0.27914 48961
17	0.29667 34781	0.29665 92307	0.29664 24323	0.29662 31030	0.29660 12649	0.29657 69440
18	0.31412 07742	0.31410 38973	0.31408 39984	0.31406 11012	0.31403 52317	0.31400 64205
19	0.33156 73900	0.33154 75853	0.33152 42341	0.33149 73639	0.33146 70053	0.33143 31939
20	0.34901 32933	0.34899 02482	0.34896 30761	0.34893 18086	0.34889 64813	0.34885 71356
21	0.36645 84526	0.36643 18409	0.36640 04629	0.36636 43551	0.36632 35584	0.36627 81202
22	0.38390 28376	0.38387 23194	0.38383 63347	0.38379 49252	0.38374 81378	0.38369 60261
23	0.40134 64184	0.40131 16410	0.40127 06337	0.40122 34435	0.40117 01238	0.40111 07351
24	0.41878 91667	0.41874 97647	0.41870 33039	0.41864 98368	0.41858 94238	0.41852 21332
25	0.43623 10547	0.43618 66507	0.43613 42910	0.43607 40345	0.43600 59487	0.43593 01101
26	0.45367 20559	0.45362 22608	0.45356 35431	0.45349 59686	0.45341 96123	0.45333 45597
27	0.47111 21449	0.47105 65582	0.47099 10102	0.47091 55739	0.47083 03322	0.47073 53799
28	0.48855 12971	0.48848 95079	0.48841 66447	0.48833 27879	0.48823 80294	0.48813 24734
29	0.50598 94895	0.50592 10765	0.50584 04009	0.50574 75512	0.50564 26284	0.50552 57471
30	0.52342 67000	0.52335 12321	0.52326 22356	0.52315 98073	0.52304 40577	0.52291 51125
31	0.54086 29077	0.54077 99447	0.54068 21078	0.54056 95025	0.54044 22495	0.54030 04859
32	0.55829 80929	0.55820 71858	0.55809 99789	0.55797 65865	0.55783 71400	0.55768 17882
33	0.57573 22372	0.57563 29292	0.57551 58128	0.57538 10120	0.57522 86692	0.57505 89455
34	0.59316 53236	0.59305 71499	0.59292 95758	0.59278 27350	0.59261 67812	0.59243 18887
35	0.61059 73361	0.61047 98251	0.61034 12367	0.61018 17146	0.61000 14245	0.60980 05539
36	0.62802 82601	0.62790 09340	0.62775 07669	0.62757 79135	0.62738 25515	0.62716 48823
37	0.64545 80825	0.64532 04573	0.64515 81404	0.64497 12975	0.64476 01189	0.64452 48203
38	0.66288 67913	0.66273 83779	0.66256 33339	0.66236 18360	0.66213 40878	0.66188 03196
39	0.68031 43760	0.68015 46805	0.67996 63264	0.67974 95018	0.67950 44237	0.67923 13375
40	0.69774 08275	0.69756 93521	0.69736 70999	0.69713 42712	0.69687 10963	0.69657 78365
41	0.71516 61379	0.71498 23812	0.71476 56390	0.71451 61238	0.71423 40800	0.71391 98746
42	0.73259 03009	0.73239 37586	0.73216 19311	0.73189 50430	0.73159 33534	0.73125 71554
43	0.75001 33113	0.74980 34771	0.74955 59662	0.74927 10159	0.74894 89000	0.74858 99280
44	0.76743 51657	0.76721 15513	0.76694 73730	0.76664 40328	0.76630 07073	0.76591 80871
45	0.78485 58619	0.78461 79183	0.78433 72392	0.78401 40879	0.78364 87678	0.78324 16230

ϕ .	F(5°).	F(6°).	F(7°).	F(8°).	F(9°).	F(10°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 32993	0.01745 33022	0.01745 33057	0.01745 33096	0.01745 33142	0.01745 33193
2	0.03490 66389	0.03490 66624	0.03490 66903	0.03490 67222	0.03490 67584	0.03490 67988
3	0.05236 00591	0.05236 01388	0.05236 02327	0.05236 03406	0.05236 04627	0.05236 05986
4	0.06981 36004	0.06981 37891	0.06981 40115	0.06981 42674	0.06981 45566	0.06981 48785
5	0.08726 73027	0.08726 76710	0.08729 81052	0.08726 86048	0.08726 91693	0.08726 97977
6	0.10472 12058	0.10472 18419	0.10472 25918	0.10472 34545	0.10472 44292	0.10472 55146
7	0.12217 53496	0.12217 63588	0.12217 75487	0.12217 89177	0.12218 04643	0.12218 21868
8	0.13962 97731	0.13963 12783	0.13963 30530	0.13963 50948	0.13963 74016	0.13963 99707
9	0.15708 45156	0.15708 66567	0.15708 91809	0.15709 20854	0.15709 53669	0.15709 90214
10	0.17453 96158	0.17454 25495	0.17454 60083	0.17454 99883	0.17455 44849	0.17455 94928
11	0.19199 51118	0.19199 90117	0.19200 36098	0.19200 89009	0.19201 48790	0.19202 15370
12	0.20945 10412	0.20945 60975	0.20946 20593	0.20946 89197	0.20947 66711	0.20948 53044
13	0.22690 74414	0.22691 38607	0.22692 14297	0.22693 01398	0.22693 99814	0.22695 09432
14	0.24436 43491	0.24437 23539	0.24438 17927	0.24439 26549	0.24440 49285	0.24441 85996
15	0.26182 18003	0.26183 16291	0.26184 32190	0.26185 65573	0.26187 16291	0.26188 84178
16	0.27927 98303	0.27929 17371	0.27930 57780	0.27932 19374	0.27934 01978	0.27936 05390
17	0.29673 84738	0.29675 27281	0.29676 95376	0.29678 88841	0.29681 07469	0.29683 51022
18	0.31419 77648	0.31421 46508	0.31423 45644	0.31425 74844	0.31428 33866	0.31431 22432
19	0.33165 77366	0.33167 75530	0.33170 09236	0.33172 78235	0.33175 82247	0.33179 20952
20	0.34911 84215	0.34914 14816	0.34916 86786	0.34919 99842	0.34923 53662	0.34927 47881
21	0.36657 98510	0.36660 64818	0.36663 78914	0.36667 40474	0.36671 49136	0.36676 04485
22	0.38404 20556	0.38407 25978	0.38410 86220	0.38415 00918	0.38419 66665	0.38424 91996
23	0.40150 50652	0.40153 98724	0.40158 09287	0.40162 81938	0.40168 16219	0.40174 11611
24	0.41896 89085	0.41900 83469	0.41905 48681	0.41910 84271	0.41916 89732	0.41923 64489
25	0.43643 36130	0.43647 80614	0.43653 04946	0.43659 08630	0.43665 91110	0.43673 51751
26	0.45389 92055	0.45394 90543	0.45400 78607	0.45407 55705	0.45415 21227	0.45423 74478
27	0.47136 57116	0.47142 13626	0.47148 70168	0.47156 26154	0.47164 80920	0.47174 33709
28	0.48883 31558	0.48889 50217	0.48896 80113	0.48905 20611	0.48914 70994	0.48925 30441
29	0.50630 15615	0.50637 00652	0.50645 08902	0.50654 39681	0.50664 92217	0.50676 65626
30	0.52377 09509	0.52384 65254	0.52393 56974	0.52403 83939	0.52415 45320	0.52428 40174
31	0.54124 13450	0.54132 44326	0.54142 24744	0.54153 53929	0.54166 30998	0.54180 54945
32	0.55871 27636	0.55880 38153	0.55891 12604	0.55903 50167	0.55917 49905	0.55933 10754
33	0.57618 52253	0.57628 47005	0.57640 20922	0.57653 73134	0.57669 02657	0.57686 08368
34	0.59365 87474	0.59376 71134	0.59389 50040	0.59404 23283	0.59420 89831	0.59439 48504
35	0.61113 33460	0.61125 10770	0.61139 00276	0.61155 01033	0.61173 11960	0.61193 31827
36	0.62860 90357	0.62873 66126	0.62888 71924	0.62906 06769	0.62925 69538	0.62947 58952
37	0.64608 58300	0.64622 37399	0.64638 65251	0.64657 40843	0.64678 63015	0.64702 30443
38	0.66356 37410	0.66371 24764	0.66388 80497	0.66409 03573	0.66431 92799	0.66457 46811
39	0.68104 27792	0.68120 28374	0.68139 17877	0.68160 95243	0.68185 59253	0.68213 08512
40	0.69852 29541	0.69869 48365	0.69889 77578	0.69913 16101	0.69939 62698	0.69969 15948
41	0.71600 42737	0.71618 84855	0.71640 59760	0.71665 66362	0.71694 03410	0.71725 69467
42	0.73348 67445	0.73368 37941	0.73391 64558	0.73418 46203	0.73448 81618	0.73482 69361
43	0.75097 03717	0.75118 07698	0.75142 92076	0.75171 55767	0.75203 97510	0.75240 15867
44	0.76845 51590	0.76867 94180	0.76894 42395	0.76924 95158	0.76959 51223	0.76998 09164
45	0.78594 11090	0.78617 97426	0.78646 15563	0.78678 64447	0.78715 42851	0.78756 49375

TABLE IX.

ϕ .	E (5°).	E (6°).	E (7°).	E (8°).	E (9°).	E (10°).
45°	0.78485 58619	0.78461 79183	0.78433 72392	0.78401 40879	0.78364 87678	0.78324 16230
46	0.80227 53990	0.80202 26367	0.80172 44711	0.80138 11788	0.80099 30785	0.80056 c5318
47	0.81969 37777	0.81942 56873	0.81910 94337	0.81874 53068	0.81833 36407	0.81787 48149
48	0.83711 10001	0.83682 70732	0.83649 21310	0.83610 64767	0.83567 04606	0.83518 44795
49	0.85452 70695	0.85422 67992	0.85387 25694	0.85346 46973	0.85300 35488	0.85248 95386
50	0.87194 19908	0.87162 48723	0.87125 07585	0.87081 99805	0.87033 29203	0.86979 00106
51	0.88935 57703	0.88902 13013	0.88862 67103	0.88817 23421	0.88765 85949	0.88708 59197
52	0.90676 84157	0.90641 60974	0.90600 04396	0.90552 18013	0.90498 05969	0.90437 72954
53	0.92417 99559	0.92380 92734	0.92337 19640	0.92286 83811	0.92229 89548	0.92166 41731
54	0.94159 03414	0.94120 08443	0.94074 13038	0.94021 21076	0.93961 37019	0.93894 65933
55	0.95899 96439	0.95859 08269	0.95810 84820	0.95755 30108	0.95692 48760	0.95622 46023
56	0.97640 78566	0.97597 92402	0.97547 35240	0.97489 11238	0.97423 25187	0.97349 82518
57	0.99381 49939	0.99336 61047	0.99283 64580	0.99222 64835	0.99153 66764	0.99076 75987
58	1.01122 10715	1.01075 14433	1.01019 73149	1.00955 91299	1.00883 73999	1.00803 27052
59	1.02862 61065	1.02813 52804	1.02755 61278	1.02688 91063	1.02613 47438	1.02529 36387
60	1.04603 01172	1.04551 76423	1.04491 29325	1.04421 64596	1.04342 87670	1.04255 04719
61	1.06343 31232	1.06289 85571	1.06226 77674	1.06154 12394	1.06071 95327	1.05980 32824
62	1.08083 51453	1.08027 80550	1.07962 06732	1.07886 34989	1.07800 71078	1.07705 21528
63	1.09823 62055	1.09765 61674	1.09697 16929	1.09618 32943	1.09529 15632	1.09429 71705
64	1.11563 63269	1.11503 29278	1.11432 08717	1.11350 06847	1.11257 29737	1.11153 84277
65	1.13303 55340	1.13240 83711	1.13166 82574	1.13081 57322	1.12985 14181	1.12877 60213
66	1.15043 38520	1.14978 25340	1.14901 38998	1.14812 85018	1.14712 69784	1.14601 00528
67	1.16783 13076	1.16715 54547	1.16635 78507	1.16543 90614	1.16439 97403	1.16324 06278
68	1.18522 79284	1.18452 71727	1.18370 01642	1.18274 74815	1.18166 97930	1.18046 78564
69	1.20262 37429	1.20189 77294	1.20104 08964	1.20005 38353	1.19893 72292	1.19769 18528
70	1.22001 87808	1.21926 71673	1.21838 01052	1.21735 81983	1.21620 21446	1.21491 27352
71	1.23741 30725	1.23663 55304	1.23571 78505	1.23466 06488	1.23346 46381	1.23213 06258
72	1.25480 66497	1.25400 28640	1.25305 41938	1.25196 12674	1.25072 48116	1.24934 56503
73	1.27219 95445	1.27136 92148	1.27038 91986	1.26926 01368	1.26798 27699	1.26655 79379
74	1.28959 17902	1.28873 46304	1.28772 29299	1.28655 73418	1.28523 86204	1.28376 76215
75	1.30698 34206	1.30609 91596	1.30505 54543	1.30385 29695	1.30249 24732	1.30097 48371
76	1.32437 44705	1.32346 28526	1.32238 68398	1.32114 71088	1.31974 44410	1.31817 97234
77	1.34176 49755	1.34082 57603	1.33971 71560	1.33843 98504	1.33699 46386	1.33538 24225
78	1.35915 49714	1.35818 79348	1.35704 64736	1.35573 12869	1.35424 31830	1.35258 30792
79	1.37654 44951	1.37554 94291	1.37437 48645	1.37302 15123	1.37149 01936	1.36978 18405
80	1.39393 35839	1.39291 02966	1.39170 24020	1.39031 06222	1.38873 57913	1.38697 88560
81	1.41132 22755	1.41027 05920	1.40902 91603	1.40759 87136	1.40598 00990	1.40417 42774
82	1.42871 06083	1.42763 03704	1.42635 52145	1.42488 58847	1.42322 32410	1.42136 82584
83	1.44609 86211	1.44498 96877	1.44368 06406	1.44217 22349	1.44046 53431	1.43856 09544
84	1.46348 63530	1.46234 86003	1.46100 55154	1.45945 78646	1.45770 65326	1.45575 25226
85	1.48087 38434	1.47970 71650	1.47832 99166	1.47674 28751	1.47494 69377	1.47294 31215
86	1.49826 11322	1.49706 54391	1.49565 39221	1.49402 73684	1.49218 66875	1.49013 29107
87	1.51564 82593	1.51442 34804	1.51297 76104	1.51131 14471	1.50942 59123	1.50732 20510
88	1.53303 52650	1.53178 13468	1.53030 10604	1.52859 52144	1.52666 47427	1.52451 07040
89	1.55042 21898	1.54913 90965	1.54762 43515	1.54587 87739	1.54390 33099	1.54169 90317
90	1.56780 90740	1.56649 67878	1.56494 75630	1.56296 22295	1.56114 17453	1.55888 71966

TABLE IX.

φ.	F (5°).		F (6°).		F (7°).		F (8°).		F (9°).		F (10°).	
45°	0.78594	11090	0.78617	97426	0.78646	15563	0.78678	64447	0.78715	42851	0.78756	49375
46	0.80342	82223	0.80368	17448	0.80398	11605	0.80432	63668	0.80471	72443	0.80515	36566
47	0.82091	64986	0.82118	54242	0.82150	30514	0.82186	92817	0.82228	40000	0.82274	70747
48	0.83840	59360	0.83869	07782	0.83902	72259	0.83941	51856	0.83985	45477	0.84034	51869
49	0.85589	65312	0.85619	78021	0.85655	36779	0.85696	40708	0.85742	88783	0.85794	79826
50	0.87338	82795	0.87370	64894	0.87408	23985	0.87451	59262	0.87500	69781	0.87555	54456
51	0.89088	11746	0.89121	68313	0.89161	33760	0.89207	07367	0.89258	88286	0.89316	75539
52	0.90837	52092	0.90872	88170	0.90914	65961	0.90962	84840	0.91017	44069	0.91078	42795
53	0.92587	03742	0.92624	24338	0.92668	20416	0.92718	91459	0.92776	36853	0.92840	55889
54	0.94336	66594	0.94375	76670	0.94421	96925	0.94475	26965	0.94535	66318	0.94603	14432
55	0.96086	40531	0.96127	45000	0.96175	95265	0.96231	91068	0.96295	32097	0.96366	17975
56	0.97836	25421	0.97879	29138	0.97930	15180	0.97988	83440	0.98055	33778	0.98129	66014
57	0.99586	21123	0.99631	28881	0.99684	56393	0.99746	03717	0.99815	70903	0.99883	57990
58	1.01336	27478	1.01383	44002	1.01439	18598	1.01503	51502	1.01576	42974	1.01657	93289
59	1.03086	44316	1.03135	74257	1.03194	01461	1.03261	26363	1.03337	49447	1.03422	71242
60	1.04836	71455	1.04888	19382	1.04949	04628	1.05019	27835	1.05098	89733	1.05187	91127
61	1.06587	08698	1.06640	79098	1.06704	27714	1.06777	55420	1.06860	63205	1.06953	52170
62	1.08337	55838	1.08393	53104	1.08459	70314	1.08536	08587	1.08622	69190	1.08719	53545
63	1.10088	12655	1.10146	41083	1.10215	31997	1.10294	86773	1.10385	06979	1.10485	94373
64	1.11838	78915	1.11899	42700	1.11971	12307	1.12053	89385	1.12147	75819	1.12252	73728
65	1.13589	54377	1.13652	57604	1.13727	10766	1.13813	15798	1.13910	74920	1.14019	90634
66	1.15340	38784	1.15405	85430	1.15483	26874	1.15572	65358	1.15674	03454	1.15787	44066
67	1.17091	31870	1.17159	25793	1.17239	60109	1.17332	37381	1.17437	60555	1.17555	32955
68	1.18842	33359	1.18912	78293	1.18996	09926	1.19092	31156	1.19201	45320	1.19323	56185
69	1.20593	42963	1.20666	42518	1.20752	75762	1.20852	45945	1.20965	56813	1.21092	12566
70	1.22344	60385	1.22420	18037	1.22509	57031	1.22612	80984	1.22729	94063	1.22861	00987
71	1.24095	85319	1.24174	04409	1.24266	53130	1.24373	35480	1.24494	56067	1.24630	20116
72	1.25847	17448	1.25928	01178	1.26023	63436	1.26134	08618	1.26259	41789	1.26399	68700
73	1.27598	56448	1.27682	07873	1.27780	87310	1.27894	99560	1.28024	50166	1.28169	45419
74	1.29350	01985	1.29436	24015	1.29538	24094	1.29656	07446	1.29789	80103	1.29939	48918
75	1.31101	53717	1.31190	49110	1.31295	73115	1.31417	31392	1.31555	30480	1.31709	77806
76	1.32853	11296	1.32944	82654	1.33053	33686	1.33178	70497	1.33321	00147	1.33480	30658
77	1.34604	74364	1.34699	24132	1.34811	05102	1.34940	23838	1.35086	87933	1.35251	06021
78	1.36356	42559	1.36453	73019	1.36568	86646	1.36701	90474	1.36852	92643	1.37022	02411
79	1.38108	15511	1.38208	28782	1.38326	77590	1.38463	69450	1.38619	13061	1.38793	18318
80	1.39859	92845	1.39962	90877	1.40084	77192	1.40225	59792	1.40385	47948	1.40564	52205
81	1.41611	74179	1.41717	58756	1.41842	84700	1.41987	60515	1.42151	96049	1.42336	02513
82	1.43363	59128	1.43472	31860	1.43600	99352	1.43749	70617	1.43918	56092	1.44107	67662
83	1.45115	47302	1.45227	09625	1.45359	20379	1.45511	89087	1.45685	26789	1.45879	46052
84	1.46867	38306	1.46981	91482	1.47117	47000	1.47274	14903	1.47452	06838	1.47651	36066
85	1.48619	31743	1.48736	76856	1.48875	78428	1.49036	47033	1.49218	94926	1.49423	36070
86	1.50371	27211	1.50491	65166	1.50634	13873	1.50798	84436	1.50985	89728	1.51195	44421
87	1.52123	24308	1.52246	55829	1.52392	52538	1.52561	26065	1.52752	89912	1.52967	59462
88	1.53875	22628	1.54001	48261	1.54150	93619	1.54323	70870	1.54519	94139	1.54739	79527
89	1.55627	21764	1.55756	41874	1.55909	36313	1.56086	17793	1.56287	01064	1.56512	02946
90	1.57379	21309	1.57511	36078	1.57667	79816	1.57848	65777	1.58054	09339	1.58284	28043

TABLE IX.

ϕ .	E(10°).		E(11°).		E(12°).		E(13°).		E(14°).		E(15°).	
0°	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000
1	0.01745	32658	0.01745	32602	0.01745	32542	0.01745	32477	0.01745	32406	0.01745	32332
2	0.03490	63713	0.03490	63270	0.03490	62787	0.03490	62264	0.03490	61703	0.03490	61104
3	0.05235	91565	0.05235	90070	0.05235	88439	0.05235	86675	0.05235	84781	0.05235	82758
4	0.06981	14617	0.06981	11074	0.06981	07209	0.06981	03031	0.06980	98542	0.06980	93748
5	0.08726	31277	0.08726	24360	0.08726	16818	0.08726	08659	0.08725	99896	0.08725	90537
6	0.10471	39961	0.10471	28016	0.10471	14992	0.10471	00903	0.10470	85770	0.10470	69607
7	0.12216	39097	0.12216	20142	0.12215	99474	0.12215	77119	0.12215	53106	0.12215	27458
8	0.13961	27120	0.13960	98851	0.13960	68026	0.13960	34685	0.13959	98869	0.13959	60617
9	0.15706	02482	0.15705	62271	0.15705	18425	0.15704	70998	0.15704	20050	0.15703	65638
10	0.17450	63648	0.17450	08549	0.17449	48469	0.17448	83483	0.17448	13668	0.17447	39107
11	0.19195	09101	0.19194	35852	0.19193	55983	0.19192	69589	0.19191	76775	0.19190	77649
12	0.20939	37341	0.20938	42371	0.20937	38816	0.20936	26799	0.20935	06456	0.20933	77928
13	0.22683	46891	0.22682	26520	0.22680	94847	0.22679	52629	0.22677	99839	0.22676	36657
14	0.24427	36295	0.24425	85940	0.24424	21988	0.24422	44633	0.24420	54091	0.24418	50580
15	0.26171	04120	0.26169	19502	0.26167	18183	0.26165	00404	0.26162	66426	0.26160	16518
16	0.27914	48961	0.27912	25306	0.27909	81415	0.27907	17577	0.27904	34107	0.27901	31333
17	0.29657	69440	0.29655	01686	0.29652	09703	0.29648	93833	0.29645	54451	0.29641	91949
18	0.31400	64205	0.31397	47012	0.31394	01109	0.31390	26901	0.31386	24827	0.31381	95352
19	0.33143	31939	0.33139	59691	0.33135	53740	0.33131	14561	0.33126	42666	0.33121	38599
20	0.34885	71356	0.34881	38167	0.34876	65748	0.34871	54648	0.34866	05459	0.34860	18813
21	0.36627	81202	0.36622	80926	0.36617	35332	0.36611	45050	0.36605	10762	0.36598	33194
22	0.38369	60261	0.38363	86497	0.38357	60743	0.38350	83717	0.38343	56199	0.38335	79016
23	0.40111	07351	0.40104	53452	0.40097	40283	0.40089	68660	0.40081	39464	0.40072	53635
24	0.41852	21332	0.41844	80410	0.41836	72311	0.41827	97951	0.41818	58325	0.41808	54640
25	0.43593	01101	0.43584	66039	0.43575	55240	0.43565	69731	0.43555	10625	0.43543	79109
26	0.45333	45597	0.45324	09054	0.45313	87542	0.45302	82206	0.45290	94286	0.45278	25106
27	0.47073	53799	0.47063	08223	0.47051	67751	0.47039	33655	0.47026	07312	0.47011	90189
28	0.48813	24734	0.48801	62364	0.48788	94461	0.48775	22430	0.48760	47790	0.48744	72163
29	0.50552	57471	0.50539	70352	0.50525	66333	0.50510	46956	0.50494	13894	0.50476	68930
30	0.52291	51125	0.52277	31116	0.52261	82090	0.52245	05735	0.52227	03884	0.52207	78491
31	0.54030	04859	0.54014	43641	0.53997	40523	0.53978	97347	0.53959	16112	0.53937	98953
32	0.55768	17882	0.55751	06970	0.55732	40493	0.55712	20454	0.55690	49024	0.55667	28528
33	0.57505	89455	0.57487	20207	0.57466	80931	0.57444	73798	0.57421	01158	0.57395	65536
34	0.59243	18887	0.59222	82515	0.59200	60840	0.59176	56205	0.59150	71150	0.59123	08406
35	0.60980	05539	0.60957	93119	0.60933	79294	0.60907	66586	0.60879	57734	0.60849	55681
36	0.62716	48823	0.62692	51304	0.62666	35440	0.62638	03940	0.62607	59744	0.62575	06017
37	0.64452	48203	0.64426	56421	0.64398	28503	0.64367	67351	0.64334	76115	0.64299	58186
38	0.66188	03196	0.66160	07884	0.66129	57783	0.66096	55994	0.66061	05882	0.66023	11078
39	0.67923	13375	0.67893	05172	0.67860	22657	0.67824	69133	0.67786	48193	0.67745	63700
40	0.69657	78365	0.69625	47830	0.69590	22579	0.69552	06125	0.69511	02290	0.69467	15188
41	0.71391	98746	0.71357	35468	0.71319	57082	0.71278	66417	0.71234	67529	0.71187	64787
42	0.73125	71554	0.73088	67763	0.73048	25778	0.73004	49549	0.72957	43371	0.72907	11872
43	0.74858	99280	0.74819	44459	0.74776	62359	0.74729	55154	0.74679	29385	0.74625	55942
44	0.76591	80871	0.76549	65368	0.76503	64598	0.76453	82962	0.76400	25249	0.76342	96620
45	0.78324	16230	0.78279	30372	0.78230	34347	0.78177	32793	0.78120	30751	0.78059	33654

ϕ .	$F(10^\circ)$.	$F(11^\circ)$.	$F(12^\circ)$.	$F(13^\circ)$.	$F(14^\circ)$.	$F(15^\circ)$.
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 33193	0.01745 33248	0.01745 33308	0.01745 33373	0.01745 33444	0.01745 33518
2	0.03490 67988	0.03490 68430	0.03490 68914	0.03490 69437	0.03490 69998	0.03490 70597
3	0.05236 05986	0.05236 07481	0.05236 09113	0.05236 10877	0.05236 12771	0.05236 14794
4	0.06981 48785	0.06981 52329	0.06981 56194	0.06981 60373	0.06981 64863	0.06981 69658
5	0.08726 97977	0.08727 04895	0.08727 12440	0.08727 20599	0.08727 29365	0.08727 38727
6	0.10472 55146	0.10472 67094	0.10472 80123	0.10472 94215	0.10473 09355	0.10473 25524
7	0.12218 21868	0.12218 40828	0.12218 61503	0.12218 83868	0.12219 07895	0.12219 33556
8	0.13963 99707	0.13964 27987	0.13964 58826	0.13964 92185	0.13965 28026	0.13965 66305
9	0.15709 90214	0.15710 30445	0.15710 74317	0.15711 21775	0.15711 72767	0.15712 27229
10	0.17455 94928	0.17456 50061	0.17457 10184	0.17457 75224	0.17458 45110	0.17459 19756
11	0.19202 15370	0.19202 88672	0.19203 68611	0.19204 55092	0.19205 48020	0.19206 47281
12	0.20948 53044	0.20949 48096	0.20950 51758	0.20951 63910	0.20952 84427	0.20954 13164
13	0.22695 09432	0.22696 30125	0.22697 61757	0.22699 04176	0.22700 57225	0.22702 20723
14	0.24441 85996	0.24443 36528	0.24445 00711	0.24446 78355	0.24448 69270	0.24450 73231
15	0.26188 84178	0.26190 69045	0.26192 70688	0.26194 88876	0.26197 23376	0.26199 73917
16	0.27936 05390	0.27938 29388	0.27940 73724	0.27943 38127	0.27946 22311	0.27949 25958
17	0.29683 51022	0.29686 19236	0.29689 11820	0.29692 28453	0.29695 68797	0.29699 32476
18	0.31431 22432	0.31434 40235	0.31437 86934	0.31441 62155	0.31445 65502	0.31449 96535
19	0.33179 20952	0.33182 93996	0.33187 00985	0.33191 41485	0.33196 15040	0.33201 21139
20	0.34927 47881	0.34931 82093	0.34936 55846	0.34941 68647	0.34947 19967	0.34953 09227
21	0.36676 04485	0.36681 06058	0.36686 53346	0.36692 45789	0.36698 82781	0.36705 63669
22	0.38424 91996	0.38430 67387	0.38436 95266	0.38443 75004	0.38451 05916	0.38458 87266
23	0.40174 11611	0.40180 67531	0.40187 83337	0.40195 58328	0.40203 91737	0.40212 82742
24	0.41923 64489	0.41931 07895	0.41939 19238	0.41947 97737	0.41957 42544	0.41967 52743
25	0.43673 51751	0.43681 89839	0.43691 04590	0.43700 95144	0.43711 60563	0.43722 99837
26	0.45423 74478	0.45433 14676	0.45443 40963	0.45454 52395	0.45466 47945	0.45479 26505
27	0.47174 33709	0.47184 83669	0.47196 29866	0.47208 71272	0.47222 06767	0.47236 35143
28	0.48925 30441	0.48936 98029	0.48949 72749	0.48963 53485	0.48978 39023	0.48994 28054
29	0.50676 65626	0.50689 58916	0.50703 70999	0.50719 00671	0.50735 46626	0.50753 07449
30	0.52428 40174	0.52442 67435	0.52458 25939	0.52475 14396	0.52493 31405	0.52512 75445
31	0.54180 54945	0.54196 24636	0.54213 38829	0.54231 96149	0.54251 95100	0.54273 34059
32	0.55933 10754	0.55950 31512	0.55969 10861	0.55989 47339	0.56011 39362	0.56034 85204
33	0.57686 08368	0.57704 88999	0.57725 43156	0.57747 69299	0.57771 65752	0.57797 30692
34	0.59439 48504	0.59459 97971	0.59482 36767	0.59506 63277	0.59532 75736	0.59560 72227
35	0.61193 31827	0.61215 59242	0.61239 92677	0.61266 30438	0.61294 70683	0.61325 11402
36	0.62947 58952	0.62971 73567	0.62998 11792	0.63026 71864	0.63057 51865	0.63090 49701
37	0.64702 30443	0.64728 41637	0.64756 94946	0.64787 88548	0.64821 20455	0.64856 88493
38	0.66457 46811	0.66485 64078	0.66516 42898	0.66549 81396	0.66585 77521	0.66624 29030
39	0.68213 08512	0.68243 41452	0.68276 56329	0.68312 51225	0.68351 24031	0.68392 72448
40	0.69969 15948	0.70001 74256	0.70037 35845	0.70075 98759	0.70117 60846	0.70162 19761
41	0.71725 69467	0.71760 62920	0.71798 81970	0.71840 24631	0.71884 88722	0.71932 71862
42	0.73482 69361	0.73520 07808	0.73560 95148	0.73605 29381	0.73653 08306	0.73704 29521
43	0.75240 15867	0.75280 09216	0.75323 75746	0.75371 13454	0.75422 20135	0.75476 93380
44	0.76998 09164	0.77040 67371	0.77087 24048	0.77137 77201	0.77192 24637	0.77250 63955
45	0.78756 49375	0.78801 82433	0.78851 40255	0.78905 20875	0.78963 22127	0.79025 41637

TABLE IX.

ϕ .	E (10°).		E (11°).		E (12°).		E (13°).		E (14°).		E (15°).	
45°	0.78324	16230	0.78279	30372	0.78230	34347	0.78177	32793	0.78120	30751	0.78059	33654
46	0.80056	05318	0.80008	39417	0.79956	37541	0.79900	04566	0.79839	45787	0.79774	66918
47	0.81787	48149	0.81736	92519	0.81681	74195	0.81621	98292	0.81557	70366	0.81488	96413
48	0.83518	44795	0.83464	89762	0.83406	44404	0.83343	14079	0.83275	04606	0.83202	22266
49	0.85248	95386	0.85192	31299	0.85130	48347	0.85063	52130	0.84991	48734	0.84914	44730
50	0.86979	00106	0.86919	17350	0.86853	86280	0.86783	12742	0.86707	03090	0.86625	64186
51	0.88708	59197	0.88645	48204	0.88576	58542	0.88501	96306	0.88421	68121	0.88335	81139
52	0.90437	72954	0.90371	24217	0.90298	65554	0.90220	03310	0.90135	44385	0.90044	96223
53	0.92166	41731	0.92096	45810	0.92020	07814	0.91937	34336	0.91848	32550	0.91753	10195
54	0.93894	65933	0.93821	13475	0.93740	85901	0.93653	90057	0.93560	33391	0.93460	23938
55	0.95622	46023	0.95545	27767	0.95461	00474	0.95369	71241	0.95271	47791	0.95166	38457
56	0.97349	82518	0.97268	98308	0.97180	52267	0.97084	78746	0.96981	76741	0.96871	54881
57	0.99076	75987	0.98991	98783	0.98899	42094	0.98799	13521	0.98691	21335	0.98575	74461
58	1.00803	27052	1.00714	56944	1.00617	70845	1.00512	76607	1.00399	82774	1.00278	98568
59	1.02529	36387	1.02436	64604	1.02335	39484	1.02225	69132	1.02107	62362	1.01981	28691
60	1.04255	04719	1.04158	22639	1.04052	49052	1.03937	92311	1.03814	61503	1.03682	66437
61	1.05980	32824	1.05879	31985	1.05769	00660	1.05649	47447	1.05520	81702	1.05383	13526
62	1.07705	21528	1.07599	93641	1.07484	54592	1.07360	35925	1.07226	24562	1.07082	71795
63	1.09429	71705	1.09320	08663	1.09200	34803	1.09070	59215	1.08930	91783	1.08781	43189
64	1.11153	84277	1.11039	78165	1.10915	19918	1.10780	18867	1.10634	85160	1.10479	29764
65	1.12877	60213	1.12759	03317	1.12629	52226	1.12489	16510	1.12338	06578	1.12176	33680
66	1.14601	00528	1.14477	85344	1.14343	33183	1.14197	53851	1.14040	58015	1.13872	57205
67	1.16324	06278	1.16196	25526	1.16056	64311	1.15905	32673	1.15742	41536	1.15568	02704
68	1.18046	78564	1.17914	25192	1.17769	47192	1.17612	54831	1.17443	59289	1.17262	72642
69	1.19769	18528	1.19631	85725	1.19481	83468	1.19319	22252	1.19144	13507	1.18956	69580
70	1.21491	27352	1.21349	08554	1.21193	74839	1.21025	36931	1.20844	06503	1.20649	96171
71	1.23213	06258	1.23065	95155	1.22905	23062	1.22731	00928	1.22543	40666	1.22342	55158
72	1.24934	56503	1.24782	47050	1.24616	29949	1.24436	16368	1.24242	18461	1.24034	49367
73	1.26655	79379	1.26498	65804	1.26326	97361	1.26140	85436	1.25940	42422	1.25725	81709
74	1.28376	76215	1.28214	53023	1.28037	27210	1.27845	10378	1.27638	15151	1.27416	55172
75	1.30097	48371	1.29930	10352	1.29747	21455	1.29548	93492	1.29335	39316	1.29106	72819
76	1.31817	97234	1.31645	39475	1.31456	82100	1.31252	37131	1.31032	17647	1.30796	37784
77	1.33538	24225	1.33360	42109	1.33166	11190	1.32955	43696	1.32728	52931	1.32485	53270
78	1.35258	30792	1.35075	20005	1.34875	10811	1.34658	15637	1.34424	48009	1.34174	22541
79	1.36978	18405	1.36789	74946	1.36583	83083	1.36360	55445	1.36120	05774	1.35862	48921
80	1.38697	88560	1.38504	08742	1.38292	30163	1.38062	65653	1.37815	29167	1.37550	35789
81	1.40417	42774	1.40218	23230	1.40000	54240	1.39764	48831	1.39510	21172	1.39237	86573
82	1.42136	82584	1.41932	20271	1.41708	57532	1.41466	07585	1.41204	84812	1.40925	04749
83	1.43856	09544	1.43646	01748	1.43416	42280	1.43167	44550	1.42899	23147	1.42611	93833
84	1.45575	25226	1.45359	69565	1.45124	10752	1.44868	62389	1.44593	39269	1.44298	57380
85	1.47294	31215	1.47073	25641	1.46831	65235	1.46569	63789	1.46287	36299	1.45984	98978
86	1.49013	29107	1.48786	71910	1.48539	08032	1.48270	51457	1.47981	17382	1.47671	22241
87	1.50732	20510	1.50500	10318	1.50246	41464	1.49971	28119	1.49674	85683	1.49357	30807
88	1.52451	07040	1.52213	42822	1.51953	67862	1.51671	96514	1.51368	44382	1.51043	28334
89	1.54169	90317	1.53926	71386	1.53660	89565	1.53372	59392	1.53061	96673	1.52729	18494
90	1.55888	71966	1.55639	97978	1.55368	08919	1.55073	19510	1.54755	45759	1.54415	04969

ϕ .	F (10°).	F (11°).	F (12°).	F (13°).	F (14°).	F (15°).
45°	0.78756 49375	0.78801 82433	0.78851 40255	0.78905 20875	0.78963 22127	0.79025 41637
46	0.80515 36566	0.80563 54491	0.80616 24488	0.80673 44635	0.80735 12810	0.80801 26684
47	0.82274 70747	0.82325 83566	0.82381 76784	0.82442 48540	0.82507 96775	0.82578 19227
48	0.84034 51869	0.84088 69609	0.84147 97097	0.84212 32552	0.84281 73999	0.84356 19264
49	0.85794 79826	0.85852 12501	0.85914 85298	0.85982 96535	0.86056 44344	0.86135 26661
50	0.87555 54456	0.87616 12053	0.87682 41175	0.87754 40255	0.87832 07558	0.87915 41152
51	0.89316 75539	0.89380 68008	0.89450 64431	0.89526 63380	0.89608 63273	0.89696 62340
52	0.91078 42795	0.91145 80038	0.91219 54687	0.91299 65478	0.91386 11007	0.91478 89692
53	0.92840 55889	0.92911 47745	0.92989 11480	0.93073 46020	0.93164 50163	0.93262 22545
54	0.94603 14432	0.94677 70663	0.94759 34266	0.94848 04378	0.94943 80029	0.95046 60100
55	0.96366 17975	0.96444 48257	0.96530 22415	0.96623 39827	0.96723 99779	0.96832 01428
56	0.98129 66014	0.98211 79923	0.98301 75219	0.98399 51544	0.98505 08472	0.98618 45467
57	0.99893 57990	0.99979 64990	1.00073 91887	1.00176 38611	1.00287 05055	1.00405 91024
58	1.01657 93289	1.01748 02721	1.01846 71545	1.01954 00013	1.02069 88363	1.02194 36774
59	1.03422 71242	1.03516 92311	1.03620 13243	1.03732 34641	1.03853 57119	1.03983 81265
60	1.05187 91127	1.05286 32889	1.05394 15951	1.05511 41292	1.05638 09937	1.05774 22915
61	1.06953 52170	1.07056 23521	1.07168 78561	1.07291 18671	1.07423 45320	1.07565 60016
62	1.08719 53545	1.08826 63210	1.08943 99887	1.09071 65391	1.09209 61666	1.09357 90735
63	1.10485 94373	1.10597 50895	1.10719 78669	1.10852 79977	1.10996 57266	1.11151 13115
64	1.12252 73728	1.12368 85456	1.12496 13575	1.12634 60864	1.12784 30309	1.12945 25077
65	1.14019 90634	1.14140 65710	1.14273 03198	1.14417 06402	1.14572 78881	1.14740 24426
66	1.15787 44066	1.15912 90418	1.16050 46062	1.16200 14856	1.16362 00968	1.16536 08848
67	1.17555 32955	1.17685 58283	1.17828 40620	1.17983 84410	1.18151 94459	1.18332 75915
68	1.19323 56185	1.19458 67953	1.19606 85260	1.19768 13166	1.19942 57148	1.20130 23089
69	1.21092 12596	1.21232 18020	1.21385 78303	1.21552 99148	1.21733 86737	1.21928 47723
70	1.22861 00987	1.23006 07026	1.23165 18008	1.23338 40305	1.23525 80839	1.23727 47065
71	1.24630 20116	1.24780 33465	1.24945 02573	1.25124 34515	1.25318 36979	1.25527 18262
72	1.26399 68700	1.26554 95778	1.26725 30136	1.26910 79582	1.27111 52600	1.27327 58362
73	1.28169 45419	1.28329 92359	1.28505 98780	1.28697 73244	1.28905 25064	1.29128 64319
74	1.29939 48918	1.30105 21562	1.30287 06533	1.30485 13173	1.30699 51656	1.30930 32997
75	1.31709 77806	1.31880 81694	1.32068 51370	1.32272 96981	1.32494 29588	1.32732 61173
76	1.33480 30658	1.33656 71024	1.33850 31220	1.34061 22221	1.34289 56001	1.34535 45542
77	1.35251 06021	1.35432 87783	1.35632 43964	1.35849 86389	1.36085 27971	1.36338 82271
78	1.37022 02411	1.37209 30165	1.37414 87438	1.37638 86929	1.37881 42512	1.38142 69253
79	1.38793 18318	1.38985 96331	1.39197 59439	1.39428 21237	1.39677 96579	1.39947 01612
80	1.40564 52205	1.40762 84411	1.40980 57727	1.41217 86661	1.41474 87072	1.41751 76210
81	1.42336 02513	1.42539 92506	1.42763 80025	1.43007 80509	1.43272 10842	1.43556 89399
82	1.44107 67662	1.44317 18690	1.44547 24024	1.44798 00050	1.45069 64694	1.45362 37476
83	1.45879 46052	1.46094 61013	1.46330 87386	1.46588 42517	1.46867 45391	1.47168 16689
84	1.47651 35066	1.47872 17505	1.48114 67749	1.48379 05114	1.48665 49659	1.48974 23243
85	1.49423 36070	1.49649 86177	1.49898 62726	1.50169 85016	1.50463 74192	1.50780 53304
86	1.51195 44421	1.51427 65024	1.51682 69912	1.51960 79376	1.52262 15656	1.52587 03005
87	1.52967 59462	1.53205 52027	1.53466 86884	1.53751 85325	1.54060 70693	1.54393 68452
88	1.54739 74527	1.54983 45156	1.55251 11208	1.55542 99980	1.55859 35926	1.56200 45728
89	1.56512 02946	1.56761 42374	1.57035 40839	1.57334 20446	1.57658 07965	1.58007 30900
90	1.58284 28043	1.58539 41638	1.58819 72125	1.59125 43820	1.59456 83409	1.59814 20021

TABLE IX.

ϕ .	E(15°).	E(16°).	E(17°).	E(18°).	E(19°).	E(20°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 32332	0.01745 32252	0.01745 32168	0.01745 32079	0.01745 31986	0.01745 31889
2	0.03490 61104	0.03490 60466	0.03490 59793	0.03490 59083	0.03490 58339	0.03490 57560
3	0.05235 82758	0.05235 80608	0.05235 78335	0.05235 75941	0.05235 73430	0.05235 70803
4	0.06980 93748	0.06980 88654	0.06980 83268	0.06980 77596	0.06980 71645	0.06980 65422
5	0.08725 90537	0.08725 80594	0.08725 70080	0.08725 59007	0.08725 47389	0.08725 35240
6	0.10470 69607	0.10470 52436	0.10470 34278	0.10470 15155	0.10469 95091	0.10469 74108
7	0.12215 27458	0.12215 00211	0.12214 71397	0.12214 41052	0.12214 09211	0.12213 75913
8	0.13959 60617	0.13959 19978	0.13958 77002	0.13958 31741	0.13957 84248	0.13957 34582
9	0.15703 65638	0.15703 07829	0.15702 46694	0.15701 82307	0.15701 14745	0.15700 44090
10	0.17447 39107	0.17446 59891	0.17445 76116	0.17444 87881	0.17443 95295	0.17442 98468
11	0.19190 77649	0.19189 72333	0.19188 60954	0.19187 43644	0.19186 20546	0.19184 91807
12	0.20933 77928	0.20932 41370	0.20930 96949	0.20929 44834	0.20927 85209	0.20926 18267
13	0.22676 36653	0.22674 63269	0.22672 79895	0.22670 86751	0.22668 84065	0.22666 72082
14	0.24418 50580	0.24416 34347	0.24414 05650	0.24411 64761	0.24409 11967	0.24406 47559
15	0.26160 16518	0.26157 50983	0.26154 70134	0.26151 74305	0.26148 63848	0.26145 39131
16	0.27901 31333	0.27898 09617	0.27894 69339	0.27891 10902	0.27887 34729	0.27883 41267
17	0.29641 91949	0.29638 06759	0.29633 99333	0.29629 70152	0.29625 19722	0.29620 48575
18	0.31381 95352	0.31377 38987	0.31372 56262	0.31367 47746	0.31362 14036	0.31356 55761
19	0.33121 38599	0.33116 02956	0.33110 36357	0.33104 39467	0.33098 12984	0.33091 57643
20	0.34860 18813	0.34853 95400	0.34847 35938	0.34840 41198	0.34833 11987	0.34825 49158
21	0.36598 33194	0.36591 13137	0.36583 51418	0.36575 48922	0.36567 06579	0.36558 25369
22	0.38335 79016	0.38327 53071	0.38318 79306	0.38309 58734	0.38299 92415	0.38289 81468
23	0.40072 53635	0.40063 12196	0.40053 16214	0.40042 66840	0.40031 65274	0.40020 12785
24	0.41808 54490	0.41797 87601	0.41786 58860	0.41774 69562	0.41762 21063	0.41749 14791
25	0.43543 79109	0.43531 76474	0.43519 04070	0.43505 63347	0.43491 55825	0.43476 83106
26	0.45278 25106	0.45264 76103	0.45250 48783	0.45235 44766	0.45219 65742	0.45203 13502
27	0.47011 90189	0.46996 83881	0.46980 90058	0.46964 10519	0.46946 47140	0.46928 01908
28	0.48744 72163	0.48727 97309	0.48710 25074	0.48691 57444	0.48671 96493	0.48651 44418
29	0.50476 68930	0.50458 13998	0.50438 51132	0.50417 82515	0.50396 10429	0.50373 37293
30	0.52207 78491	0.52187 31674	0.52165 65662	0.52142 82849	0.52118 85732	0.52093 76968
31	0.53937 98953	0.53915 48180	0.53891 66227	0.53866 55707	0.53840 19348	0.53812 60053
32	0.55667 28528	0.55642 61477	0.55616 50522	0.55588 98502	0.55560 08390	0.55529 83342
33	0.57395 65536	0.57368 69650	0.57340 16379	0.57310 08799	0.57278 50137	0.57245 43815
34	0.59123 08406	0.59093 70909	0.59062 61772	0.59029 84319	0.58995 42042	0.58959 38640
35	0.60849 55681	0.60817 63589	0.60783 84815	0.60748 22941	0.60710 81735	0.60671 65181
36	0.62575 06017	0.62540 46155	0.62503 83770	0.62465 22708	0.62424 67023	0.62382 20999
37	0.64299 58186	0.64262 17205	0.64222 57044	0.64180 81825	0.64136 95898	0.64091 03855
38	0.66023 11078	0.65982 75469	0.65940 03195	0.65894 98667	0.65847 66536	0.65798 11715
39	0.67745 63702	0.67702 19810	0.67656 20934	0.67607 71777	0.67556 77302	0.67503 42752
40	0.69467 15188	0.69420 49231	0.69371 09124	0.69318 99868	0.69264 26750	0.69206 95350
41	0.71187 64787	0.71137 62872	0.71084 66783	0.71028 81829	0.70970 13628	0.70908 68105
42	0.72907 11872	0.72853 60012	0.72796 93087	0.72737 16724	0.72674 36878	0.72608 59828
43	0.74625 55942	0.74568 40071	0.74507 87371	0.74444 03794	0.74376 95638	0.74306 69548
44	0.76342 96620	0.76282 02610	0.76217 49129	0.76149 42458	0.76077 89247	0.76002 96511
45	0.78059 33654	0.77994 47334	0.77925 78015	0.77853 32315	0.77777 17240	0.77697 40185

φ.	F(15°).	F(16°).	F(17°).	F(18°).	F(19°).	F(20°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 33518	0.01745 33598	0.01745 33682	0.01745 33772	0.01745 33865	0.01745 33962
2	0.03490 70597	0.03490 71235	0.03490 71908	0.03490 72618	0.03490 73363	0.03490 74141
3	0.05236 14794	0.05236 16944	0.05236 19217	0.05236 21612	0.05236 24124	0.05236 26750
4	0.06981 69658	0.06981 74751	0.06981 80139	0.06981 85813	0.06981 91766	0.06981 97991
5	0.08727 38727	0.08727 48672	0.08727 59190	0.08727 70267	0.08727 81892	0.08727 94047
6	0.10473 25524	0.10473 42702	0.10473 60870	0.10473 80003	0.10474 00082	0.10474 21080
7	0.12219 33556	0.12219 60819	0.12219 89654	0.12220 20024	0.12220 51894	0.12220 85225
8	0.13965 66305	0.13966 06976	0.13966 49993	0.13966 95302	0.13967 42851	0.13967 92582
9	0.15712 27229	0.15712 85097	0.15713 46305	0.15714 10777	0.15714 78441	0.15715 49212
10	0.17459 19756	0.17459 99074	0.17460 82973	0.17461 71351	0.17462 64109	0.17463 61132
11	0.19206 47281	0.19207 52762	0.19208 64339	0.19209 81881	0.19211 05253	0.19212 34308
12	0.20954 13164	0.20955 49975	0.20956 94702	0.20958 47175	0.20960 07220	0.20961 74650
13	0.22702 20723	0.22703 94484	0.22705 78310	0.22707 71989	0.22709 75300	0.22711 88006
14	0.24450 73231	0.24452 90009	0.24455 19359	0.24457 61020	0.24460 14717	0.24462 80159
15	0.26199 73917	0.26202 40220	0.26205 21988	0.26208 18902	0.26211 30630	0.26214 56817
16	0.27949 25958	0.27952 48730	0.27955 90273	0.27959 50203	0.27963 28123	0.27967 23608
17	0.29699 32476	0.29703 19091	0.29707 28222	0.29711 59416	0.29716 12202	0.29720 86078
18	0.31449 96535	0.31454 54791	0.31459 39774	0.31464 50959	0.31469 87791	0.31475 49684
19	0.33201 21139	0.33206 59249	0.33212 28794	0.33218 29166	0.33224 59723	0.33231 19785
20	0.34953 09227	0.34959 35812	0.34965 99064	0.34972 98285	0.34980 32737	0.34988 01641
21	0.36705 63669	0.36712 87754	0.36720 54286	0.36728 62473	0.36737 11474	0.36746 00402
22	0.38458 87266	0.38467 18267	0.38475 98073	0.38485 25790	0.38495 00469	0.38505 21108
23	0.40212 82742	0.40222 30460	0.40232 33945	0.40242 92196	0.40254 04149	0.40265 68681
24	0.41967 52743	0.41978 27355	0.41989 65328	0.42001 65546	0.42014 26826	0.42027 47917
25	0.43722 99837	0.43735 11885	0.43747 95545	0.43761 49583	0.43775 72691	0.43790 63485
26	0.45479 26505	0.45492 86887	0.45507 27817	0.45522 47937	0.45538 45811	0.45555 19917
27	0.47236 35143	0.47251 55102	0.47267 65256	0.47284 64119	0.47302 50124	0.47321 21606
28	0.48994 28054	0.49011 19170	0.49029 10861	0.49048 01517	0.49067 89433	0.49088 72797
29	0.50753 07449	0.50771 81623	0.50791 67517	0.50812 63390	0.50834 67400	0.50857 77584
30	0.52512 75445	0.52533 44890	0.52555 37988	0.52578 52866	0.52602 87542	0.52628 39905
31	0.54273 34059	0.54296 11288	0.54320 24914	0.54345 72935	0.54372 53229	0.54400 63534
32	0.56034 85204	0.56059 83017	0.56086 30808	0.56114 26448	0.56143 67675	0.56174 72078
33	0.57797 30692	0.57824 62162	0.57853 58054	0.57884 16111	0.57916 33936	0.57950 08970
34	0.59560 72227	0.59590 50688	0.59622 08899	0.59655 44481	0.59690 54904	0.59727 37465
35	0.61325 11402	0.61357 50435	0.61391 85454	0.61428 13963	0.61466 33303	0.61506 40635
36	0.63090 49701	0.63125 63119	0.63162 89689	0.63202 26805	0.63243 71687	0.63287 21363
37	0.64856 88493	0.64894 90327	0.64935 23430	0.64977 85096	0.65022 72430	0.65069 82339
38	0.66624 29030	0.66665 33513	0.66708 88356	0.66754 90760	0.66803 37728	0.66854 26053
39	0.68392 72448	0.68436 93998	0.68483 85995	0.68533 45555	0.68585 69591	0.68640 54795
40	0.70162 19761	0.70209 72970	0.70260 17724	0.70313 51069	0.70369 69842	0.70428 70645
41	0.71932 71862	0.71983 71475	0.72037 84762	0.72095 08716	0.72155 40109	0.72218 75473
42	0.73704 29521	0.73758 90419	0.73816 88173	0.73878 19733	0.73942 81826	0.74010 70932
43	0.75476 93380	0.75535 30567	0.75597 28858	0.75662 85178	0.75731 96228	0.75804 58454
44	0.77250 63955	0.77312 92541	0.77379 07556	0.77449 05927	0.77522 84346	0.77600 39249
45	0.79025 41637	0.79091 76814	0.79162 24843	0.79236 82672	0.79315 47008	0.79398 14299

TABLE IX.

φ.	E (15°).	E (16°).	E (17°).	E (18°).	E (19°).	E (20°).
45°	0.78059 33654	0.77994 47334	0.77925 78015	0.77853 32315	0.77777 17240	0.77697 40185
46	0.79774 66918	0.79705 74090	0.79632 73844	0.79555 73143	0.79474 79355	0.79390 00259
47	0.81488 96413	0.81415 82868	0.81338 36594	0.81256 64903	0.81170 75531	0.81080 76647
48	0.83202 22266	0.83124 73801	0.83042 66405	0.82956 07737	0.82865 05909	0.82769 69484
49	0.84914 44730	0.84832 47169	0.84745 63577	0.84654 01969	0.84557 70833	0.84456 79132
50	0.86625 64186	0.86539 03395	0.86447 28577	0.86350 48106	0.86248 70850	0.86142 06177
51	0.88335 81139	0.88244 43043	0.88147 62031	0.88045 46835	0.87938 06710	0.87825 51428
52	0.90044 96223	0.89948 66825	0.89846 64728	0.89738 99027	0.89625 79365	0.89507 15921
53	0.91753 10195	0.91651 75591	0.91544 37617	0.91431 05733	0.91311 89968	0.91187 00915
54	0.93460 23938	0.93353 70336	0.93240 81810	0.93121 68184	0.92996 39876	0.92865 07892
55	0.95166 38457	0.95054 52196	0.94935 98577	0.94810 87789	0.94679 30642	0.94541 38555
56	0.96871 54881	0.96754 22446	0.96629 89346	0.96498 66138	0.96360 64021	0.96215 94829
57	0.98575 74461	0.98452 82500	0.98322 55703	0.98185 04994	0.98040 41963	0.97888 78858
58	1.00278 98568	1.00150 33908	1.00013 99388	0.99870 06296	0.99718 66614	0.99559 93000
59	1.01981 28691	1.01846 78357	1.01704 22294	1.01553 72156	1.01395 40312	1.01229 39831
60	1.03682 66437	1.03542 17667	1.03393 26468	1.03236 04856	1.03070 65586	1.02897 22138
61	1.05383 13526	1.05236 53790	1.05081 14104	1.04917 06845	1.04744 45153	1.04563 42915
62	1.07082 71795	1.06929 88807	1.06767 87543	1.06596 80739	1.06416 81915	1.06228 05364
63	1.08781 43189	1.08622 24925	1.08453 49269	1.08275 29313	1.08087 78955	1.07891 12888
64	1.10479 29764	1.10313 64478	1.10138 01910	1.09952 55505	1.09757 39534	1.09552 69089
65	1.12176 33680	1.12004 09920	1.11821 48230	1.11628 62406	1.11425 67088	1.11212 77764
66	1.13872 57205	1.13693 63824	1.13503 91128	1.13303 53259	1.13092 65224	1.12871 42900
67	1.15568 02704	1.15382 28879	1.15185 33636	1.14977 31458	1.14758 37714	1.14528 68668
68	1.17262 72642	1.17070 07886	1.16865 78912	1.16650 00538	1.16422 88493	1.16184 59421
69	1.18956 69580	1.18757 03757	1.18545 30238	1.18321 64176	1.18086 21653	1.17839 19688
70	1.20649 96171	1.20443 19507	1.20223 91017	1.19992 26183	1.19748 41437	1.19492 54166
71	1.22342 55158	1.22128 58255	1.21901 64768	1.21661 90503	1.21409 52235	1.21144 67716
72	1.24034 49367	1.23813 23217	1.23578 55122	1.23330 61205	1.23069 58580	1.22795 65560
73	1.25725 81709	1.25497 17704	1.25254 65816	1.24998 42478	1.24728 65140	1.24445 52270
74	1.27416 55172	1.27180 45117	1.26930 00689	1.26665 38627	1.26386 76713	1.26094 33762
75	1.29106 72819	1.28863 08944	1.28604 63679	1.28331 54069	1.28043 98222	1.27742 15293
76	1.30796 37784	1.30545 12751	1.30278 58817	1.29996 93326	1.29700 34707	1.29389 02452
77	1.32485 53270	1.32226 60184	1.31951 90220	1.31661 61017	1.31355 91319	1.31035 00951
78	1.34174 22541	1.33907 54960	1.33624 62088	1.33325 61855	1.33010 73314	1.32680 16620
79	1.35862 48921	1.35588 00865	1.35296 78698	1.34989 00640	1.34664 85047	1.34324 55400
80	1.37550 35789	1.37268 01746	1.36968 44400	1.36651 82254	1.36318 34964	1.35968 23333
81	1.39237 86573	1.38947 61510	1.38639 63609	1.38314 11652	1.37971 25595	1.37611 26554
82	1.40925 04749	1.40626 84116	1.40310 40799	1.39975 93860	1.39623 63546	1.39253 71286
83	1.42611 93833	1.42305 73570	1.41980 80501	1.41637 33963	1.41275 54493	1.40895 63830
84	1.44298 57380	1.43984 33922	1.43650 87294	1.43298 37102	1.42927 04176	1.42537 10555
85	1.45984 98978	1.45662 69260	1.45320 65798	1.44959 08468	1.44578 18386	1.44178 17892
86	1.47671 22241	1.47340 83702	1.46990 20671	1.46619 53293	1.46229 02964	1.45818 92325
87	1.49357 30807	1.49018 81395	1.48659 56603	1.48279 76842	1.47879 63789	1.47459 40382
88	1.51043 28334	1.50696 66508	1.50328 78308	1.49939 84410	1.49530 06771	1.49099 68627
89	1.52729 18494	1.52374 43225	1.51997 90518	1.51599 81312	1.51180 37845	1.50739 83648
90	1.54415 04969	1.54052 15741	1.53666 97976	1.53259 72877	1.52830 62961	1.52379 92053

ϕ .	F (15°).	F (16°).	F (17°).	F (18°).	F (19°).	F (20°).
45°	0.79025 41637	0.79091 76814	0.79162 24843	0.79236 82672	0.79315 47008	0.79398 14299
46	0.80801 26684	0.80871 83713	0.80946 81128	0.81026 15918	0.81109 84831	0.81197 84355
47	0.82578 19227	0.82653 13419	0.82732 76651	0.82817 05980	0.82905 98223	0.82999 49932
48	0.84356 19264	0.84435 65960	0.84520 11483	0.84609 52984	0.84703 87377	0.84803 11311
49	0.86135 26661	0.86219 41216	0.86308 85525	0.86403 56863	0.86503 52272	0.86608 68531
50	0.87915 41152	0.88004 38912	0.88098 98503	0.88199 17356	0.88304 92670	0.88416 21388
51	0.89696 62340	0.89790 58625	0.89890 49974	0.89996 34006	0.90108 08113	0.90225 69437
52	0.91478 89692	0.91577 99778	0.91683 39321	0.91795 06162	0.91912 97923	0.92037 11986
53	0.93262 22545	0.93366 61640	0.93477 65751	0.93595 32974	0.93719 61201	0.93850 48093
54	0.95046 60100	0.95156 43329	0.95273 28298	0.95397 13396	0.95527 96826	0.95665 76569
55	0.96832 01428	0.96947 43811	0.97070 25822	0.97200 46186	0.97338 03455	0.97482 95976
56	0.98618 45467	0.98739 61898	0.98868 57011	0.99005 29903	0.99149 79521	0.99302 04625
57	1.00405 91024	1.00532 96252	1.00668 20377	1.00811 62910	1.00963 23236	1.01123 00579
58	1.02194 36774	1.02327 45385	1.02469 14262	1.02619 43374	1.02778 32591	1.02945 81648
59	1.03983 81265	1.04123 07659	1.04271 36836	1.04428 69267	1.04595 05354	1.04770 45395
60	1.05774 22915	1.05919 81287	1.06074 86098	1.06239 38366	1.06413 39075	1.06596 89136
61	1.07565 60016	1.07717 64337	1.07879 59881	1.08051 48259	1.08233 31085	1.08425 09940
62	1.09357 90735	1.09516 54731	1.09685 55850	1.09864 96341	1.10054 78500	1.10255 04630
63	1.11151 13115	1.11316 50249	1.11492 71506	1.11679 79821	1.11877 78221	1.12086 69790
64	1.12945 25077	1.13117 48530	1.13301 04188	1.13495 95721	1.13702 26939	1.13920 01762
65	1.14740 24426	1.14919 47075	1.15110 51077	1.15313 40883	1.15528 21137	1.15754 96654
66	1.16536 08848	1.16722 43251	1.16921 09197	1.17132 11968	1.17355 57095	1.17591 50342
67	1.18332 75915	1.18526 34290	1.18732 75419	1.18952 05461	1.19184 30889	1.19429 58473
68	1.20130 23089	1.20331 17296	1.20545 46464	1.20773 17678	1.21014 38403	1.21269 16471
69	1.21928 47723	1.22136 89248	1.22359 18910	1.22595 44766	1.22845 75327	1.23110 19544
70	1.23727 47065	1.23943 47001	1.24173 89191	1.24418 82709	1.24678 37165	1.24952 62885
71	1.25527 18262	1.25750 87293	1.25989 53604	1.26243 27335	1.26512 19241	1.26796 40680
72	1.27327 58362	1.27559 06747	1.27806 08314	1.28068 74315	1.28347 16703	1.28641 48117
73	1.29128 64319	1.29368 01876	1.29623 49359	1.29895 19178	1.30183 24529	1.30487 79390
74	1.30930 32997	1.31177 69086	1.31441 72653	1.31722 57307	1.32020 37537	1.32335 28706
75	1.32732 61173	1.32988 04682	1.33260 73993	1.33550 83953	1.33858 50386	1.34183 90096
76	1.34535 45542	1.34799 04877	1.35080 49066	1.35379 94235	1.35697 57590	1.36033 57418
77	1.36338 82721	1.36610 65789	1.36900 93451	1.37209 83152	1.37537 53519	1.37884 24371
78	1.38142 69253	1.38422 83450	1.38722 02629	1.39040 45586	1.39378 32412	1.39735 84500
79	1.39947 01612	1.40235 53813	1.40543 71985	1.40871 76311	1.41219 88382	1.41588 31207
80	1.41751 76210	1.42048 72755	1.42365 96818	1.42703 70001	1.43062 15426	1.43441 57761
81	1.43556 89399	1.43862 36085	1.44188 72347	1.44536 21235	1.44905 07434	1.45295 57306
82	1.45362 37476	1.45676 39547	1.46011 93716	1.46369 24506	1.46748 58197	1.47150 22872
83	1.47168 16689	1.47490 78829	1.47835 56003	1.48202 74231	1.48592 61414	1.49005 47388
84	1.48974 23243	1.49305 49568	1.49659 54226	1.50036 64757	1.50437 10707	1.50861 23690
85	1.50780 53304	1.51120 47353	1.51483 83349	1.51870 90370	1.52281 99626	1.52717 44552
86	1.52587 03005	1.52935 67738	1.53308 38292	1.53705 45303	1.54127 21659	1.54574 02599
87	1.54393 68452	1.54751 06241	1.55133 13938	1.55540 23744	1.55972 70246	1.56430 90516
88	1.56200 45728	1.56566 58355	1.56958 05137	1.57375 19849	1.57818 38785	1.58288 00862
89	1.58007 30900	1.58382 19555	1.58783 06718	1.59210 27744	1.59664 20641	1.60145 26180
90	1.59814 20021	1.60197 85301	1.60608 13494	1.61045 41538	1.61510 09161	1.62002 58991

TABLE IX.

φ.	E(20°).		E(21°).		E(22°).		E(23°).		E(24°).		E(25°).	
0°	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000
1	0.01745	31889	0.01745	31788	0.01745	31682	0.01745	31573	0.01745	31460	0.01745	31342
2	0.03490	57560	0.03490	56749	0.03490	55905	0.03490	55030	0.03490	54126	0.03490	53192
3	0.05235	70803	0.05235	68065	0.05235	65219	0.05235	62267	0.05235	59216	0.05235	56065
4	0.06980	65422	0.06980	58933	0.06980	52189	0.06980	45196	0.06980	37963	0.06980	30499
5	0.08725	35240	0.08725	22572	0.08725	09406	0.08724	95753	0.08724	81632	0.08724	67060
6	0.10469	74108	0.10469	52231	0.10469	29491	0.10469	05911	0.10468	81523	0.10468	56355
7	0.12213	75913	0.12213	41197	0.12213	05108	0.12212	67688	0.12212	28984	0.12211	89040
8	0.13957	34582	0.13956	82800	0.13956	28969	0.13955	73152	0.13955	15418	0.13954	55833
9	0.15700	44090	0.15699	70424	0.15698	93841	0.15698	14432	0.15697	32295	0.15696	47520
10	0.17442	98468	0.17441	97514	0.17440	92558	0.17439	83728	0.17438	71153	0.17437	54968
11	0.19184	91807	0.19183	57578	0.19182	18026	0.19180	73318	0.19179	23627	0.19177	69132
12	0.20926	18267	0.20924	44202	0.20922	63229	0.20920	75565	0.20918	81433	0.20916	81067
13	0.22666	72082	0.22664	51051	0.22662	21241	0.22659	82928	0.22657	36394	0.22654	81937
14	0.24406	47559	0.24403	71880	0.24400	85232	0.24397	87969	0.24394	80443	0.24391	63023
15	0.26145	39131	0.26142	00538	0.26138	48475	0.26134	83362	0.26131	05632	0.26127	15736
16	0.27883	41267	0.27879	30979	0.27875	04354	0.27870	61902	0.27866	04143	0.27861	31624
17	0.29620	48575	0.29615	57265	0.29610	46374	0.29605	16509	0.29599	68294	0.29594	02381
18	0.31356	55761	0.31350	73573	0.31344	68162	0.31338	40241	0.31331	90550	0.31325	19858
19	0.33091	57643	0.33084	74206	0.33077	63481	0.33070	26301	0.33062	63561	0.33054	76072
20	0.34825	49158	0.34817	53596	0.34809	26234	0.34800	68041	0.34791	80029	0.34782	63213
21	0.36558	25369	0.36549	06308	0.36539	50473	0.36529	58975	0.36519	32968	0.36508	73654
22	0.38289	81468	0.38279	27054	0.38268	30401	0.38256	92781	0.38245	15511	0.38232	99963
23	0.40020	12785	0.40008	10692	0.39995	60387	0.39982	63313	0.39969	20968	0.39955	34906
24	0.41749	14791	0.41735	52236	0.41721	34966	0.41706	64608	0.41691	42855	0.41675	71460
25	0.43476	83106	0.43461	46861	0.43445	48847	0.43428	90891	0.43411	74892	0.43394	02818
26	0.45203	13502	0.45185	89908	0.45167	96922	0.45149	36583	0.45130	11010	0.45110	22400
27	0.46928	01908	0.46908	76892	0.46888	74270	0.46867	96307	0.46846	45357	0.46824	23862
28	0.48651	44418	0.48630	03505	0.48607	76163	0.48584	64896	0.48560	72307	0.48536	01099
29	0.50373	37293	0.50349	65624	0.50324	98074	0.50299	37399	0.50272	86467	0.50245	48258
30	0.52093	76968	0.52067	59314	0.52040	35680	0.52012	09087	0.51982	82685	0.51952	59742
31	0.53812	60053	0.53783	80833	0.53753	84869	0.53722	75460	0.53690	56052	0.53657	30218
32	0.55529	83342	0.55498	26640	0.55465	41745	0.55431	32252	0.55396	01915	0.55359	54626
33	0.57245	43815	0.57210	93396	0.57175	02635	0.57137	75438	0.57099	15879	0.57059	28184
34	0.58959	38640	0.58921	77970	0.58882	64093	0.58842	01238	0.58799	93813	0.58756	46396
35	0.60671	65181	0.60630	77443	0.60588	22903	0.60544	06122	0.60498	31859	0.60451	05055
36	0.62382	20999	0.62337	89115	0.62291	76085	0.62243	86816	0.62194	26433	0.62143	00254
37	0.64091	03855	0.64043	10503	0.63993	20898	0.63941	40309	0.63887	74235	0.63832	22839
38	0.65798	11715	0.65746	39349	0.65692	54847	0.65636	63853	0.65578	72252	0.65518	86163
39	0.67503	42752	0.67447	73623	0.67389	75685	0.67329	54970	0.67267	17761	0.67202	70596
40	0.69206	95350	0.69147	11525	0.69084	81417	0.69020	11456	0.68953	08235	0.68883	79027
41	0.70908	68105	0.70844	51487	0.70777	70302	0.70708	31383	0.70636	41849	0.70562	09117
42	0.72608	59828	0.72539	92180	0.72468	40857	0.72394	13106	0.72317	16482	0.72237	58856
43	0.74306	69548	0.74233	32512	0.74156	91860	0.74077	55262	0.73995	30719	0.73910	26568
44	0.76002	96511	0.75924	71632	0.75843	23252	0.75758	56775	0.75670	83358	0.75580	10912
45	0.77697	40185	0.77614	08931	0.77527	31640	0.77437	16859	0.77343	73509	0.77247	10886

TABLE IX.

ϕ .	F(20°).	F(21°).	F(22°).	F(23°).	F(24°).	F(25°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 33962	0.01745 34063	0.01745 34169	0.01745 34278	0.01745 34391	0.01745 34508
2	0.03490 74141	0.03490 74952	0.03490 75797	0.03490 76671	0.03490 77575	0.03490 78510
3	0.05236 26750	0.05236 29489	0.05236 32337	0.05236 35288	0.05236 38341	0.05236 41493
4	0.06981 97991	0.06982 04481	0.06982 11229	0.06982 18225	0.06982 25462	0.06982 32930
5	0.08727 94047	0.08728 06720	0.08728 19896	0.08728 33558	0.08728 47689	0.08728 62274
6	0.10474 21080	0.10474 42974	0.10474 65735	0.10474 89337	0.10475 13751	0.10475 38949
7	0.12220 85225	0.12221 19979	0.12221 56111	0.12221 93580	0.12222 32340	0.12222 72345
8	0.13967 92582	0.13968 44437	0.13968 98353	0.13969 54265	0.13970 12108	0.13970 71811
9	0.15715 49212	0.15716 23010	0.15716 99745	0.15717 79326	0.15718 61659	0.15719 46646
10	0.17463 61132	0.17464 62310	0.17465 67522	0.17466 76643	0.17467 89544	0.17469 06092
11	0.19212 34308	0.19213 68897	0.19215 08861	0.19216 54036	0.19218 04251	0.19219 59330
12	0.20961 74650	0.20963 49271	0.20965 30879	0.20967 19262	0.20969 14201	0.20971 15469
13	0.22711 88006	0.22714 09866	0.22716 40621	0.22718 80005	0.22721 27739	0.22723 83540
14	0.24462 80159	0.24465 57046	0.24468 45059	0.24471 43868	0.24474 53129	0.24477 72490
15	0.26214 56817	0.26217 97096	0.26221 51080	0.26225 18370	0.26228 98543	0.26232 91172
16	0.27967 23608	0.27971 36217	0.27975 65486	0.27980 10935	0.27984 72058	0.27989 48339
17	0.29720 86078	0.29725 80521	0.29730 94982	0.29736 28890	0.29741 81646	0.29747 52637
18	0.31475 49684	0.31481 36025	0.31487 46172	0.31493 79452	0.31500 35167	0.31507 12595
19	0.33231 19785	0.33238 08642	0.33245 25550	0.33252 69727	0.33260 40362	0.33268 36618
20	0.34988 01641	0.34995 04179	0.35004 39498	0.35013 06699	0.35022 04848	0.35031 32981
21	0.36746 00402	0.36755 28327	0.36764 94274	0.36774 97222	0.36785 36104	0.36796 09818
22	0.38505 21108	0.38515 86657	0.38526 96012	0.38538 48018	0.38550 41469	0.38562 75114
23	0.40265 68681	0.40277 84613	0.40290 50707	0.40303 65665	0.40317 28132	0.40331 36700
24	0.42027 47917	0.42041 27508	0.42055 64214	0.42070 56590	0.42086 03124	0.42102 02241
25	0.43790 63485	0.43806 20512	0.43822 42240	0.43839 27066	0.43856 73312	0.43874 79230
26	0.45555 19917	0.45572 68655	0.45590 90338	0.45609 83199	0.45629 45388	0.45649 74977
27	0.47321 21606	0.47340 76813	0.47361 13897	0.47382 30924	0.47404 25864	0.47426 96602
28	0.49088 72797	0.49110 49704	0.49133 18139	0.49156 75997	0.49181 21061	0.49206 51025
29	0.50857 77584	0.50881 91883	0.50907 08111	0.50933 23986	0.50960 37105	0.50988 44959
30	0.52628 39905	0.52655 07735	0.52682 88677	0.52711 80267	0.52741 79912	0.52772 84899
31	0.54400 63534	0.54430 01471	0.54460 64512	0.54492 50013	0.54525 55187	0.54559 77114
32	0.56174 52078	0.56206 77118	0.56240 40097	0.56275 38189	0.56311 68412	0.56349 27640
33	0.57950 08970	0.57985 38517	0.58022 19710	0.58060 49541	0.58100 24838	0.58141 42266
34	0.59727 37465	0.59765 89315	0.59806 07420	0.59847 88595	0.59891 29477	0.59936 26527
35	0.61506 40635	0.61548 32959	0.61592 07081	0.61637 59642	0.61684 87094	0.61733 85697
36	0.63287 21363	0.63332 72692	0.63380 22325	0.63429 66737	0.63481 02199	0.63534 24779
37	0.65069 82339	0.65119 11545	0.65170 56556	0.65224 13687	0.65279 79039	0.65337 48492
38	0.66854 26053	0.66907 52334	0.66963 12943	0.67021 04047	0.67081 21587	0.67143 61266
39	0.68540 54795	0.68607 97653	0.68757 94415	0.68820 41113	0.68885 33539	0.68952 67233
40	0.70428 70645	0.70490 49868	0.70555 03654	0.70622 27912	0.70692 18301	0.70764 70215
41	0.72218 75473	0.72285 11115	0.72354 43089	0.72426 67197	0.72501 78985	0.72579 73717
42	0.74010 70932	0.74081 83292	0.74156 14889	0.74233 61442	0.74314 18399	0.74397 80918
43	0.75804 58454	0.75880 68055	0.75960 20962	0.76043 12832	0.76129 39041	0.76218 94662
44	0.77600 39249	0.77681 66814	0.77766 62944	0.77855 23260	0.77947 43090	0.78043 17449
45	0.79398 14299	0.79484 80729	0.79575 42198	0.79669 94320	0.79768 32401	0.79870 51427

TABLE IX.

φ.	E (20°).		E (21°).		E (22°).		E (23°).		E (24°).		E (25°).	
45°	0.77697	40185	0.77614	08931	0.77527	31640	0.77437	16859	0.77343	73509	0.77247	10886
46	0.79390	00259	0.79301	44044	0.79209	19298	0.79113	35019	0.79014	00599	0.78911	25830
47	0.81080	76647	0.80986	76851	0.80888	85169	0.80787	11052	0.80681	64374	0.80572	55428
48	0.82769	69484	0.82670	07482	0.82566	29365	0.82458	45052	0.82346	64900	0.82230	99714
49	0.84456	79132	0.84351	36309	0.84241	52271	0.84127	37407	0.84009	02566	0.83886	59067
50	0.86142	06177	0.86030	63955	0.85914	54543	0.85793	88803	0.85668	78081	0.85539	34219
51	0.87825	51428	0.87707	91291	0.87585	37108	0.87458	00221	0.87325	92479	0.87189	26252
52	0.89507	15921	0.89383	19433	0.89254	01165	0.89119	72943	0.88980	47120	0.88836	36597
53	0.91187	00915	0.91056	49746	0.90920	48187	0.90779	08545	0.90632	43685	0.90480	67040
54	0.92865	07892	0.92727	83842	0.92584	79914	0.92436	08900	0.92281	84178	0.92122	19717
55	0.94541	38555	0.94397	23577	0.94246	98358	0.94090	76177	0.93928	70926	0.93760	97112
56	0.96215	94829	0.96064	71050	0.95907	05797	0.95743	12838	0.95573	06577	0.95397	02060
57	0.97888	78858	0.97730	28604	0.97565	04778	0.97393	21637	0.97214	94096	0.97030	37743
58	0.99559	93000	0.99393	98819	0.99220	98110	0.99041	05617	0.98854	36767	0.98661	07686
59	1.01229	39831	1.01055	84515	1.00874	88865	1.00686	68109	1.00491	38185	1.00289	15757
60	1.02897	22138	1.02715	88746	1.02526	80372	1.02330	12727	1.02126	02257	1.01914	66163
61	1.04563	42915	1.04374	14796	1.04176	76216	1.03971	43366	1.03758	33198	1.03537	63444
62	1.06228	05364	1.06030	66179	1.05824	80234	1.05610	64197	1.05388	35523	1.05158	12472
63	1.07891	12888	1.07685	46632	1.07470	96511	1.07247	79663	1.07016	14047	1.06776	18444
64	1.09552	69089	1.09338	60112	1.09115	29372	1.08882	94476	1.08641	73878	1.08391	86877
65	1.11212	77764	1.10990	10793	1.10757	83383	1.10516	13608	1.10265	20410	1.10005	23602
66	1.12871	42900	1.12640	03058	1.12398	63343	1.12147	42289	1.11886	59321	1.11616	34759
67	1.14528	68668	1.14288	41498	1.14037	74280	1.13776	86001	1.13505	96562	1.13225	26789
68	1.16184	59421	1.15935	30903	1.15675	21440	1.15404	50466	1.15123	38355	1.14832	06426
69	1.17839	19688	1.17580	76260	1.17311	10287	1.17030	41649	1.16738	91181	1.16436	80691
70	1.19492	54166	1.19224	82741	1.18945	46495	1.18654	65743	1.18352	61775	1.18039	56882
71	1.21144	67716	1.20867	55704	1.20578	35939	1.20277	29162	1.19964	57118	1.19640	42567
72	1.22795	65360	1.22509	00682	1.22209	84688	1.21898	38539	1.21578	84426	1.21239	45573
73	1.24445	52270	1.24149	23376	1.23839	98998	1.23518	00712	1.23183	51143	1.22836	73976
74	1.26094	33762	1.25788	29651	1.25468	85307	1.25136	22717	1.24790	64934	1.24432	36092
75	1.27742	15293	1.27426	25524	1.27096	50223	1.26753	11780	1.26396	33670	1.26026	40465
76	1.29389	02452	1.29063	17161	1.28723	00517	1.28368	75307	1.28000	65418	1.27618	95860
77	1.31035	00951	1.30699	10865	1.30348	43113	1.29983	20872	1.29603	68437	1.29210	11245
78	1.32680	16620	1.32334	13070	1.31972	85082	1.31596	56213	1.31205	51162	1.30799	95783
79	1.34324	55400	1.33968	30335	1.33596	33630	1.33208	89217	1.32806	22193	1.32388	58821
80	1.35968	23333	1.35601	69330	1.35218	96088	1.34820	27911	1.34405	90283	1.33976	09875
81	1.37611	26554	1.37234	36830	1.36840	79906	1.36430	80450	1.36004	64330	1.35562	58617
82	1.39253	71286	1.38866	39708	1.38461	92639	1.38040	55107	1.37602	53360	1.37148	14862
83	1.40895	63830	1.40497	84922	1.40082	41938	1.39649	60264	1.39199	66519	1.38732	88557
84	1.42537	10555	1.42128	79509	1.41702	35544	1.41258	04398	1.40796	13058	1.40316	89764
85	1.44178	17892	1.43759	30573	1.43321	81270	1.42865	96068	1.42392	02320	1.41900	28646
86	1.45818	92325	1.45389	45279	1.44940	86996	1.44473	43907	1.43987	43728	1.43483	15455
87	1.47459	40382	1.47019	30839	1.46559	60656	1.46080	56609	1.45582	46773	1.45065	60518
88	1.49099	68627	1.48648	94505	1.48178	10228	1.47687	42916	1.47177	20998	1.46647	74220
89	1.50739	83648	1.50278	43558	1.49796	43724	1.49294	11605	1.48771	75988	1.48229	66989
90	1.52379	92053	1.51907	85300	1.51414	69175	1.50900	71479	1.50366	21554	1.49811	49284

ϕ .	F (20°).		F (21°).		F (22°).		F (23°).		F (24°).		F (25°).	
45°	0.79398	14299	0.79484	80729	0.79575	42198	0.79669	94320	0.79768	32401	0.79870	51427
46	0.81197	84355	0.81290	10704	0.81386	59806	0.81487	27298	0.81592	08495	0.81700	98386
47	0.82999	49932	0.83097	57385	0.83200	16568	0.83307	23170	0.83418	72555	0.83534	59748
48	0.84803	11311	0.84907	21156	0.85016	12993	0.85129	82599	0.85248	25420	0.85371	36559
49	0.86608	68531	0.86719	02136	0.86834	49299	0.86955	05923	0.87080	67577	0.87211	29482
50	0.88416	21388	0.88533	00174	0.88655	25406	0.88782	93155	0.88915	99155	0.89054	38793
51	0.90225	69437	0.90349	14850	0.90478	40936	0.90613	43979	0.90754	19924	0.90900	64371
52	0.92037	11986	0.92167	45468	0.92303	95207	0.92446	57743	0.92595	29285	0.92750	05695
53	0.93850	48093	0.93987	91057	0.94131	87231	0.94282	33460	0.94439	26268	0.94602	61835
54	0.95665	76569	0.95810	50369	0.95962	15712	0.96120	69801	0.96286	09528	0.96458	31451
55	0.97482	95976	0.97635	21879	0.97794	79046	0.97961	65095	0.98135	77343	0.98317	12786
56	0.99302	04625	0.99462	03779	0.99629	75316	0.99805	17325	0.99988	27608	1.00179	03664
57	1.01123	00579	1.01290	93984	1.01467	02295	1.01651	24128	1.01843	57835	1.02044	01484
58	1.02945	81648	1.03121	90129	1.03306	57442	1.03499	82793	1.03701	65151	1.03912	03221
59	1.04770	45395	1.04954	89568	1.05148	37904	1.05350	90263	1.05562	46296	1.05783	05421
60	1.06596	89136	1.06789	89379	1.06992	40517	1.07204	43132	1.07425	97625	1.07657	04205
61	1.08425	09940	1.08626	86360	1.08838	61806	1.09060	37646	1.09292	15107	1.09533	95261
62	1.10255	04630	1.10465	77036	1.10686	97988	1.10918	69708	1.11160	94324	1.11413	73851
63	1.12086	69790	1.12306	57658	1.12537	44971	1.12779	34877	1.13032	30477	1.13296	34811
64	1.13920	01762	1.14149	24207	1.14389	98361	1.14642	28370	1.14906	18385	1.15181	72553
65	1.15754	96654	1.15993	72398	1.16244	53466	1.16507	45069	1.16782	52490	1.17069	81065
66	1.17591	50342	1.17839	97685	1.18101	05295	1.18374	79523	1.18661	26862	1.18960	53923
67	1.19429	58473	1.19687	95261	1.19959	48566	1.20244	25954	1.20542	35202	1.20853	84287
68	1.21269	16471	1.21537	60067	1.21819	77712	1.22115	78259	1.22425	70851	1.22749	64914
69	1.23110	19544	1.23388	86798	1.23681	86886	1.23989	30022	1.24311	26793	1.24647	88160
70	1.24952	62685	1.25241	69905	1.25545	69968	1.25864	74517	1.26198	95666	1.26548	45993
71	1.26796	40680	1.27096	03606	1.27411	20570	1.27742	04718	1.28088	69766	1.28451	29999
72	1.28641	48117	1.28951	81890	1.29278	32047	1.29621	13306	1.29980	41063	1.30356	31391
73	1.30487	79390	1.30808	98528	1.31146	97504	1.31501	92680	1.31874	01204	1.32263	41023
74	1.32355	28706	1.32667	47076	1.33017	09805	1.33384	34964	1.33769	41530	1.34172	49401
75	1.34183	90096	1.34527	20889	1.34888	61582	1.35268	32021	1.35666	53082	1.36083	46694
76	1.36033	57418	1.36388	13128	1.36761	45247	1.37153	75464	1.37565	26621	1.37996	22752
77	1.37884	24371	1.38250	16766	1.38635	53002	1.39040	56665	1.39465	52633	1.39910	67117
78	1.39735	84500	1.40113	24606	1.40510	76849	1.40928	66772	1.41367	21350	1.41826	69042
79	1.41588	31207	1.41977	29284	1.42387	08603	1.42817	96719	1.43270	22762	1.43744	17504
80	1.43441	57761	1.43842	23285	1.44264	39906	1.44708	37241	1.45174	46633	1.45663	01226
81	1.45295	57306	1.45707	98950	1.46142	62236	1.46599	78889	1.47079	82517	1.47583	08692
82	1.47150	22872	1.47574	48492	1.48021	66924	1.48492	12045	1.48986	19775	1.49504	28168
83	1.49005	47388	1.49441	64004	1.49901	45165	1.50385	26936	1.50893	47594	1.51426	47719
84	1.50861	23690	1.51309	37475	1.51781	88033	1.52279	13652	1.52801	55003	1.53349	55235
85	1.52717	44532	1.53177	60801	1.53662	86496	1.54173	62161	1.54710	30892	1.55273	38446
86	1.54574	02599	1.55046	25795	1.55544	31430	1.56068	62326	1.56619	64033	1.57197	84944
87	1.56430	90516	1.56915	24205	1.57426	13634	1.57964	03922	1.58529	43097	1.59122	82211
88	1.58288	00862	1.58854	47725	1.59308	23845	1.59859	76654	1.60439	56672	1.61048	17634
89	1.60145	26180	1.60653	88008	1.61190	52753	1.61755	70172	1.62349	93288	1.62973	78535
90	1.62002	58991	1.62523	36678	1.63072	91016	1.63631	74093	1.64260	41437	1.64899	52185

TABLE IX.

ϕ .	E(25°).	E(26°).	E(27°).	E(28°).	E(29°).	E(30°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 31342	0.01745 31222	0.01745 31100	0.01745 30972	0.01745 30842	0.01745 30710
2	0.03490 53192	0.03490 52231	0.03490 51244	0.03490 50230	0.03490 49192	0.03490 48132
3	0.05235 56065	0.05235 52822	0.05235 49489	0.05235 46069	0.05235 42568	0.05235 38991
4	0.06980 30499	0.06980 22812	0.06980 14914	0.06980 06811	0.06979 98516	0.06979 90038
5	0.08724 67060	0.08724 52053	0.08724 36631	0.08724 20813	0.08724 04617	0.08723 88064
6	0.10468 56355	0.10468 30436	0.10468 03800	0.10467 76478	0.10467 48504	0.10467 19912
7	0.12211 89040	0.12211 47906	0.12211 05632	0.12210 62270	0.12210 17872	0.12209 72492
8	0.13954 55833	0.13953 94473	0.13953 31411	0.13952 66724	0.13952 00490	0.13951 32791
9	0.15696 47520	0.15695 60220	0.15694 70499	0.15693 78458	0.15692 84217	0.15691 87888
10	0.17437 54968	0.17436 35315	0.17435 12338	0.17433 86185	0.17432 57010	0.17431 24969
11	0.19177 69132	0.19176 10022	0.19174 46486	0.19172 78725	0.19171 06938	0.19169 31335
12	0.20916 81067	0.20914 74709	0.20912 62605	0.20910 45015	0.20908 22196	0.20905 94420
13	0.22654 81937	0.22652 19861	0.22649 50480	0.22646 74122	0.22643 91115	0.22641 01800
14	0.24391 63023	0.24388 36088	0.24385 00031	0.24381 55256	0.24378 02174	0.24374 41209
15	0.26127 15736	0.26123 14139	0.26119 01322	0.26114 77779	0.26110 44015	0.26106 00549
16	0.27861 31624	0.27856 44907	0.27851 44571	0.27846 31217	0.27841 05451	0.27835 67906
17	0.29594 02381	0.29588 19441	0.29582 20166	0.29576 05271	0.29569 75483	0.29563 31557
18	0.31325 19858	0.31318 28958	0.31311 18667	0.31303 89830	0.31296 43307	0.31288 79989
19	0.33054 76072	0.33046 64851	0.33038 30824	0.33029 74980	0.33020 98328	0.33012 01909
20	0.34782 63213	0.34773 18698	0.34763 47584	0.34753 51018	0.34743 30172	0.34732 86253
21	0.36508 73654	0.36497 82274	0.36486 60102	0.36475 08459	0.36463 28696	0.36451 22204
22	0.38232 99963	0.38220 47557	0.38207 59749	0.38194 38049	0.38180 84002	0.38166 99200
23	0.39955 34906	0.39941 06740	0.39926 38125	0.39911 30775	0.39895 86446	0.39880 06947
24	0.41675 71460	0.41659 52240	0.41642 87068	0.41625 77877	0.41608 26651	0.41590 35433
25	0.43394 02818	0.43375 76707	0.43356 98663	0.43337 70856	0.43317 95515	0.43297 74936
26	0.45110 22400	0.45089 73031	0.45068 65251	0.45047 01486	0.45024 84227	0.45002 16039
27	0.46824 23862	0.46801 34353	0.46777 79441	0.46753 61824	0.46728 84272	0.46703 49638
28	0.48536 01099	0.48510 54072	0.48484 34116	0.48457 44218	0.48429 87445	0.48401 66957
29	0.50245 48258	0.50217 25854	0.50188 22444	0.50158 41319	0.50127 85861	0.50096 59558
30	0.51952 59742	0.51921 43641	0.51889 37886	0.51856 46089	0.51822 71965	0.51788 19349
31	0.53657 30218	0.53623 01659	0.53587 74205	0.53551 51811	0.53514 38542	0.53476 38598
32	0.55359 54626	0.55321 94420	0.55283 25473	0.55243 52097	0.55202 78726	0.55161 09942
33	0.57059 28184	0.57018 16739	0.56975 86082	0.56932 40897	0.56887 86009	0.56842 26398
34	0.58756 46396	0.58711 63736	0.58665 50749	0.58618 12510	0.58569 54253	0.58519 81373
35	0.60451 05055	0.60402 30841	0.60352 14525	0.60300 61591	0.60247 77695	0.60193 68671
36	0.62143 00254	0.62090 13804	0.62035 72802	0.61979 83155	0.61922 50960	0.61863 82506
37	0.63832 28389	0.63775 08702	0.63716 21319	0.63655 72589	0.63593 69066	0.63530 17510
38	0.65518 86163	0.65457 11942	0.65393 56172	0.65328 25660	0.65261 27433	0.65192 68740
39	0.67202 70596	0.67136 20269	0.67067 73817	0.66997 38519	0.66925 21892	0.66851 31690
40	0.68883 79027	0.68812 30772	0.68738 71078	0.68663 07710	0.68585 48690	0.68506 02295
41	0.70562 09117	0.70485 40888	0.70406 45152	0.70325 30175	0.70242 04500	0.70156 76942
42	0.72237 58856	0.72155 48406	0.72070 93614	0.71984 03261	0.71894 86425	0.71803 52476
43	0.73910 26568	0.73822 51473	0.73732 14423	0.73639 24725	0.73543 92007	0.73446 26206
44	0.75580 10912	0.75486 48599	0.75390 05926	0.75290 92740	0.75189 19230	0.75084 95913
45	0.77247 10886	0.77147 38658	0.77044 66863	0.76939 05898	0.76830 66525	0.76719 59857

φ.	F (25°).		F (26°).		F (27°).		F (28°).		F (29°).		F (30°).	
0°	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000	0.00000	00000
1	0.01745	34508	0.01745	34628	0.01745	34752	0.01745	34878	0.01745	35008	0.01745	35141
2	0.03490	78510	0.03490	79471	0.03490	80459	0.03490	81472	0.03490	82510	0.03490	83570
3	0.05236	41493	0.05236	44737	0.05236	48072	0.05236	51491	0.05236	54994	0.05236	58573
4	0.06982	32930	0.06982	40620	0.06982	48524	0.06982	56630	0.06982	64932	0.06982	73416
5	0.08728	62274	0.08728	77292	0.08728	92728	0.08729	08562	0.08729	24775	0.08729	41346
6	0.10475	38949	0.10475	64898	0.10475	91570	0.10476	18930	0.10476	46946	0.10476	75583
7	0.12222	72345	0.12223	13547	0.12223	55896	0.12223	99341	0.12224	43830	0.12224	89309
8	0.13970	71811	0.13971	33303	0.13971	96512	0.13972	61361	0.13973	27770	0.13973	95662
9	0.15719	46646	0.15720	34184	0.15721	24172	0.15722	16501	0.15723	11058	0.15724	07733
10	0.17469	06092	0.17470	26148	0.17471	49572	0.17472	76215	0.17474	05926	0.17475	38551
11	0.19219	59330	0.19221	19089	0.19222	83341	0.19224	51892	0.19226	24539	0.19228	01081
12	0.20971	15469	0.20973	22827	0.20975	36035	0.20977	54844	0.20979	78990	0.20982	08214
13	0.22723	83540	0.22726	47105	0.22729	18131	0.22731	96302	0.22734	81288	0.22737	72759
14	0.24477	72490	0.24481	01576	0.24484	40013	0.24487	87407	0.24491	43350	0.24495	07433
15	0.26232	91172	0.26236	95800	0.26241	11969	0.26245	39201	0.26249	76996	0.26254	24855
16	0.27989	48339	0.27994	39232	0.27999	44184	0.28004	62619	0.28009	93938	0.28015	37538
17	0.29747	52637	0.29753	41216	0.29759	46726	0.29765	68481	0.29772	05771	0.29778	57878
18	0.31507	12595	0.31514	10977	0.31521	29542	0.31528	67482	0.31536	23965	0.31543	98144
19	0.33268	36618	0.33276	57612	0.33285	02448	0.33293	70185	0.33302	59855	0.33311	70471
20	0.35031	32981	0.35040	90083	0.35050	75120	0.35060	87009	0.35071	24631	0.35081	86847
21	0.36796	09818	0.36807	17206	0.36818	57087	0.36830	28221	0.36842	29330	0.36854	59108
22	0.38562	75114	0.38575	47644	0.38588	57717	0.38602	03928	0.38615	84825	0.38629	98923
23	0.40331	37700	0.40345	89899	0.40360	86214	0.40376	24065	0.40392	01813	0.40408	17784
24	0.42102	02241	0.42118	52301	0.42135	51605	0.42152	98385	0.42170	90809	0.42189	26997
25	0.43874	79230	0.43893	42999	0.43912	62729	0.43932	36451	0.43952	62131	0.43973	37669
26	0.45649	74977	0.45670	69953	0.45692	28228	0.45714	47624	0.45737	25890	0.45760	60698
27	0.47426	96602	0.47450	40926	0.47474	56540	0.47499	41051	0.47524	91979	0.47551	06758
28	0.49206	51025	0.49232	63470	0.49259	55886	0.49287	25655	0.49315	70060	0.49344	86289
29	0.50988	44959	0.51017	44921	0.51047	34260	0.51078	10126	0.51109	69556	0.51142	09483
30	0.52772	84899	0.52804	92387	0.52837	99419	0.52872	02906	0.52906	99634	0.52942	86272
31	0.54559	77114	0.54595	12739	0.54631	58871	0.54669	12180	0.54707	69195	0.54747	26314
32	0.56349	27640	0.56388	12599	0.56428	19865	0.56469	45862	0.56511	86859	0.56555	38981
33	0.58141	42266	0.58183	98332	0.58227	89380	0.58273	11586	0.58319	60956	0.58367	33341
34	0.59936	26527	0.59982	76036	0.60030	74114	0.60080	16691	0.60130	99510	0.60183	18144
35	0.61733	85697	0.61784	51530	0.61836	80471	0.61890	68209	0.61946	10224	0.62003	01811
36	0.63534	24779	0.63589	30345	0.63646	14554	0.63704	72855	0.63765	00470	0.63826	92418
37	0.65337	48492	0.65397	17715	0.65458	82150	0.65522	37011	0.65587	77271	0.65654	97679
38	0.67143	61266	0.67208	18565	0.67274	88718	0.67343	66715	0.67414	47289	0.67487	24928
39	0.68952	67233	0.69022	37500	0.69094	39379	0.69168	67648	0.69245	16814	0.69323	81109
40	0.70764	70215	0.70839	78796	0.70917	38904	0.70997	45121	0.71079	91740	0.71164	72757
41	0.72579	73717	0.72660	46390	0.72743	91704	0.72830	04063	0.72918	77562	0.73010	05980
42	0.74397	80918	0.74484	43870	0.74574	01816	0.74666	49005	0.74761	79354	0.74859	86446
43	0.76218	94662	0.76311	74464	0.76407	72895	0.76506	84070	0.76609	01757	0.76714	19365
44	0.78043	17449	0.78142	41031	0.78245	08198	0.78351	12960	0.78460	48962	0.78573	09472
45	0.79870	51427	0.79976	46051	0.80086	10576	0.80199	38941	0.80316	24701	0.80436	61012

TABLE IX.

ϕ .	E (25°).	E (26°).	E (27°).	E (28°).	E (29°).	E (30°).
45°	0.77247 10886	0.77147 38658	0.77044 66863	0.76939 05898	0.76830 66525	0.76719 59857
46	0.78911 25830	0.78805 20894	0.78695 96371	0.78583 63217	0.78468 32780	0.78350 16779
47	0.80572 55428	0.80459 94923	0.80343 93984	0.80224 64143	0.80102 17338	0.79976 65910
48	0.82230 99714	0.82111 60734	0.81988 59643	0.81862 08553	0.81732 20007	0.81599 06973
49	0.83886 59067	0.83760 18694	0.83629 93692	0.83495 96760	0.83358 41057	0.83217 40189
50	0.85539 34219	0.85405 69547	0.85267 96881	0.85126 29516	0.84980 81230	0.84831 66279
51	0.87189 26252	0.87048 14418	0.86902 70371	0.86753 08009	0.86599 41738	0.86441 86466
52	0.88836 36597	0.88687 54810	0.88534 15732	0.88376 33870	0.88214 24264	0.88048 02480
53	0.90480 67040	0.90323 92607	0.90162 34945	0.89996 09172	0.89825 30966	0.89650 16559
54	0.92122 19717	0.91957 30075	0.91787 30402	0.91612 36429	0.91432 64477	0.91248 31448
55	0.93760 97112	0.93587 69857	0.93409 04903	0.93225 18596	0.93036 27904	0.92842 50401
56	0.95397 02060	0.95215 14977	0.95027 61658	0.94834 59071	0.94636 24829	0.94432 77181
57	0.97030 37743	0.96839 68832	0.96643 04284	0.96440 61689	0.96232 59306	0.96019 16059
58	0.98661 07686	0.98461 35194	0.98255 36805	0.98043 30724	0.97825 35859	0.97601 71810
59	1.00289 15757	1.00080 18209	0.99864 63643	0.99642 70883	0.99414 59482	0.99180 49714
60	1.01914 66163	1.01696 22388	1.01470 89622	1.01238 87305	1.01000 35633	1.00755 55550
61	1.03537 63444	1.03309 52607	1.03074 19960	1.02831 85555	1.02582 70229	1.02326 95593
62	1.05158 12472	1.04920 14101	1.04674 60265	1.04421 71622	1.04161 69645	1.03894 76610
63	1.06776 18444	1.06528 12460	1.06272 16529	1.06008 51909	1.05737 40706	1.05459 05852
64	1.08391 86877	1.08133 53624	1.07866 95124	1.07592 33232	1.07309 90680	1.07019 91051
65	1.10005 23602	1.09736 43873	1.09459 02794	1.09173 22810	1.08879 27272	1.08577 40408
66	1.11616 34759	1.11336 89825	1.11048 46649	1.10751 28259	1.10445 58618	1.10131 62590
67	1.13225 26789	1.12934 98426	1.12635 34156	1.12326 57583	1.12008 93272	1.11682 66719
68	1.14832 06426	1.14530 76943	1.14219 73131	1.13899 19165	1.13569 40201	1.13230 62359
69	1.16436 80691	1.16124 32955	1.15801 71732	1.15469 21758	1.15127 08774	1.14775 59511
70	1.18039 56882	1.17715 74344	1.17381 38446	1.17036 74475	1.16682 08748	1.16317 68598
71	1.19640 42567	1.19305 09288	1.18958 82081	1.18601 86778	1.18234 50261	1.17857 00453
72	1.21239 45573	1.20892 46246	1.20534 11755	1.20164 68467	1.19784 43815	1.19393 66306
73	1.22836 73976	1.22477 93952	1.22107 36885	1.21725 29664	1.21332 00267	1.20927 77771
74	1.24432 36092	1.24061 61403	1.23678 67173	1.23283 80805	1.22877 30813	1.22459 46832
75	1.26026 40465	1.25643 57845	1.25248 12596	1.24840 32626	1.24420 46974	1.23988 85822
76	1.27618 95860	1.27223 92764	1.26815 83392	1.26394 96146	1.25961 60581	1.25516 07414
77	1.29210 11245	1.28802 75871	1.28381 90046	1.27947 82654	1.27500 83758	1.27041 24600
78	1.30799 95783	1.30380 17092	1.29946 43276	1.29499 03695	1.29038 28907	1.28564 50673
79	1.32388 58821	1.31956 26552	1.31509 54018	1.31048 71050	1.30574 08692	1.30085 99209
80	1.33976 09875	1.33531 14561	1.33071 33414	1.32596 96726	1.32108 36018	1.31605 84050
81	1.35562 58617	1.35104 91602	1.34631 92793	1.34143 92934	1.33641 24014	1.33124 19281
82	1.37148 14862	1.36677 68315	1.36191 43656	1.35689 72073	1.35172 86015	1.34641 19212
83	1.38732 88557	1.38249 55485	1.37749 97661	1.37234 46714	1.36703 35545	1.36156 98356
84	1.40316 89764	1.39820 64021	1.39307 66606	1.38778 29580	1.38232 86293	1.37671 71408
85	1.41900 28646	1.41391 04947	1.40864 62413	1.40321 33531	1.39761 52094	1.39185 53224
86	1.43483 15455	1.42960 89383	1.42420 97108	1.41863 71540	1.41289 46911	1.40698 58797
87	1.45065 60518	1.44530 28529	1.43976 82806	1.43405 56679	1.42816 84814	1.42211 03236
88	1.46647 74220	1.46099 33651	1.45532 31694	1.44947 02096	1.44343 79956	1.43723 01743
89	1.48229 66989	1.47668 16063	1.47087 56013	1.46488 21000	1.45870 46555	1.45234 69589
90	1.49811 49284	1.49236 87111	1.48642 68037	1.48029 26638	1.47396 98872	1.46746 22093

ϕ .	F (25°).	F (26°).	F (27°).	F (28°).	F (29°).	F (30°).
45°	0.79870 51427	0.79976 46051	0.80086 10576	0.80199 38941	0.80316 24701	0.80436 61012
46	0.81700 98386	0.81813 91617	0.81930 82466	0.82051 64834	0.82176 32226	0.82304 77722
47	0.83534 59748	0.83654 79423	0.83779 25872	0.83907 93001	0.84040 74299	0.84177 62816
48	0.85371 36559	0.85499 10756	0.85631 42363	0.85768 25331	0.85909 53177	0.86055 18969
49	0.87211 29482	0.87346 86492	0.87487 33059	0.87632 63229	0.87782 70599	0.87937 48301
50	0.89054 38793	0.89198 07081	0.89346 98622	0.89501 07608	0.89660 27769	0.89824 52358
51	0.90900 64371	0.91052 72543	0.91210 39246	0.91373 58875	0.91542 25350	0.91716 32104
52	0.92750 05695	0.92910 82460	0.93077 54651	0.93250 16921	0.93428 63444	0.93612 87900
53	0.94602 61835	0.94772 35971	0.94948 44071	0.95130 81110	0.95319 41585	0.95514 19492
54	0.96458 31451	0.96637 31763	0.96823 06248	0.97015 50272	0.97214 58727	0.97420 25999
55	0.98317 12786	0.98505 68067	0.98701 39426	0.98904 22693	0.99114 13232	0.99331 05898
56	1.00179 03664	1.00377 42653	1.00583 41343	1.00796 96108	1.01018 02860	1.01246 57014
57	1.02044 01484	1.02252 52824	1.02469 09228	1.02693 67693	1.02926 24764	1.03166 76508
58	1.03912 03221	1.04130 95415	1.04358 39793	1.04594 34058	1.04838 75479	1.05091 60866
59	1.05783 05421	1.06012 66791	1.06251 39233	1.06498 91243	1.06755 50912	1.07021 05892
60	1.07657 04205	1.07897 62841	1.08147 73218	1.08407 34716	1.08676 46343	1.08955 06699
61	1.09533 95261	1.09785 78981	1.10047 66895	1.10319 59365	1.10601 56415	1.10893 57705
62	1.11413 73851	1.11677 10151	1.11951 04887	1.12235 59499	1.12530 75135	1.12836 52624
63	1.13296 34811	1.13571 50819	1.13857 81290	1.14155 28846	1.14463 95867	1.14783 84466
64	1.15181 72553	1.15468 94979	1.15767 89679	1.16078 60556	1.16401 11336	1.16735 45534
65	1.17069 81065	1.17369 36159	1.17681 23106	1.18005 47200	1.18342 13626	1.18691 27423
66	1.18960 53923	1.19272 67419	1.19597 74107	1.19935 80775	1.20286 94183	1.20651 21023
67	1.20853 84287	1.21178 81361	1.21517 34703	1.21869 52706	1.22235 43821	1.22615 16520
68	1.22749 64914	1.23087 70133	1.23439 96411	1.23806 53855	1.24187 52726	1.24583 03404
69	1.24647 88160	1.24999 25436	1.25365 50248	1.25746 74527	1.26143 10464	1.26554 70476
70	1.26548 45993	1.26913 38535	1.27293 86742	1.27690 04480	1.28102 05990	1.28530 05856
71	1.28451 29999	1.28830 00265	1.29224 95940	1.29636 32935	1.30064 27659	1.30508 96994
72	1.30356 31391	1.30749 01043	1.31158 67421	1.31585 48589	1.32029 63240	1.32491 30685
73	1.32263 41023	1.32670 30882	1.33094 90309	1.33537 39626	1.33997 99929	1.34476 93084
74	1.34172 49401	1.34593 79404	1.35033 53288	1.35491 93737	1.35969 24368	1.36465 69724
75	1.36083 46694	1.36519 35851	1.36974 44614	1.37448 98135	1.37943 22661	1.38457 45536
76	1.37996 22752	1.38446 89102	1.38917 52136	1.39408 39572	1.39919 80394	1.40452 04869
77	1.39910 67117	1.40376 27692	1.40862 63313	1.41370 04360	1.41898 82660	1.42449 31517
78	1.41826 69042	1.42307 39827	1.42809 65233	1.43333 78395	1.43880 14082	1.44449 08745
79	1.43744 17504	1.44240 13402	1.44758 44635	1.45299 47176	1.45863 58836	1.46451 19315
80	1.45663 01226	1.46174 36022	1.46708 87928	1.47266 95834	1.47849 00681	1.48455 45519
81	1.47583 08692	1.48109 95025	1.48660 81216	1.49236 09153	1.49836 22986	1.50461 69208
82	1.49504 28168	1.50046 77499	1.50614 10324	1.51206 71600	1.51825 08761	1.52469 71829
83	1.51426 47719	1.51984 70303	1.52568 60821	1.53178 67353	1.53815 40690	1.54479 34459
84	1.53349 55235	1.53923 60103	1.54524 18046	1.55151 80328	1.55807 01161	1.56490 37841
85	1.55273 38446	1.55863 33375	1.56480 67133	1.57125 94214	1.57799 72303	1.58502 62424
86	1.57197 84944	1.57803 76448	1.58437 93043	1.59100 92500	1.59793 36018	1.60515 88403
87	1.59122 82211	1.59744 75517	1.60395 80590	1.61076 58508	1.61787 74021	1.62529 95757
88	1.61048 17634	1.61686 16675	1.62354 14469	1.63052 75424	1.63782 67874	1.64544 64295
89	1.62973 78535	1.63627 86937	1.64312 79285	1.65029 26336	1.65777 99024	1.66559 73695
90	1.64899 52185	1.65569 69263	1.66271 59585	1.67005 94263	1.67773 48841	1.68575 03548

TABLE IX.

ϕ .	E(30°).	E(31°).	E(32°).	E(33°).	E(34°).	E(35°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 30710	0.01745 30575	0.01745 30437	0.01745 30297	0.01745 30154	0.01745 30010
2	0.03490 48132	0.03490 47051	0.03490 45948	0.03490 44827	0.03490 43688	0.03490 42533
3	0.05235 38991	0.05235 35341	0.05235 31621	0.05235 27839	0.05235 23996	0.05235 20099
4	0.06979 90038	0.06979 81387	0.06979 72573	0.06979 63609	0.06979 54502	0.06979 45267
5	0.08723 88064	0.08723 71173	0.08723 53964	0.08723 36461	0.08723 18681	0.08723 00648
6	0.10467 19912	0.10466 90736	0.10466 61012	0.10466 30776	0.10466 00065	0.10465 68916
7	0.12209 72492	0.12209 26184	0.12208 79006	0.12208 31013	0.12207 82266	0.12207 32823
8	0.13951 32791	0.13950 63705	0.13949 93321	0.13949 21718	0.13948 48989	0.13947 75220
9	0.15691 87888	0.15690 89585	0.15689 89431	0.15688 87542	0.15687 84047	0.15686 79069
10	0.17431 24969	0.17429 90219	0.17428 52927	0.17427 13255	0.17425 71376	0.17424 27461
11	0.19169 31335	0.19167 52125	0.19165 69528	0.19163 83761	0.19161 95053	0.19160 03630
12	0.20905 94420	0.20903 61958	0.20901 25096	0.20898 84114	0.20896 39308	0.20893 90972
13	0.22641 01800	0.22638 06526	0.22635 05650	0.22631 99530	0.22628 88541	0.22625 73056
14	0.24374 41209	0.24370 72797	0.24366 97379	0.24363 15405	0.24359 27339	0.24355 33646
15	0.26106 00549	0.26101 47917	0.26096 86659	0.26092 17326	0.26087 40488	0.26082 56714
16	0.27835 67906	0.27830 19225	0.27824 60063	0.27818 91089	0.27813 12990	0.27807 26456
17	0.29563 31557	0.29556 74262	0.29550 04380	0.29543 22712	0.29536 30078	0.29529 27305
18	0.31288 79989	0.31281 00787	0.31273 06625	0.31264 98450	0.31256 77232	0.31248 43950
19	0.33012 01909	0.33002 86789	0.32993 54052	0.32984 04808	0.32974 40192	0.32964 61353
20	0.34732 86253	0.34722 20500	0.34711 34172	0.34700 28557	0.34689 04976	0.34677 64762
21	0.36451 22204	0.36438 90409	0.36426 34761	0.36413 56749	0.36400 57891	0.36387 39727
22	0.38166 99200	0.38152 85272	0.38138 43880	0.38123 76728	0.38108 85551	0.38093 72116
23	0.39880 06947	0.39863 94130	0.39847 49884	0.39830 76146	0.39813 74892	0.39796 48130
24	0.41590 35433	0.41572 06315	0.41553 41434	0.41534 42979	0.41515 13183	0.41495 54319
25	0.43297 74936	0.43277 11468	0.43256 07515	0.43234 65537	0.43212 88045	0.43190 77597
26	0.45002 16039	0.44978 99548	0.44955 37445	0.44931 32479	0.44906 87463	0.44882 05258
27	0.46703 49638	0.46677 60846	0.46651 20890	0.46624 32830	0.46596 99802	0.46569 24990
28	0.48401 66957	0.48372 85994	0.48343 47875	0.48313 55991	0.48283 13818	0.48252 24890
29	0.50096 59558	0.50064 65982	0.50032 08798	0.49998 91750	0.49965 18676	0.49930 93480
30	0.51788 19349	0.51752 92165	0.51716 94443	0.51680 30301	0.51643 03961	0.51605 19719
31	0.53476 38598	0.53437 56276	0.53397 95990	0.53357 62253	0.53316 59693	0.53274 93021
32	0.55161 09942	0.55118 50436	0.55075 05028	0.55030 78644	0.54985 76341	0.54940 03268
33	0.56842 26398	0.56795 67169	0.56748 13566	0.56699 70953	0.56650 44835	0.56600 40822
34	0.58519 81373	0.58468 99409	0.58417 14047	0.58364 31113	0.58310 56580	0.58255 96542
35	0.60193 68671	0.60138 40508	0.60081 99356	0.60024 51522	0.59966 03469	0.59906 61797
36	0.61863 82506	0.61803 84252	0.61742 62834	0.61680 25056	0.61616 77895	0.61552 28479
37	0.63530 17510	0.63465 24869	0.63398 98284	0.63331 45079	0.63262 72764	0.63192 89016
38	0.65192 68740	0.65122 57037	0.65050 99988	0.64978 05456	0.64903 81506	0.64828 36385
39	0.66851 31690	0.66775 75895	0.66698 62711	0.66620 00562	0.66539 98087	0.66458 64126
40	0.68506 02295	0.68424 77049	0.68341 81715	0.68257 25295	0.68171 17022	0.68083 66352
41	0.70156 76942	0.70069 56583	0.69980 52764	0.69889 75082	0.69797 33784	0.69703 37762
42	0.71803 52476	0.71710 11067	0.71614 72136	0.71517 45892	0.71418 42816	0.71317 73653
43	0.73446 26206	0.73346 37565	0.73244 36631	0.73140 34245	0.73034 41540	0.72926 69931
44	0.75084 95913	0.74978 33640	0.74869 43579	0.74758 37221	0.74645 26367	0.74530 23122
45	0.76719 59857	0.76605 97361	0.76489 90847	0.76371 52467	0.76250 94707	0.76128 30381

TABLE IX.

ϕ .	$F(30^\circ)$.	$F(31^\circ)$.	$F(32^\circ)$.	$F(33^\circ)$.	$F(34^\circ)$.	$F(35^\circ)$.
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 35141	0.01745 35275	0.01745 35413	0.01745 35553	0.01745 35696	0.01745 35841
2	0.03490 83570	0.03490 84652	0.03490 85755	0.03490 86876	0.03490 88015	0.03490 89170
3	0.05236 58573	0.05236 62224	0.05236 65946	0.05236 69730	0.05236 73575	0.05236 77473
4	0.06982 73416	0.06982 82073	0.06982 90893	0.06982 99866	0.06983 08980	0.06983 18224
5	0.08729 41346	0.08729 58257	0.08729 75486	0.08729 93014	0.08730 10818	0.08730 28877
6	0.10476 75583	0.10477 04808	0.10477 34585	0.10477 64879	0.10477 95652	0.10478 26866
7	0.12224 89309	0.12225 35723	0.12225 83016	0.12226 31132	0.12226 80013	0.12227 29598
8	0.13973 95662	0.13974 64955	0.13975 35564	0.13976 07408	0.13976 80396	0.13977 54443
9	0.15724 07733	0.15725 06409	0.15726 06968	0.15727 09292	0.15728 13253	0.15729 18731
10	0.17475 38551	0.17476 73933	0.17478 11909	0.17479 52317	0.17480 94985	0.17482 39746
11	0.19228 01081	0.19229 81308	0.19231 65005	0.19233 51957	0.19235 41936	0.19237 34718
12	0.20982 08214	0.20984 42245	0.20986 80805	0.20989 23615	0.20991 70383	0.20994 20815
13	0.22737 72759	0.22740 70372	0.22743 73777	0.22746 82620	0.22749 96531	0.22753 15140
14	0.24495 07433	0.24498 79229	0.24502 58303	0.24506 44216	0.24510 36507	0.24514 34719
15	0.26254 24855	0.26258 82258	0.26263 48670	0.26268 23555	0.26273 06350	0.26277 96495
16	0.28015 37538	0.28020 92794	0.28026 59059	0.28032 35687	0.28038 22000	0.28044 17319
17	0.29778 57878	0.29785 24056	0.29792 03538	0.29798 95551	0.29805 99290	0.29813 13941
18	0.31543 98144	0.31551 89141	0.31559 96054	0.31568 17969	0.31576 53940	0.31585 03004
19	0.33311 70471	0.33321 01009	0.33330 50418	0.33340 17631	0.33350 01543	0.33360 01029
20	0.35081 86847	0.35092 72476	0.35103 80300	0.35115 09087	0.35126 57557	0.35138 24407
21	0.36854 59108	0.36867 16202	0.36879 99217	0.36893 06738	0.36906 37293	0.36919 89390
22	0.38629 98923	0.38644 44683	0.38659 20520	0.38674 24820	0.38689 55906	0.38705 12078
23	0.40408 17784	0.40424 70239	0.40441 57385	0.40458 77398	0.40476 28381	0.40494 08405
24	0.42189 26997	0.42208 04999	0.42227 22800	0.42246 78351	0.42266 69519	0.42286 94131
25	0.43973 37669	0.43994 60892	0.44016 29553	0.44038 41358	0.44060 93926	0.44083 84824
26	0.45760 60698	0.45784 49638	0.45808 90219	0.45833 79888	0.45859 16000	0.45884 95848
27	0.47551 06758	0.47577 82730	0.47605 17145	0.47633 07183	0.47661 49916	0.47690 42348
28	0.49344 86289	0.49374 71422	0.49405 22441	0.49436 36244	0.49468 09610	0.49500 39236
29	0.51142 09483	0.51175 26717	0.51209 17962	0.51243 79820	0.51279 08764	0.51315 01172
30	0.52942 86272	0.52979 59354	0.53017 15293	0.53055 50386	0.53094 60789	0.53134 42547
31	0.54747 26314	0.54787 79790	0.54829 25734	0.54871 60132	0.54914 78810	0.54958 77467
32	0.56555 38981	0.56599 98188	0.56645 60287	0.56692 20944	0.56739 75645	0.56788 19735
33	0.58367 33341	0.58416 24401	0.58466 29637	0.58517 44386	0.58569 63788	0.58622 82827
34	0.60183 18144	0.60236 67956	0.60291 44135	0.60347 41684	0.60404 55392	0.60462 79876
35	0.62003 01811	0.62061 38039	0.62121 13781	0.62182 23704	0.62244 62246	0.62308 23648
36	0.63826 92418	0.63890 43477	0.63955 48207	0.64022 00938	0.64089 95755	0.64159 26520
37	0.65654 97679	0.65723 92724	0.65794 56658	0.65866 83478	0.65940 66919	0.66016 00461
38	0.67487 24928	0.67561 93840	0.67638 47974	0.67716 81002	0.67796 86310	0.67878 57001
39	0.69323 81109	0.69404 54477	0.69487 30571	0.69572 02747	0.69658 64049	0.69747 07214
40	0.71164 72757	0.71251 81859	0.71341 12420	0.71432 57491	0.71526 09786	0.71621 61685
41	0.73010 05980	0.73103 82765	0.73200 01028	0.73298 53530	0.73399 32673	0.73502 30489
42	0.74859 86446	0.74960 63511	0.75064 03418	0.75169 98658	0.75278 41338	0.75389 23164
43	0.76714 19365	0.76822 29932	0.76933 26109	0.77047 00141	0.77163 43863	0.77282 48678
44	0.78573 09472	0.78688 87362	0.78807 75092	0.78929 64694	0.79054 47756	0.79182 15407
45	0.80436 61012	0.80560 40615	0.80687 55814	0.80817 98459	0.80951 59927	0.81088 31102

TABLE IX.

φ.	E (30°).	E (31°).	E (32°).	E (33°).	E (34°).	E (35°).
45°	0.76719 59857	0.76605 97361	0.76489 90847	0.76371 52467	0.76250 94707	0.76128 30381
46	0.78350 16779	0.78229 27312	0.78105 76846	0.77979 78204	0.77851 44577	0.77720 89502
47	0.79976 65910	0.79848 22598	0.79717 00537	0.79583 13238	0.79446 74610	0.79307 98928
48	0.81599 06973	0.81462 82847	0.81323 61439	0.81181 56955	0.81036 84061	0.80889 57758
49	0.83217 40189	0.83073 08215	0.82925 59633	0.82775 09375	0.82621 72817	0.82465 65757
50	0.84831 66279	0.84678 99391	0.84522 95766	0.84363 71059	0.84201 41399	0.84036 23361
51	0.86441 86466	0.86280 57604	0.86115 71057	0.85947 43215	0.85775 90970	0.85601 31687
52	0.88048 02480	0.87877 84618	0.87703 87299	0.87526 27652	0.87345 23343	0.87160 92534
53	0.89650 16559	0.89470 82743	0.89287 46862	0.89100 26792	0.88909 40979	0.88715 08392
54	0.91248 31448	0.91059 54830	0.90866 52695	0.90669 43673	0.90468 46995	0.90263 82444
55	0.92842 50401	0.92644 04275	0.92441 08329	0.92233 81953	0.92022 45165	0.91807 18570
56	0.94432 77181	0.94224 35019	0.94011 17876	0.93793 45908	0.93571 39922	0.93345 21350
57	0.96019 16059	0.95800 51544	0.95576 86029	0.95348 40433	0.95115 36360	0.94877 96065
58	0.97601 71810	0.97372 58876	0.97138 18060	0.96898 71044	0.96654 40230	0.96405 48698
59	0.99180 49714	0.98940 62581	0.98695 19819	0.98444 43874	0.98188 57942	0.97927 85932
60	1.00755 55550	1.00504 68761	1.00247 97731	0.99985 65670	0.99717 96564	0.99445 15150
61	1.02326 95593	1.02064 84050	1.01796 58793	1.01522 43790	1.01242 63815	1.00957 44430
62	1.03894 76610	1.03621 15612	1.03341 10568	1.03054 86199	1.02762 68063	1.02464 82543
63	1.05459 05852	1.05173 71133	1.04881 61180	1.04583 01464	1.04278 18321	1.03967 38948
64	1.07019 91051	1.06722 58813	1.06418 19307	1.06106 98745	1.05789 24238	1.05465 23784
65	1.08577 40408	1.08267 87361	1.07950 94174	1.07626 87791	1.07295 96091	1.06958 47865
66	1.10131 62590	1.09809 65986	1.09479 95543	1.09142 78929	1.08798 44778	1.08447 22667
67	1.11682 66719	1.11348 04388	1.11005 33706	1.10654 83052	1.10296 81806	1.09931 60322
68	1.13230 62359	1.12883 12749	1.12527 19472	1.12163 11612	1.11791 19283	1.11411 73603
69	1.14775 59511	1.14415 01717	1.14045 64156	1.13667 76606	1.13281 69902	1.12887 75912
70	1.16317 68598	1.15943 82398	1.15560 79566	1.15168 90562	1.14768 46927	1.14359 81268
71	1.17857 00453	1.17469 66343	1.17072 77990	1.16666 66524	1.16251 64180	1.15828 04288
72	1.19393 66306	1.18992 65532	1.18581 72181	1.18161 18040	1.17731 36024	1.17292 60172
73	1.20927 77771	1.20512 92361	1.20087 75341	1.19652 59141	1.19207 77344	1.18753 64682
74	1.22459 46832	1.22030 59625	1.21591 01104	1.21141 04327	1.20681 03530	1.20211 34124
75	1.23988 85822	1.23545 80502	1.23091 63519	1.22626 68546	1.22151 30457	1.21665 85326
76	1.25516 07414	1.25058 68536	1.24589 77030	1.24109 67171	1.23618 74460	1.23117 35617
77	1.27041 24600	1.26569 37617	1.26085 56457	1.25590 15987	1.25083 52317	1.24566 02801
78	1.28564 50673	1.28078 01961	1.27579 16975	1.27068 31161	1.26545 81222	1.26012 05132
79	1.30085 99209	1.29584 76094	1.29070 74095	1.28544 29222	1.28005 78760	1.27455 61288
80	1.31605 84050	1.31089 74830	1.30560 43639	1.30018 27038	1.29463 62883	1.28896 90343
81	1.33124 19281	1.32593 13248	1.32048 41718	1.31490 41791	1.30919 51883	1.30336 11740
82	1.34641 19212	1.34095 06671	1.33534 84707	1.32960 90949	1.32373 64363	1.31773 45259
83	1.36156 98356	1.35595 70642	1.35019 89221	1.34429 92242	1.33826 19210	1.33209 10987
84	1.37671 71408	1.37095 20903	1.36503 72091	1.35897 63635	1.35277 35564	1.34643 29286
85	1.39185 53224	1.38593 73372	1.37986 50340	1.37364 23297	1.36727 32789	1.36076 20761
86	1.40698 58797	1.40091 44115	1.39468 41153	1.38829 89575	1.38176 30442	1.37508 06226
87	1.42211 03236	1.41588 49326	1.40949 61851	1.40294 80967	1.39624 48242	1.38939 06671
88	1.43723 01743	1.43085 05299	1.42430 29866	1.41759 16088	1.41072 06038	1.40369 43227
89	1.45234 69589	1.44581 28404	1.43910 62713	1.43223 13646	1.42519 23777	1.41799 37132
90	1.46746 22093	1.46077 35062	1.45390 77961	1.44686 92407	1.43966 21471	1.43229 09693

TABLE IX.

ϕ .	F (30°).	F (31°).	F (32°).	F (33°).	F (34°).	F (35°).
45°	0.80436 61012	0.80560 40615	0.80687 55814	0.80817 98459	0.80951 59927	0.81088 31102
46	0.82304 77722	0.82436 93970	0.82572 73155	0.82712 06983	0.82854 86658	0.83001 02860
47	0.84177 62816	0.84318 51148	0.84463 31404	0.84611 95191	0.84764 33582	0.84920 37097
48	0.86055 18969	0.86205 15297	0.86359 34242	0.86517 67362	0.86680 05649	0.86846 39514
49	0.87937 48301	0.88096 88972	0.88260 84720	0.88429 27108	0.88602 07104	0.88779 15066
50	0.89824 52358	0.89993 74116	0.90167 85237	0.90346 77349	0.90530 41459	0.90718 67936
51	0.91716 32104	0.91895 72046	0.92080 37521	0.92270 20289	0.92465 11465	0.92665 01500
52	0.93612 87900	0.93802 83432	0.93998 42609	0.94199 57393	0.94406 19086	0.94618 18298
53	0.95514 19492	0.95715 08283	0.95922 00825	0.96134 89366	0.96353 65472	0.96578 20002
54	0.97420 25999	0.97632 45929	0.97851 11765	0.98076 16126	0.98307 50935	0.98545 07391
55	0.99331 05898	0.99554 95007	0.99785 74276	1.00023 36789	1.00267 74922	1.00518 80316
56	1.01246 57014	1.01482 53447	1.01725 86441	1.01976 49644	1.02234 35991	1.02499 37673
57	1.03166 76508	1.03415 18457	1.03671 45560	1.03935 52134	1.04207 31787	1.04486 77378
58	1.05091 60866	1.05352 86511	1.05622 48137	1.05900 40841	1.06186 59024	1.06480 96339
59	1.07021 05892	1.07295 53340	1.07578 89864	1.07871 11464	1.08172 13459	1.08481 90428
60	1.08955 06699	1.09243 13919	1.09540 65612	1.09847 58807	1.10163 89874	1.10489 54463
61	1.10893 57705	1.11195 62460	1.11507 69416	1.11829 76763	1.12161 82063	1.12503 82185
62	1.12836 52624	1.13152 92404	1.13479 94468	1.13817 58303	1.14165 82811	1.14524 66236
63	1.14783 84466	1.15114 96420	1.15457 33111	1.15810 95466	1.16175 83882	1.16551 98143
64	1.16735 45534	1.17081 66395	1.17439 76829	1.17809 79351	1.18191 76011	1.18585 68306
65	1.18691 27423	1.19052 93436	1.19427 16245	1.19814 00108	1.20213 48892	1.20625 65983
66	1.20651 21023	1.21028 67872	1.21419 41124	1.21823 46940	1.22240 91173	1.22671 79282
67	1.22615 16520	1.23008 79250	1.23416 40369	1.23838 08100	1.24273 90456	1.24723 95158
68	1.24583 03404	1.24993 16346	1.25418 02027	1.25857 70893	1.26312 33294	1.26781 99408
69	1.26554 70476	1.26981 67171	1.27424 13294	1.27882 21680	1.28356 05196	1.28845 76673
70	1.28530 05856	1.28974 18978	1.29434 60524	1.29911 45887	1.30404 90634	1.30915 10446
71	1.30508 96994	1.30970 58273	1.31449 29242	1.31945 28018	1.32458 73054	1.32989 83078
72	1.32491 30685	1.32970 70831	1.33468 04155	1.33983 51668	1.34517 34889	1.35069 75795
73	1.34476 93084	1.34974 41712	1.35490 69173	1.36025 99539	1.36580 57578	1.37154 68716
74	1.36465 69724	1.36981 55279	1.37517 07427	1.38072 53464	1.38648 21588	1.39244 40874
75	1.38457 45536	1.38991 95221	1.39547 01290	1.40122 94429	1.40720 06440	1.41338 70243
76	1.40452 04869	1.41005 44574	1.41580 32408	1.42177 02601	1.42795 90738	1.43437 33771
77	1.42449 31517	1.43021 85751	1.43616 81723	1.44234 57362	1.44875 52203	1.45540 07419
78	1.44449 08745	1.45041 00568	1.45656 29508	1.46295 37342	1.46958 67713	1.47646 66195
79	1.46451 19315	1.47062 70277	1.47698 55403	1.48359 20454	1.49045 13340	1.49756 84205
80	1.48455 45519	1.49086 75599	1.49743 38445	1.50425 83938	1.51134 64399	1.51870 34704
81	1.50461 69208	1.51112 96759	1.51790 57117	1.52495 04406	1.53226 95495	1.53986 90144
82	1.52469 71829	1.53141 13524	1.53839 89384	1.54566 57886	1.55321 80577	1.56106 22239
83	1.54479 34459	1.55171 05245	1.55891 12738	1.56640 19874	1.57418 92992	1.58228 02022
84	1.56490 37841	1.57202 50895	1.57944 02427	1.58715 65386	1.59518 05343	1.60351 99913
85	1.58502 62424	1.59235 29114	1.59998 40602	1.60792 69011	1.61618 90553	1.62477 85789
86	1.60515 88403	1.61269 18254	1.62053 98168	1.62871 04968	1.63721 19928	1.64605 29052
87	1.62529 95757	1.63303 96424	1.64110 53035	1.64950 47169	1.65824 65221	1.66733 98709
88	1.64544 64295	1.65339 41538	1.66167 81074	1.67030 69274	1.67928 97703	1.68863 63444
89	1.66559 73695	1.67375 31365	1.68225 57986	1.69111 44753	1.70033 88429	1.70993 91700
90	1.68575 03548	1.69411 43573	1.70283 59363	1.71192 46952	1.72139 08314	1.73124 51757

TABLE IX.

ϕ .	E(35°).	E(36°).	E(37°).	E(38°).	E(39°).	E(40°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 30010	0.01745 29864	0.01745 29716	0.01745 29567	0.01745 29416	0.01745 29264
2	0.03490 42533	0.03490 41364	0.03490 40181	0.03490 38986	0.03490 37781	0.03490 36563
3	0.05235 20099	0.05235 16152	0.05235 12160	0.05235 08127	0.05235 04061	0.05234 99958
4	0.06979 45267	0.06979 35914	0.06979 26453	0.06979 16897	0.06979 07258	0.06978 97542
5	0.08723 00648	0.08722 82385	0.08722 63912	0.08722 45252	0.08722 26429	0.08722 07462
6	0.10465 68916	0.10465 37366	0.10465 05455	0.10464 73221	0.10464 40704	0.10464 07940
7	0.12207 32823	0.12206 82743	0.12206 32088	0.12205 80921	0.12205 29302	0.12204 77291
8	0.13947 75220	0.13947 00499	0.13946 24919	0.13945 48572	0.13944 71550	0.13943 93941
9	0.15686 79069	0.15685 72735	0.15684 65174	0.15683 56519	0.15682 46901	0.15681 36447
10	0.17424 27461	0.17422 81682	0.17421 34217	0.17419 85247	0.17418 34953	0.17416 83511
11	0.19160 03630	0.19158 09722	0.19156 13566	0.19154 15401	0.19152 15467	0.19150 14002
12	0.20893 90972	0.20891 39402	0.20888 84909	0.20886 27799	0.20883 68384	0.20881 06976
13	0.22625 73056	0.22622 53452	0.22619 30122	0.22616 03454	0.22612 73845	0.22609 41691
14	0.24355 33646	0.24351 34801	0.24347 31286	0.24343 23590	0.24339 12205	0.24334 97628
15	0.26082 56714	0.26077 66590	0.26072 70705	0.26067 69658	0.26062 64057	0.26057 54508
16	0.27807 26456	0.27801 32194	0.27795 30920	0.27789 23358	0.27783 10244	0.27776 92313
17	0.29529 27305	0.29522 15236	0.29514 94729	0.29507 66651	0.29500 31882	0.29492 91302
18	0.31248 43950	0.31239 99602	0.31231 45204	0.31222 81782	0.31214 10376	0.31205 32032
19	0.32964 61353	0.32954 69461	0.32944 65706	0.32934 51292	0.32924 27438	0.32913 95375
20	0.34677 64762	0.34666 09277	0.34654 39903	0.34642 58040	0.34630 65107	0.34618 62537
21	0.36387 39727	0.36374 03827	0.36360 51786	0.36346 85219	0.36333 05764	0.36319 15076
22	0.38093 72116	0.38078 38219	0.38062 85688	0.38047 16373	0.38031 32153	0.38015 34924
23	0.39796 48130	0.39778 97905	0.39761 26298	0.39743 35416	0.39725 27397	0.39707 04404
24	0.41495 54319	0.41475 68700	0.41455 58681	0.41435 26647	0.41414 75019	0.41394 06246
25	0.43190 77597	0.43168 36796	0.43145 68292	0.43122 74770	0.43099 58957	0.43076 23610
26	0.44882 05258	0.44856 88779	0.44831 40993	0.44805 64909	0.44779 63582	0.44753 40103
27	0.46569 24990	0.46541 11645	0.46512 63072	0.46483 82628	0.46454 73719	0.46425 39796
28	0.48252 24890	0.48220 92813	0.48189 21257	0.48157 13946	0.48124 74664	0.48092 07245
29	0.49930 93480	0.49896 20146	0.49861 02732	0.49825 45354	0.49789 52201	0.49753 27510
30	0.51605 19719	0.51566 81961	0.51527 95155	0.51488 63836	0.51448 92618	0.51408 86174
31	0.53274 93021	0.53232 67047	0.53189 86674	0.53146 56880	0.53102 82730	0.53058 69358
32	0.54940 03268	0.54893 64681	0.54846 65943	0.54799 12499	0.54751 09893	0.54702 63743
33	0.56600 40822	0.56549 64640	0.56498 22136	0.56446 19247	0.56393 62021	0.56340 56588
34	0.58255 96542	0.58200 57219	0.58144 44966	0.58087 66235	0.58030 27606	0.57972 35748
35	0.59906 61797	0.59846 33245	0.59785 24696	0.59723 43149	0.59660 95736	0.59597 89694
36	0.61552 28479	0.61486 84089	0.61420 52160	0.61353 40263	0.61285 56108	0.61217 07527
37	0.63192 89016	0.63122 01682	0.63050 18774	0.62977 48457	0.62903 99049	0.62829 79000
38	0.64828 36385	0.64751 78529	0.64674 16552	0.64595 59235	0.64516 15531	0.64435 94534
39	0.66458 64126	0.66376 07723	0.66292 38120	0.66207 64738	0.66121 97187	0.66035 45237
40	0.68083 66352	0.67994 82958	0.67904 76731	0.67813 57758	0.67721 36331	0.67628 22920
41	0.69703 37762	0.69607 98540	0.69511 26279	0.69413 31756	0.69314 25970	0.69214 20116
42	0.71317 73653	0.71215 49401	0.71111 81311	0.71006 80875	0.70900 59821	0.70793 30096
43	0.72926 69931	0.72817 31112	0.72706 37044	0.72593 99956	0.72480 32328	0.72365 46884
44	0.74530 23122	0.74413 39893	0.74294 89374	0.74174 84549	0.74053 38675	0.73930 65276
45	0.76128 30381	0.76003 72623	0.75877 34888	0.75749 30928	0.75619 74802	0.75488 80854

TABLE IX.

ϕ .	F(35°).	F(36°).	F(37°).	F(38°).	F(39°).	F(40°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 35841	0.01745 35986	0.01745 36134	0.01745 36284	0.01745 36434	0.01745 36586
2	0.03490 89170	0.03490 90340	0.03490 91523	0.03490 92718	0.03490 93924	0.03490 95138
3	0.05236 77473	0.05236 81423	0.05236 85417	0.05236 89451	0.05236 93521	0.05236 97622
4	0.06983 18224	0.06983 27587	0.06983 37057	0.06983 46623	0.06983 56274	0.06983 65997
5	0.08730 28877	0.08730 47169	0.08730 65671	0.08730 84362	0.08731 03219	0.08731 22217
6	0.10478 26865	0.10478 58486	0.10478 90471	0.10479 22784	0.10479 55383	0.10479 88231
7	0.12227 29598	0.12227 79828	0.12228 30643	0.12228 81982	0.12229 33779	0.12229 85975
8	0.13977 54443	0.13978 29456	0.13979 05349	0.13979 82028	0.13980 59400	0.13981 37372
9	0.15729 18731	0.15730 25593	0.15731 33717	0.15732 42969	0.15733 53217	0.15734 64329
10	0.17482 39746	0.17483 86420	0.17485 34837	0.17486 84817	0.17488 36177	0.17489 88737
11	0.19237 34718	0.19239 30067	0.19241 27757	0.19243 27547	0.19245 29196	0.19247 32463
12	0.20994 20815	0.20996 74611	0.20999 31473	0.21001 91091	0.21004 53155	0.21007 17349
13	0.22753 15140	0.22756 38065	0.22759 64928	0.22762 95336	0.22766 28895	0.22769 65206
14	0.24514 34719	0.24518 38373	0.24522 47001	0.24526 60112	0.24530 77214	0.24534 97812
15	0.26277 96495	0.26282 93404	0.26287 96502	0.26293 05188	0.26298 18858	0.26303 36903
16	0.28044 17319	0.28050 20939	0.28056 32163	0.28062 50265	0.28068 74514	0.28075 04171
17	0.29813 13941	0.29820 38668	0.29827 72633	0.29835 14970	0.29842 64807	0.29850 21257
18	0.31585 03004	0.31593 64176	0.31602 36463	0.31611 18845	0.31620 10287	0.31629 09740
19	0.33360 01029	0.33370 14937	0.33380 42105	0.33390 81339	0.33401 31425	0.33411 91134
20	0.35138 24407	0.35150 08303	0.35162 07896	0.35174 21798	0.35186 48603	0.35198 86879
21	0.36919 89390	0.36933 61493	0.36947 52048	0.36961 59457	0.36975 82102	0.36990 18328
22	0.38705 12078	0.38720 91581	0.38736 92639	0.38753 13427	0.38769 52092	0.38786 06739
23	0.40494 08405	0.40512 15485	0.40530 47601	0.40549 02683	0.40567 78621	0.40586 73266
24	0.42286 94131	0.42307 49952	0.42328 34704	0.42349 46050	0.42370 81605	0.42392 38942
25	0.44083 84824	0.44107 11548	0.44130 71545	0.44154 62192	0.44178 80810	0.44203 24669
26	0.45884 95848	0.45911 16642	0.45937 75534	0.45964 69597	0.45991 95839	0.46019 51204
27	0.47690 42348	0.47719 81389	0.47749 63876	0.47779 86559	0.47810 46115	0.47841 39141
28	0.49500 39236	0.49533 21716	0.49566 53556	0.49600 31166	0.49634 50868	0.49669 08894
29	0.51315 01172	0.51351 53304	0.51388 61323	0.51426 21277	0.51464 29115	0.51502 80683
30	0.53134 42547	0.53174 91572	0.53216 03669	0.53257 74505	0.53299 99638	0.53342 74510
31	0.54958 77467	0.55003 51658	0.55048 96810	0.55095 08197	0.55141 80968	0.55189 10138
32	0.56788 19735	0.56837 48397	0.56887 56667	0.56938 39414	0.56989 91359	0.57042 07071
33	0.58622 82827	0.58676 96301	0.58731 98845	0.58787 84907	0.58844 48766	0.58901 84529
34	0.60462 79876	0.60522 09539	0.60582 38607	0.60643 61093	0.60705 70821	0.60768 61421
35	0.62308 23648	0.62373 01914	0.62438 90852	0.62505 84030	0.62573 74807	0.62642 56320
36	0.64159 26520	0.64229 86839	0.64301 70090	0.64374 69392	0.64448 77629	0.64523 87431
37	0.66016 00461	0.66092 77310	0.66170 90415	0.66250 32440	0.66330 95783	0.66412 72563
38	0.67878 57001	0.67961 85885	0.68046 65478	0.68132 87990	0.68220 45329	0.68309 29093
39	0.69747 07214	0.69837 24554	0.69929 08460	0.70022 50387	0.70117 41854	0.70213 73935
40	0.71621 61685	0.71719 05213	0.71818 32039	0.71919 33471	0.72022 00441	0.72126 23501
41	0.73502 30489	0.73607 38632	0.73714 48362	0.73823 50544	0.73934 35633	0.74046 93663
42	0.75389 23164	0.75502 35431	0.75617 69009	0.75735 14333	0.75854 61392	0.75975 99714
43	0.77282 48678	0.77404 05545	0.77528 04962	0.77654 36956	0.77782 91064	0.77913 56324
44	0.79182 15407	0.79312 58296	0.79445 66575	0.79581 29885	0.79719 37336	0.79859 77496
45	0.81088 31102	0.81228 02357	0.81370 63529	0.81516 03905	0.81664 12196	0.81814 76522

TABLE IX.

φ.	E (35°).	E (36°).	E (37°).	E (38°).	E (39°).	E (40°).
45°	0.76188 30381	0.76003 72625	0.75877 34888	0.75749 30928	0.75619 74802	0.75488 80854
46	0.77720 89502	0.77588 26862	0.77453 70878	0.77317 36105	0.77179 37417	0.77039 90003
47	0.79307 98928	0.79167 00838	0.79023 95352	0.78878 97840	0.78732 24013	0.78583 89925
48	0.80889 57758	0.80739 93480	0.80588 07045	0.80434 14654	0.80278 32877	0.80120 78652
49	0.82465 65757	0.82307 04414	0.82146 05426	0.81982 85842	0.81817 63107	0.81650 55063
50	0.84036 23361	0.83868 33975	0.83697 90710	0.83525 11480	0.83350 14620	0.83173 18893
51	0.85601 31687	0.85423 83213	0.85243 63866	0.85060 92436	0.84875 88164	0.84688 70749
52	0.87160 92534	0.86973 53902	0.86783 26625	0.86590 30380	0.86394 85329	0.86197 12121
53	0.88715 08392	0.88517 48546	0.88316 81487	0.88113 27793	0.87907 08556	0.87698 45390
54	0.90263 82444	0.90055 70380	0.89844 31727	0.89629 87971	0.89412 61146	0.89192 73840
55	0.91807 18570	0.91588 23378	0.91365 81399	0.91140 15033	0.90911 47265	0.90680 01667
56	0.93345 21350	0.93115 12258	0.92881 35342	0.92644 13927	0.92403 71954	0.92160 33986
57	0.94877 96065	0.94636 42477	0.94390 99183	0.94141 90433	0.93889 41131	0.93633 76839
58	0.96405 48698	0.96152 20239	0.95894 79336	0.95633 51166	0.95368 61599	0.95100 37197
59	0.97927 85932	0.97662 52495	0.97392 83008	0.97119 03579	0.96841 41044	0.96560 22968
60	0.99445 15150	0.99167 46936	0.98885 18195	0.98598 55962	0.98307 88039	0.98013 42996
61	1.00957 44430	1.00667 11997	1.00371 93680	1.00072 17442	0.99768 12046	0.99460 07065
62	1.02464 82543	1.02161 56850	1.01853 19033	1.01539 97980	1.01222 23411	1.00900 25896
63	1.03967 38948	1.03650 91399	1.03329 04605	1.03002 08367	1.02670 33361	1.02334 11147
64	1.05465 23784	1.05135 26277	1.04799 61520	1.04458 60222	1.04112 54003	1.03761 75408
65	1.06958 47865	1.06614 72837	1.06265 01672	1.05909 65980	1.05548 98315	1.05183 32196
66	1.08447 22607	1.08089 43140	1.07725 37714	1.07355 38886	1.06979 80137	1.06598 95947
67	1.09931 60322	1.09559 49948	1.09180 83047	1.08795 92986	1.08405 14163	1.08008 82005
68	1.11411 73603	1.11025 06714	1.10631 51808	1.10231 43114	1.09825 15928	1.09413 06611
69	1.12887 75912	1.12486 27563	1.12077 58859	1.11662 04876	1.11240 01794	1.10811 86991
70	1.14359 81268	1.13943 27282	1.13519 19769	1.13087 94638	1.12649 88935	1.12205 40838
71	1.15828 04288	1.15396 21300	1.14956 50798	1.14509 29507	1.14054 95319	1.13593 87295
72	1.17292 60172	1.16845 25674	1.16389 68879	1.15926 27310	1.15455 39686	1.14977 45933
73	1.18753 64682	1.18290 57066	1.17818 91597	1.17339 06575	1.16851 41530	1.16356 37230
74	1.20211 34124	1.19732 32724	1.19244 37166	1.18747 86508	1.18243 21071	1.17730 82445
75	1.21665 85326	1.21170 70460	1.20666 24406	1.20152 86966	1.19630 99231	1.19101 03589
76	1.23117 35617	1.22605 88622	1.22084 72719	1.21554 28433	1.21014 97605	1.20467 23399
77	1.24566 02801	1.24038 06073	1.23500 02059	1.22952 31988	1.22395 38430	1.21829 65304
78	1.26012 05132	1.25467 42165	1.24912 32908	1.24347 19278	1.23772 44554	1.23188 53389
79	1.27455 61288	1.26894 16704	1.26321 86241	1.25739 12483	1.25146 39401	1.24544 12361
80	1.28896 90343	1.28318 49926	1.27728 83494	1.27128 34284	1.26517 46936	1.25896 67510
81	1.30336 11740	1.29740 62466	1.29133 46537	1.28515 07825	1.27885 91624	1.27246 44669
82	1.31773 45259	1.31160 75324	1.30535 97634	1.29899 56680	1.29251 98394	1.28593 70168
83	1.33209 10987	1.32579 09832	1.31936 59408	1.31282 04811	1.30615 92596	1.29938 70794
84	1.34643 29286	1.33995 87620	1.33335 54805	1.32662 76530	1.31977 99957	1.31281 73744
85	1.36076 20761	1.35411 30583	1.34733 07058	1.34041 96457	1.33338 46539	1.32623 06575
86	1.37508 06226	1.36825 60840	1.36129 39644	1.35419 89480	1.34697 58692	1.33962 97157
87	1.38939 06671	1.38239 00703	1.37524 76246	1.36796 80708	1.36055 63010	1.35301 73620
88	1.40369 43227	1.39651 72535	1.38919 40715	1.38172 95432	1.37412 86279	1.36639 64310
89	1.41799 37132	1.41063 99216	1.40313 57025	1.39548 59077	1.38769 55434	1.37976 97728
90	1.43229 09693	1.42476 03101	1.41707 49234	1.40923 97160	1.40125 97508	1.39314 02485

ϕ .	F (35°).	F (36°).	F (37°).	F (38°).	F (39°).	F (40°).
45°	0.81088 31102	0.81228 02357	0.81370 63529	0.81516 03905	0.81664 12196	0.81814 76522
46	0.83001 02860	0.83150 45724	0.83303 04806	0.83458 69078	0.83617 26884	0.83778 65936
47	0.84920 37097	0.85079 95677	0.85242 98645	0.85409 34696	0.85578 91853	0.85751 57459
48	0.86846 39514	0.87016 58752	0.87190 52506	0.87368 09244	0.87549 16719	0.87733 61953
49	0.88779 15666	0.88960 40703	0.89145 73032	0.89335 00356	0.89528 10215	0.89724 89366
50	0.90718 67936	0.90911 46466	0.91108 66010	0.91310 14770	0.91515 80140	0.91725 48681
51	0.92665 01500	0.92869 80130	0.93079 36332	0.93293 58285	0.93512 33312	0.93735 47855
52	0.94618 18298	0.94835 44895	0.95057 87955	0.95285 35715	0.95517 75515	0.95754 93765
53	0.96578 20002	0.96808 43042	0.97044 23859	0.97285 50844	0.97532 11450	0.97783 92153
54	0.98545 07391	0.98788 75897	0.99038 46011	0.99294 06381	0.99555 44682	0.99822 47564
55	1.00518 80316	1.00776 43797	1.01040 55324	1.01311 03917	1.01587 77590	1.01870 63291
56	1.02499 37673	1.02771 46056	1.03050 51617	1.03336 43877	1.03629 11314	1.03928 41311
57	1.04486 77378	1.04773 80933	1.05068 33582	1.05370 25476	1.05679 45705	1.05995 82232
58	1.06480 96339	1.06783 45604	1.07093 98742	1.07412 46681	1.07738 79277	1.08072 85232
59	1.08481 90428	1.08800 36127	1.09127 43417	1.09463 04164	1.09807 09155	1.10159 48004
60	1.10489 54463	1.10824 47416	1.11168 62693	1.11521 93265	1.11884 31027	1.12255 66698
61	1.12503 82185	1.12855 73217	1.13217 50387	1.13589 07952	1.13970 39104	1.14361 35871
62	1.14524 66236	1.14894 06081	1.15273 99019	1.15664 40786	1.16065 26074	1.16476 48434
63	1.16551 98143	1.16939 37342	1.17337 99786	1.17747 82890	1.18168 83062	1.18600 95602
64	1.18585 68306	1.18991 57102	1.19409 42538	1.19839 23918	1.20280 99591	1.20734 66852
65	1.20625 65983	1.21050 54212	1.21488 15756	1.21938 52025	1.22401 63553	1.22877 49881
66	1.22671 79282	1.23116 16260	1.23574 06534	1.24045 53852	1.24530 61178	1.25029 30570
67	1.24723 95158	1.25188 29564	1.25667 00570	1.26160 14504	1.26667 77014	1.27189 92953
68	1.26781 99408	1.27266 79164	1.27766 82156	1.28282 17535	1.28812 93902	1.29359 19190
69	1.28845 76673	1.29351 48824	1.29873 34173	1.30411 44945	1.30965 92967	1.31536 89551
70	1.30915 10446	1.31442 21036	1.31986 38093	1.32547 77174	1.33126 53612	1.33722 82404
71	1.32989 83078	1.33538 77024	1.34105 73985	1.34690 93107	1.35294 53516	1.35916 74208
72	1.35069 75795	1.35640 96762	1.36231 20524	1.36840 70083	1.37469 68644	1.38118 39517
73	1.37154 68716	1.37748 58990	1.38362 55014	1.38996 83912	1.39651 73256	1.40327 50993
74	1.39244 40874	1.39861 41235	1.40499 53407	1.41159 08898	1.41840 39937	1.42543 79426
75	1.41338 70243	1.41979 19843	1.42641 90333	1.43327 17867	1.44035 39620	1.44766 93765
76	1.43437 33771	1.44101 70010	1.44789 39137	1.45500 82208	1.46236 41628	1.46996 61156
77	1.45540 07419	1.46228 65823	1.46941 71921	1.47679 71917	1.48443 13723	1.49232 46993
78	1.47646 66195	1.48359 80305	1.49098 59590	1.49863 55643	1.50655 22156	1.51474 14977
79	1.49756 84205	1.50494 85463	1.51259 71906	1.52052 00754	1.52872 31737	1.53721 27184
80	1.51870 34704	1.52633 52342	1.53424 77551	1.54244 73401	1.55094 05904	1.55973 44145
81	1.53986 90144	1.54775 51087	1.55593 44192	1.56441 38588	1.57320 06803	1.58230 24954
82	1.56106 22239	1.56920 51006	1.57765 38552	1.58641 60255	1.59549 95377	1.60491 27268
83	1.58228 02022	1.59068 20641	1.59940 26488	1.60845 01365	1.61783 31464	1.62756 07612
84	1.60351 99913	1.61218 27842	1.62117 73073	1.63051 23994	1.64019 73900	1.65024 21295
85	1.62477 85789	1.63370 39841	1.64297 42685	1.65259 89428	1.66258 80628	1.67295 22634
86	1.64605 29052	1.65524 23337	1.66478 99095	1.67470 58270	1.68500 08810	1.69568 65064
87	1.66733 98709	1.67679 44579	1.68662 05564	1.69682 90542	1.70743 14957	1.71844 01276
88	1.68863 63444	1.69835 69452	1.70846 24942	1.71896 45798	1.72987 55047	1.74120 83357
89	1.70993 91700	1.71992 63565	1.73031 19766	1.74110 83242	1.75232 84655	1.76398 62939
90	1.73124 51757	1.74149 92344	1.75216 52365	1.76325 61841	1.77478 59091	1.78676 91349

TABLE IX.

ϕ .	E(40°).	E(41°).	E(42°).	E(43°).	E(44°).	E(45°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 29264	0.01745 29112	0.01745 28958	0.01745 28804	0.01745 28649	0.01745 28495
2	0.03490 36563	0.03490 35344	0.03490 34115	0.03490 32884	0.03490 31649	0.03490 30412
3	0.05234 99958	0.05234 95838	0.05234 91694	0.05234 87536	0.05234 83368	0.05234 79194
4	0.06978 97542	0.06978 87773	0.06978 77952	0.06978 68097	0.06978 58216	0.06978 48323
5	0.08722 07462	0.08721 88383	0.08721 69205	0.08721 49959	0.08721 30663	0.08721 11343
6	0.10464 07940	0.10463 74977	0.10463 41847	0.10463 08595	0.10462 75259	0.10462 41879
7	0.12204 77291	0.12204 24961	0.12203 72367	0.12203 19576	0.12202 66652	0.12202 13658
8	0.13943 93941	0.13943 15854	0.13942 37370	0.13941 58590	0.13940 79611	0.13940 00526
9	0.15681 36447	0.15680 25305	0.15679 13597	0.15678 01466	0.15676 89046	0.15675 76474
10	0.17416 83511	0.17415 31116	0.17413 77944	0.17412 24186	0.17410 70027	0.17409 15655
11	0.19150 14002	0.19148 11260	0.19146 07480	0.19144 02910	0.19141 97802	0.19139 92403
12	0.20881 06976	0.20878 43899	0.20875 79465	0.20873 13997	0.20870 47821	0.20867 81258
13	0.22609 41691	0.22606 07401	0.22602 71375	0.22599 34022	0.22595 95755	0.22592 56983
14	0.24334 97628	0.24330 80365	0.24326 60919	0.24322 39796	0.24318 17516	0.24313 94586
15	0.26057 54508	0.26052 41635	0.26047 26054	0.26042 08389	0.26036 89277	0.26031 69341
16	0.27776 92313	0.27770 70319	0.27764 45012	0.27758 17146	0.27751 87492	0.27745 56809
17	0.29492 91302	0.29485 45813	0.29477 96315	0.29470 43709	0.29462 88920	0.29455 32857
18	0.31205 32032	0.31196 47816	0.31187 58795	0.31178 66039	0.31169 70640	0.31160 73681
19	0.32913 95375	0.32903 56349	0.32893 11615	0.32882 62432	0.32872 10078	0.32861 55827
20	0.34618 62537	0.34606 51777	0.34594 34291	0.34582 11543	0.34569 85022	0.34557 56213
21	0.36319 15076	0.36305 14826	0.36291 06705	0.36276 92406	0.36262 73647	0.36248 52146
22	0.38015 34924	0.37999 26605	0.37983 09132	0.37966 84451	0.37950 54533	0.37934 21350
23	0.39707 04404	0.39688 68622	0.39670 22258	0.39651 67531	0.39633 06689	0.39614 41983
24	0.41394 06246	0.41373 22805	0.41352 27197	0.41331 21936	0.41310 09573	0.41288 92660
25	0.43076 23610	0.43052 71523	0.43029 05513	0.43005 28417	0.42981 43112	0.42957 52475
26	0.44753 40103	0.44726 97603	0.44700 39244	0.44673 68208	0.44646 87724	0.44620 01024
27	0.46425 39796	0.46395 84351	0.46376 10915	0.46356 23044	0.46336 24342	0.46276 18423
28	0.48092 07245	0.48059 15570	0.48026 03563	0.47992 75181	0.47959 34432	0.47925 85337
29	0.49753 27510	0.49716 75581	0.49680 00757	0.49643 07422	0.49606 00016	0.49568 82997
30	0.51408 86174	0.51368 49243	0.51327 86617	0.51287 03134	0.51246 03695	0.51204 93224
31	0.53058 69358	0.53014 21969	0.52969 45834	0.52924 46271	0.52879 28670	0.52833 98451
32	0.54702 63743	0.54653 79751	0.54604 63690	0.54555 21392	0.54505 58763	0.54455 81748
33	0.56340 56588	0.56287 09174	0.56233 26082	0.56179 13685	0.56124 78438	0.56070 26843
34	0.57972 35748	0.57913 97438	0.57855 19538	0.57796 08991	0.57736 72830	0.57677 18146
35	0.59597 89694	0.59534 32377	0.59470 31238	0.59405 93818	0.59341 27759	0.59276 40770
36	0.61217 07527	0.61148 02479	0.61078 49035	0.61008 55367	0.60938 29754	0.60867 80558
37	0.62829 79000	0.62754 96904	0.62679 61478	0.62603 81553	0.62527 66079	0.62451 24101
38	0.64435 94534	0.64355 05502	0.64273 57825	0.64191 61024	0.64109 24752	0.64026 58766
39	0.66035 45237	0.65948 18833	0.65860 28069	0.65771 83186	0.65682 94567	0.65593 72718
40	0.67628 22920	0.67534 28186	0.67439 62955	0.67344 38218	0.67248 65119	0.67152 54943
41	0.69214 20116	0.69113 25598	0.69011 54003	0.68909 17098	0.68806 26822	0.68702 95269
42	0.70793 30096	0.70685 03870	0.70575 93522	0.70466 11622	0.70355 70934	0.70244 84395
43	0.72365 46884	0.72249 56587	0.72132 74633	0.72015 14424	0.71896 89579	0.71778 13908
44	0.73930 65276	0.73806 78134	0.73681 91285	0.73556 18996	0.73429 75766	0.73302 76311
45	0.75488 80854	0.75356 63713	0.75223 38278	0.75089 19708	0.74954 23413	0.74818 65042

TABLE IX.

φ.	F(40°).	F(41°).	F(42°).	F(43°).	F(44°).	F(45°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1	0.01745 36586	0.01745 36740	0.01745 36893	0.01745 37046	0.01745 37201	0.01745 37356
2	0.03490 95138	0.03490 96361	0.03490 97590	0.03490 98822	0.03491 00058	0.03491 01295
3	0.05236 97622	0.05237 01748	0.05237 05895	0.05237 10057	0.05237 14229	0.05237 18407
4	0.06983 65997	0.06983 75781	0.06983 85615	0.06983 95484	0.06984 05379	0.06984 15286
5	0.08731 22217	0.08731 41336	0.08731 60553	0.08731 79840	0.08731 99177	0.08732 18541
6	0.10479 88231	0.10480 21289	0.10480 54515	0.10480 87867	0.10481 21308	0.10481 54795
7	0.12229 85975	0.12230 38506	0.12230 91308	0.12231 44315	0.12231 97464	0.12232 50691
8	0.13981 37372	0.13982 15848	0.13982 94736	0.13983 73936	0.13984 53355	0.13985 32895
9	0.15734 64329	0.15735 76170	0.15736 88605	0.15738 01494	0.15739 14705	0.15740 28098
10	0.17489 88737	0.17491 42312	0.17492 96715	0.17494 51759	0.17496 07257	0.17497 63019
11	0.19247 32463	0.19249 37102	0.19251 42867	0.19253 49506	0.19255 56771	0.19257 64410
12	0.21007 17349	0.21009 83355	0.21012 50854	0.21015 19520	0.21017 89029	0.21020 59054
13	0.22769 65206	0.22773 03864	0.22776 44463	0.22779 86588	0.22783 29830	0.22786 73769
14	0.24534 97812	0.24539 21399	0.24543 47468	0.24547 75503	0.24552 04991	0.24556 35409
15	0.26303 36903	0.26308 58704	0.26313 83632	0.26319 11059	0.26324 40350	0.26329 70862
16	0.28075 04171	0.28081 38489	0.28087 76701	0.28094 18049	0.28100 61760	0.28107 07053
17	0.29850 21257	0.29857 83426	0.29865 50397	0.29873 21259	0.29880 95087	0.29888 70942
18	0.31629 09740	0.31638 16145	0.31647 28415	0.31656 45469	0.31665 66209	0.31674 89520
19	0.33411 91134	0.33422 59223	0.33433 34416	0.33444 15443	0.33455 01011	0.33465 89808
20	0.35198 86879	0.35211 35180	0.35223 92022	0.35236 55925	0.35249 25378	0.35261 98854
21	0.36990 18328	0.37004 66467	0.37019 24804	0.37033 91630	0.37048 65193	0.37063 43728
22	0.38786 06739	0.38802 75456	0.38819 56278	0.38836 47239	0.38853 46328	0.38870 51515
23	0.40586 73266	0.40605 84433	0.40625 09890	0.40644 47388	0.40663 94635	0.40683 49309
24	0.42392 38942	0.42414 15585	0.42436 09008	0.42458 16659	0.42480 35938	0.42502 64205
25	0.44203 24669	0.44227 90984	0.44252 76909	0.44277 79566	0.44302 96020	0.44328 23288
26	0.46019 51204	0.46047 32575	0.46075 36766	0.46103 60544	0.46132 00614	0.46160 53624
27	0.47841 39141	0.47872 62163	0.47904 11631	0.47935 83933	0.47967 75389	0.47999 82246
28	0.49669 08894	0.49704 01392	0.49739 24420	0.49774 73963	0.49810 45929	0.49846 36137
29	0.51502 80683	0.51541 71728	0.51580 97893	0.51620 54736	0.51660 37723	0.51700 42218
30	0.53342 74510	0.53385 94441	0.53429 54639	0.53473 50207	0.53517 76144	0.53562 27328
31	0.55189 10138	0.55236 90582	0.55285 17049	0.55333 84163	0.55382 86424	0.55432 18202
32	0.57042 07071	0.57094 80961	0.57148 07296	0.57201 80196	0.57255 93637	0.57310 41448
33	0.58901 84529	0.58959 86122	0.59018 47310	0.59077 61682	0.59137 22669	0.59197 23527
34	0.60768 61421	0.60832 26317	0.60896 85748	0.60961 51754	0.61026 98191	0.61092 90719
35	0.62642 56320	0.62712 21475	0.62782 62967	0.62853 73267	0.62925 44630	0.62997 69094
36	0.64523 87431	0.64599 91175	0.64676 80994	0.64754 48770	0.64832 86138	0.64911 84485
37	0.66412 72563	0.66495 54612	0.66579 33491	0.66664 00473	0.66749 46552	0.66835 62441
38	0.68309 29093	0.68399 30566	0.68490 40719	0.68582 50204	0.68675 49358	0.68769 28198
39	0.70213 73935	0.70311 37359	0.70410 22499	0.70510 19375	0.70611 17651	0.70713 06632
40	0.72126 23501	0.72231 92821	0.72338 98172	0.72447 28936	0.72556 74090	0.72667 22211
41	0.74046 93663	0.74161 14248	0.74276 86558	0.74393 99329	0.74512 40848	0.74631 98949
42	0.75975 99714	0.76099 18360	0.76224 05906	0.76350 50443	0.76478 39564	0.76607 60353
43	0.77913 56324	0.78046 21255	0.78180 73849	0.78317 01559	0.78454 91285	0.78594 29363
44	0.79859 77496	0.80002 38361	0.80147 07353	0.80293 71299	0.80442 16415	0.80592 28292
45	0.81814 76522	0.81967 84387	0.82123 22662	0.82280 77566	0.82440 34647	0.82601 78762

TABLE IX.

ϕ .	E (40°).		E (41°).		E (42°).		E (43°).		E (44°).		E (45°).	
45°	0.75488	80854	0.75356	63713	0.75223	38278	0.75089	19708	0.74954	23413	0.74818	65042
46	0.77039	90003	0.76899	09360	0.76757	11278	0.76614	11830	0.76470	27368	0.76325	74500
47	0.78583	89925	0.78434	11964	0.78283	06834	0.78130	91549	0.77977	83426	0.77824	00066
48	0.80120	78652	0.79961	69278	0.79801	22397	0.79639	55987	0.79476	88357	0.79313	38125
49	0.81650	55063	0.81481	79939	0.81311	56337	0.81140	03221	0.80967	39918	0.80793	86088
50	0.83173	18893	0.82994	43479	0.82814	07957	0.82632	32302	0.82449	36876	0.82265	42413
51	0.84688	70749	0.84499	60340	0.84308	77510	0.84116	43266	0.83922	79029	0.83728	06627
52	0.86197	12121	0.85997	31887	0.85795	66215	0.85592	37159	0.85387	67222	0.85181	79345
53	0.87698	45390	0.87487	60420	0.87274	76267	0.87060	16047	0.86844	03363	0.86626	62289
54	0.89192	73840	0.88970	49187	0.88746	10853	0.88519	83031	0.88291	90440	0.88062	58307
55	0.90680	01667	0.90446	02392	0.90209	74163	0.89971	42262	0.89731	32541	0.89489	71391
56	0.92160	33986	0.91914	25205	0.91665	71399	0.91414	98954	0.91162	34860	0.90908	06694
57	0.93633	76839	0.93375	23771	0.93114	08789	0.92850	59392	0.92585	03720	0.92317	70544
58	0.95100	37197	0.94829	05215	0.94554	93592	0.94278	30947	0.93999	46577	0.93718	70459
59	0.96560	22968	0.96275	77648	0.95988	34104	0.95698	22079	0.95405	72036	0.95111	15159
60	0.98013	42996	0.97715	50171	0.97414	39666	0.97110	42350	0.96803	89855	0.96495	14576
61	0.99460	07065	0.99148	32876	0.98833	20665	0.98515	02425	0.98194	10956	0.97870	79867
62	1.00900	25896	1.00574	36850	1.00244	88538	0.99912	14076	0.99576	47427	0.99238	23416
63	1.02334	11147	1.01993	74172	1.01649	55774	1.01301	90185	1.00951	12529	1.00597	58844
64	1.03761	75408	1.03406	57908	1.03047	35905	1.02684	44742	1.02318	20696	1.01949	01007
65	1.05183	32196	1.04813	02109	1.04438	43512	1.04059	92845	1.03677	87531	1.03292	66001
66	1.06598	95947	1.06213	21804	1.05822	94210	1.05428	50691	1.05030	29803	1.04628	71158
67	1.08008	82005	1.07607	32988	1.07201	04644	1.06790	35571	1.06375	65444	1.05957	35040
68	1.09413	06611	1.08995	52613	1.08572	92478	1.08145	65860	1.07714	13538	1.07278	77431
69	1.10811	86991	1.10377	98574	1.09938	76380	1.09494	61004	1.09045	94305	1.08593	19330
70	1.12205	40838	1.11754	89692	1.11298	76010	1.10837	41504	1.10371	29093	1.09900	82930
71	1.13593	87295	1.13126	45697	1.12653	11995	1.12174	28896	1.11690	40355	1.11201	91606
72	1.14977	45933	1.14492	87208	1.14002	05915	1.13505	45733	1.13003	51629	1.12496	69891
73	1.16356	37230	1.15854	35706	1.15345	80273	1.14831	15558	1.14310	87512	1.13785	83451
74	1.17730	82445	1.17211	13511	1.16684	58472	1.16151	62877	1.15612	73634	1.15068	39057
75	1.19101	03589	1.18563	43751	1.18018	64783	1.17467	13128	1.16909	36623	1.16345	84553
76	1.20467	23399	1.19911	50334	1.19348	24314	1.18777	92647	1.18201	04074	1.17618	08817
77	1.21829	65304	1.21255	57913	1.20673	62972	1.20084	28631	1.19488	04506	1.18885	41722
78	1.23188	53389	1.22595	91847	1.21995	07429	1.21386	49100	1.20770	67322	1.20148	14094
79	1.24544	12361	1.23932	78165	1.23312	85077	1.22684	82850	1.22049	22763	1.21406	57659
80	1.25896	67510	1.25266	43526	1.24627	23987	1.23979	59408	1.23324	01858	1.22661	04994
81	1.27246	44669	1.26597	15174	1.25938	52860	1.25271	08983	1.24595	36371	1.23911	89471
82	1.28593	70168	1.27925	20893	1.27247	00983	1.26559	62413	1.25863	58749	1.25159	45196
83	1.29938	70794	1.29250	88958	1.28552	98173	1.27845	51113	1.27129	02058	1.26404	06949
84	1.31281	73744	1.30574	48085	1.29856	74725	1.29129	07014	1.28391	99925	1.27646	10113
85	1.32623	06575	1.31895	27384	1.31158	61359	1.30410	62505	1.29652	86474	1.28885	90611
86	1.33962	97157	1.33216	56304	1.32458	89160	1.31690	50374	1.30911	06258	1.30123	84832
87	1.35301	73620	1.34535	64576	1.33757	89521	1.32969	03740	1.32169	64192	1.31360	29556
88	1.36639	64310	1.35853	82160	1.35055	94085	1.34246	55993	1.33426	25481	1.32595	61877
89	1.37976	97728	1.37171	39190	1.36353	34680	1.35523	40724	1.34682	15550	1.33830	19131
90	1.39314	02485	1.38488	65914	1.37650	43258	1.36799	91659	1.35937	69973	1.35064	38810

TABLE IX.

ϕ .	F (40°).	F (41°).	F (42°).	F (43°).	F (44°).	F (45°).
45°	0.81814 76522	0.81967 84387	0.82123 22662	0.82280 77566	0.82440 34647	0.82601 78762
46	0.83778 65936	0.83942 73270	0.84109 35240	0.84278 37483	0.84449 64901	0.84623 01637
47	0.85751 57459	0.85927 18123	0.86105 59717	0.86286 67332	0.86470 25255	0.86656 16942
48	0.87733 61953	0.87921 31177	0.88112 09825	0.88305 82486	0.88502 32874	0.88701 43795
49	0.89724 89366	0.89925 23722	0.90128 98334	0.90335 97340	0.90546 03934	0.90759 00317
50	0.91725 48681	0.91939 06051	0.92156 36986	0.92377 25238	0.92601 53540	0.92829 03551
51	0.93735 47855	0.93962 87394	0.94194 36426	0.94429 78395	0.94668 95647	0.94911 69371
52	0.95754 93765	0.95996 75857	0.96243 06136	0.96493 67826	0.96748 42973	0.97007 12384
53	0.97783 92153	0.98040 78357	0.98302 54357	0.98569 03259	0.98840 06910	0.99115 45837
54	0.99822 47564	1.00095 00557	1.00372 88022	1.00655 93055	1.00943 97433	1.01236 81514
55	1.01870 63291	1.02159 46798	1.02454 12666	1.02754 44125	1.03060 23003	1.03371 29627
56	1.03928 41311	1.04234 20034	1.04546 32376	1.04864 61845	1.05188 90473	1.05518 98714
57	1.05995 82232	1.06319 21763	1.06649 49692	1.06986 49964	1.07330 04991	1.07679 95523
58	1.08072 85232	1.08414 51964	1.08763 65538	1.09120 10523	1.09483 69897	1.09854 24902
59	1.10159 48004	1.10520 09025	1.10888 79147	1.11265 43764	1.11649 86626	1.12041 89687
60	1.12255 66698	1.12635 89684	1.13024 87986	1.13422 48042	1.13828 54605	1.14242 90580
61	1.14361 35871	1.14761 88964	1.15171 87680	1.15591 19742	1.16019 71157	1.16457 26044
62	1.16476 48434	1.16898 00110	1.17329 71944	1.17771 53195	1.18223 31400	1.18684 92181
63	1.18600 95602	1.19044 14537	1.19498 32508	1.19963 40594	1.20439 28153	1.20925 82624
64	1.20734 66852	1.21200 21768	1.21677 59059	1.22166 71918	1.22667 51843	1.23179 88426
65	1.22877 49881	1.23366 09390	1.23867 39176	1.24381 34860	1.24907 90417	1.25446 97959
66	1.25029 30570	1.25541 63008	1.26067 58275	1.26607 14755	1.27160 29261	1.27726 96809
67	1.27189 92953	1.27726 66203	1.28277 99560	1.28843 94522	1.29424 51121	1.30019 67688
68	1.29359 19190	1.29921 00501	1.30498 43979	1.31091 54608	1.31700 36037	1.32324 90347
69	1.31536 89551	1.32124 45344	1.32728 70188	1.33349 72940	1.33987 61283	1.34642 41503
70	1.33722 82404	1.34336 78073	1.34968 54528	1.35618 24891	1.36286 01317	1.36971 94771
71	1.35916 74208	1.36557 73920	1.37217 71002	1.37896 83252	1.38595 27745	1.39313 20618
72	1.38118 39517	1.38787 06002	1.39475 91271	1.40185 18217	1.40915 09295	1.41665 86322
73	1.40327 50993	1.41024 45332	1.41742 84657	1.42482 97380	1.43245 11806	1.44029 55950
74	1.42543 79426	1.43269 60839	1.44018 18157	1.44789 85744	1.45584 98231	1.46403 90356
75	1.44766 93765	1.45522 19392	1.46301 56471	1.47105 45746	1.47934 28656	1.48788 47191
76	1.46996 61156	1.47781 85846	1.48592 62041	1.49429 37298	1.50292 60338	1.51182 80938
77	1.49232 46993	1.50048 23089	1.50890 95106	1.51761 17838	1.52659 47759	1.53586 42963
78	1.51474 14977	1.52320 92106	1.53196 13766	1.54100 42399	1.55034 42697	1.55998 81589
79	1.53721 27184	1.54599 52056	1.55507 74063	1.56446 63696	1.57416 94317	1.58419 42192
80	1.55973 44145	1.56883 60356	1.57825 30075	1.58799 32228	1.59806 49280	1.60847 67320
81	1.58230 24934	1.59172 72778	1.60148 34021	1.61157 96394	1.62202 51872	1.63282 96831
82	1.60491 27268	1.61466 43557	1.62476 36385	1.63522 02627	1.64604 44150	1.65724 68052
83	1.62756 07612	1.63764 25514	1.64808 86046	1.65890 95540	1.67011 66106	1.68172 15969
84	1.65024 21295	1.66065 70183	1.67145 30423	1.68264 18087	1.69423 55850	1.70624 73420
85	1.67295 22634	1.68370 27947	1.69485 15631	1.70641 11742	1.71839 49805	1.73081 71326
86	1.69568 65064	1.70677 48191	1.71827 86648	1.73021 16686	1.74258 82919	1.75542 38925
87	1.71844 01276	1.72986 79452	1.74172 87488	1.75403 72002	1.76680 88891	1.78006 04026
88	1.74120 83357	1.75297 69583	1.76519 61386	1.77788 15884	1.79105 00405	1.80471 93284
89	1.76398 62939	1.77609 65917	1.78867 50986	1.80173 85854	1.81530 49378	1.82939 32472
90	1.78676 91349	1.79922 15440	1.81215 98537	1.82560 18981	1.83956 67211	1.85407 46773

TABLE IX.

38r

φ.	E(45°).	E(46°).	E(47°).	E(48°).	E(49°).	E(50°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2849	0.01745 2834	0.01745 2819	0.01745 2803	0.01745 2788	0.01745 2773
2	0.03490 3041	0.03490 2918	0.03490 2794	0.03490 2671	0.03490 2548	0.03490 2426
3	0.05234 7919	0.05234 7502	0.05234 7085	0.05234 6669	0.05234 6255	0.05234 5842
4	0.06978 4832	0.06978 3843	0.06978 2855	0.06978 1869	0.06978 8887	0.06977 9909
5	0.08721 1134	0.08720 9202	0.08720 7272	0.08720 5347	0.08720 3429	0.08720 1520
6	0.10462 4188	0.10462 0850	0.10461 7515	0.10461 4189	0.10461 0875	0.10460 7577
7	0.12202 1366	0.12201 6066	0.12201 0772	0.12200 5491	0.12200 0229	0.12199 4992
8	0.13940 0053	0.13939 2143	0.13938 4243	0.13937 6361	0.13936 8507	0.13936 0690
9	0.15675 7647	0.15674 6388	0.15673 5142	0.15672 3922	0.15671 2741	0.15670 1613
10	0.17409 1565	0.17407 6125	0.17406 0702	0.17404 5314	0.17402 9980	0.17401 4718
11	0.19139 9240	0.19137 8696	0.19135 8173	0.19133 7697	0.19131 7291	0.19129 6981
12	0.20867 8126	0.20865 1463	0.20862 4827	0.20859 8250	0.20857 1764	0.20854 5401
13	0.22592 5698	0.22589 1812	0.22585 7957	0.22582 4177	0.22579 0511	0.22575 7000
14	0.24313 9459	0.24309 7152	0.24305 4884	0.24301 2706	0.24297 0669	0.24292 8825
15	0.26031 6934	0.26026 4922	0.26021 2954	0.26016 1095	0.26010 9406	0.26005 7952
16	0.27745 5681	0.27739 2587	0.27732 9543	0.27726 6629	0.27720 3917	0.27714 1487
17	0.29455 3286	0.29447 7645	0.29440 2060	0.29432 6625	0.29425 1430	0.29417 6570
18	0.31160 7368	0.31151 7626	0.31142 7945	0.31133 8437	0.31124 9209	0.31116 0373
19	0.32861 5583	0.32851 0097	0.32840 4677	0.32829 9454	0.32819 4554	0.32809 0107
20	0.34557 5621	0.34545 2661	0.34532 9771	0.34520 7102	0.34508 4802	0.34496 3022
21	0.36248 5215	0.36234 2963	0.36220 0783	0.36205 8850	0.36191 7334	0.36177 6410
22	0.37934 2135	0.37917 8689	0.37901 5313	0.37885 2209	0.37868 9573	0.37852 7607
23	0.39614 4198	0.39595 7568	0.39577 1004	0.39558 4736	0.39539 8989	0.39521 3994
24	0.41288 9266	0.41267 7377	0.41246 5547	0.41225 4036	0.41204 3101	0.41183 3003
25	0.42957 5248	0.42933 5941	0.42909 6682	0.42885 7764	0.42861 9477	0.42838 2115
26	0.44620 0102	0.44593 1136	0.44566 2201	0.44539 3626	0.44512 5738	0.44485 8867
27	0.46276 1842	0.46246 0893	0.46215 9951	0.46185 9386	0.46155 9562	0.46126 0850
28	0.47925 8534	0.47892 3195	0.47858 7834	0.47825 2862	0.47791 8685	0.47758 5716
29	0.49568 8300	0.49531 6086	0.49494 3812	0.49457 1933	0.49420 0902	0.49383 1176
30	0.51204 9322	0.51163 7669	0.51122 5907	0.51081 4541	0.51040 4072	0.50999 5005
31	0.52833 9845	0.52788 6108	0.52743 2205	0.52697 8691	0.52652 6119	0.52607 5046
32	0.54455 8175	0.54405 9635	0.54356 0859	0.54306 2457	0.54256 5037	0.54206 9210
33	0.56070 2684	0.56015 6547	0.55961 0090	0.55906 3981	0.55851 8888	0.55797 5479
34	0.57677 1815	0.57617 5210	0.57557 8188	0.57498 1478	0.57438 5808	0.57379 1909
35	0.59276 4077	0.59211 4064	0.59146 3520	0.59081 3238	0.59016 4010	0.58951 6635
36	0.60867 8056	0.60797 1623	0.60726 4526	0.60655 7627	0.60585 1786	0.60514 7872
37	0.62451 2410	0.62374 6476	0.62297 9726	0.62221 3092	0.62144 7508	0.62068 3915
38	0.64026 5877	0.63943 7294	0.63860 7720	0.63777 8164	0.63694 9633	0.63612 3146
39	0.65593 7272	0.65504 2827	0.65414 7193	0.65325 1456	0.65235 6704	0.65146 4037
40	0.67152 5494	0.67056 1911	0.66959 6914	0.66863 1672	0.66766 7356	0.66670 5149
41	0.68702 9527	0.68599 3469	0.68495 5744	0.68391 7606	0.68288 0314	0.68184 5139
42	0.70244 8440	0.70133 6511	0.70022 2632	0.69910 8145	0.69799 4400	0.69688 2760
43	0.71778 1391	0.71659 0141	0.71539 6623	0.71420 2273	0.71300 8534	0.71181 6867
44	0.73302 7631	0.73175 3555	0.73047 6858	0.72919 9071	0.72792 1737	0.72664 6417
45	0.74818 6504	0.74682 6047	0.74546 2577	0.74409 7725	0.74273 3136	0.74137 0474

ϕ .	F (45°).	F (46°).	F (47°).	F (48°).	F (49°).	F (50°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 3736	0.01745 3751	0.01745 3767	0.01745 3782	0.01745 3797	0.01745 3812
2	0.03491 0130	0.03491 0253	0.03491 0377	0.03491 0500	0.03491 0623	0.03491 0745
3	0.05237 1841	0.05237 2258	0.05237 2676	0.05237 3092	0.05237 3507	0.05237 3919
4	0.06984 1529	0.06984 2519	0.06984 3509	0.06984 4496	0.06984 5480	0.06984 6459
5	0.08732 1854	0.08732 3790	0.08732 5725	0.08732 7654	0.08732 9578	0.08733 1492
6	0.10481 5479	0.10481 8828	0.10482 2175	0.10482 5512	0.10482 8839	0.10483 2150
7	0.12232 5069	0.12233 0392	0.12233 5712	0.12234 1018	0.12234 6307	0.12235 1571
8	0.13985 3290	0.13986 1245	0.13986 9195	0.13987 7127	0.13988 5033	0.13989 2902
9	0.15740 2810	0.15741 4153	0.15742 5488	0.15743 6798	0.15744 8073	0.15745 9296
10	0.17497 6302	0.17499 1885	0.17500 7458	0.17502 2999	0.17503 8492	0.17505 3916
11	0.19257 6441	0.19259 7216	0.19261 7980	0.19263 8703	0.19265 9364	0.19267 9935
12	0.21020 5905	0.21023 2926	0.21025 9934	0.21028 6893	0.21031 3774	0.21034 0540
13	0.22786 7377	0.22790 1798	0.22793 6207	0.22797 0559	0.22800 4815	0.22803 8928
14	0.24556 3541	0.24560 6622	0.24564 9694	0.24569 2700	0.24573 5591	0.24577 8310
15	0.26329 7086	0.26335 0194	0.26340 3297	0.26345 6397	0.26350 9291	0.26356 1913
16	0.28107 0705	0.28113 5314	0.28119 9926	0.28126 4458	0.28132 8836	0.28139 2977
17	0.29888 7034	0.29896 4788	0.29904 2498	0.29912 0125	0.29919 7578	0.29927 4759
18	0.31674 8952	0.31684 1428	0.31693 3939	0.31702 6367	0.31711 8605	0.31721 0534
19	0.33465 8981	0.33476 8051	0.33487 7182	0.33498 6238	0.33509 5087	0.33520 3592
20	0.35261 9885	0.35274 7481	0.35287 5172	0.35300 2800	0.35313 0210	0.35325 7243
21	0.37063 4373	0.37078 2545	0.37093 0857	0.37107 9127	0.37122 7175	0.37137 4814
22	0.38870 5151	0.38887 6075	0.38904 7196	0.38921 8306	0.38938 9196	0.38955 9651
23	0.40683 4931	0.40703 0907	0.40722 7153	0.40742 3432	0.40761 9503	0.40781 5120
24	0.42502 6420	0.42524 9880	0.42547 3701	0.42569 7613	0.42592 1340	0.42614 4604
25	0.44328 2329	0.44353 5836	0.44378 9817	0.44404 3965	0.44429 7966	0.44455 1506
26	0.46160 5362	0.46189 1619	0.46217 8485	0.46246 5614	0.46275 2654	0.46303 9247
27	0.47999 8225	0.48032 0071	0.48064 2691	0.48096 5696	0.48128 8688	0.48161 1267
28	0.49846 3614	0.49882 4036	0.49918 5427	0.49954 7352	0.49990 9367	0.50027 1022
29	0.51700 4222	0.51740 6352	0.51780 9683	0.51821 3730	0.51861 7999	0.51902 1987
30	0.53562 2733	0.53606 9856	0.53651 8452	0.53696 7984	0.53741 7903	0.53786 7650
31	0.55432 1820	0.55481 7376	0.55531 4724	0.55581 3270	0.55631 2406	0.55681 1515
32	0.57310 4145	0.57365 1733	0.57420 1484	0.57475 2744	0.57530 4849	0.57585 7098
33	0.59197 2353	0.59257 5737	0.59318 1712	0.59378 9562	0.59439 8550	0.59500 7926
34	0.61109 9072	0.61159 2183	0.61225 8378	0.61292 6876	0.61359 6869	0.61426 7535
35	0.62997 6909	0.63070 3850	0.63143 4441	0.63216 7832	0.63290 3139	0.63363 9465
36	0.64911 8448	0.64991 3497	0.65071 2844	0.65151 5564	0.65232 0696	0.65312 7261
37	0.66835 6244	0.66922 3859	0.67009 6510	0.67097 3194	0.67185 2868	0.67273 4467
38	0.68769 2820	0.68863 7644	0.68958 8341	0.69054 3826	0.69150 2971	0.69246 4622
39	0.70713 0663	0.70815 7527	0.70919 1211	0.71023 0543	0.71127 4308	0.71232 1258
40	0.72667 2221	0.72778 6146	0.72890 7960	0.73003 6400	0.73117 0159	0.73230 7891
41	0.74631 9895	0.74752 6100	0.74874 1393	0.74996 4419	0.75119 3778	0.75242 8021
42	0.76607 6035	0.76737 9938	0.76869 4271	0.77001 7587	0.77134 8389	0.77268 5122
43	0.78594 2936	0.78735 0155	0.78876 9305	0.79019 8844	0.79163 7175	0.79308 2636
44	0.80592 2829	0.80743 9188	0.80896 9150	0.81051 1079	0.81206 3275	0.81362 3967
45	0.82601 7876	0.82764 9406	0.82929 6399	0.83095 7123	0.83262 9775	0.83431 2473

TABLE IX.

φ.	E (45°).	E (46°).	E (47°).	E (48°).	E (49°).	E (50°).
45°	0.74818 6504	0.74682 6047	0.74546 2577	0.74409 7725	0.74273 3136	0.74137 0474
46	0.76325 7450	0.76180 7009	0.76035 3122	0.75889 7523	0.75744 1962	0.75598 8212
47	0.77824 0007	0.77669 5935	0.77514 7939	0.77359 7861	0.77204 7559	0.77049 8917
48	0.79313 3812	0.79149 2422	0.78984 6582	0.78819 8245	0.78654 9383	0.78490 1993
49	0.80793 8609	0.80619 6173	0.80444 8714	0.80269 8295	0.80094 7005	0.79919 6960
50	0.82265 4241	0.82080 7001	0.81895 4109	0.81709 7745	0.81524 0117	0.81338 3463
51	0.83728 0663	0.83532 4828	0.83336 2657	0.83139 6448	0.82942 8531	0.82746 1270
52	0.85181 7934	0.84974 9690	0.84767 4364	0.84559 4378	0.84351 2186	0.84143 0281
53	0.86626 6229	0.86408 1737	0.86188 9355	0.85969 1631	0.85749 1146	0.85529 0524
54	0.88062 5831	0.87832 1236	0.87600 7878	0.87368 8432	0.87136 5607	0.86904 2165
55	0.89489 7139	0.89246 8575	0.89003 0305	0.88758 5132	0.88513 5899	0.88268 5505
56	0.90908 0669	0.90652 4262	0.90395 7132	0.90138 2214	0.89880 2487	0.89622 0988
57	0.92317 7054	0.92048 8926	0.91778 8984	0.91508 0295	0.91236 5974	0.90964 9201
58	0.93718 7046	0.93436 3323	0.93152 6616	0.92868 0125	0.92582 7104	0.92297 0876
59	0.95111 1516	0.94814 8334	0.94517 0915	0.94218 2594	0.93918 6765	0.93618 6896
60	0.96495 1458	0.96184 4967	0.95872 2901	0.95558 8730	0.95244 5990	0.94929 8295
61	0.97870 7987	0.97545 4358	0.97218 3727	0.96889 9702	0.96560 5959	0.96230 6260
62	0.99238 2342	0.98897 7772	0.98555 4684	0.98211 6821	0.97866 8002	0.97521 2136
63	1.00597 5884	1.00241 6606	0.99883 7199	0.99524 1544	0.99163 3600	0.98801 7425
64	1.01949 0101	1.01577 2386	1.01203 2836	1.00827 5469	1.00450 4384	1.00072 3788
65	1.03292 6600	1.02904 6768	1.02514 3298	1.02122 0342	1.01728 2141	1.01333 3047
66	1.04628 7116	1.04224 1541	1.03817 0426	1.03407 8055	1.02996 8809	1.02584 7188
67	1.05957 3504	1.05535 8623	1.05111 6197	1.04685 0644	1.04256 6483	1.03826 8358
68	1.07278 7743	1.06840 0061	1.06398 2728	1.05954 0293	1.05507 7410	1.05059 8867
69	1.08593 1933	1.08136 8032	1.07677 2273	1.07214 9330	1.06750 3993	1.06284 1189
70	1.09900 8293	1.09426 4841	1.08948 7219	1.08468 0226	1.07984 8786	1.07499 7960
71	1.11201 9161	1.10709 2917	1.10213 0089	1.09713 5597	1.09211 4494	1.08707 1978
72	1.12496 6989	1.11985 4814	1.11470 3537	1.10951 8198	1.10430 3975	1.09906 6199
73	1.13785 8345	1.13255 3207	1.12721 0347	1.12183 0923	1.11642 0233	1.11098 3738
74	1.15068 3906	1.14519 0888	1.13965 3429	1.13407 6800	1.12846 6417	1.12282 7864
75	1.16345 8455	1.15777 0766	1.15203 5817	1.14625 8991	1.14044 5817	1.13460 1998
76	1.17618 0882	1.17029 5859	1.16436 0664	1.15838 0785	1.15236 1860	1.14630 9709
77	1.18885 4172	1.18276 9294	1.17663 1238	1.17044 5594	1.16421 8107	1.15795 4707
78	1.20148 1409	1.19519 4298	1.18885 0916	1.18245 6949	1.17601 8245	1.16954 0840
79	1.21406 5766	1.20757 4198	1.20102 3180	1.19441 8494	1.18776 6084	1.18107 2088
80	1.22661 0499	1.21991 2410	1.21315 1613	1.20633 3979	1.19946 5549	1.19255 2554
81	1.23911 8947	1.23221 2438	1.22523 9888	1.21820 7256	1.21112 0671	1.20398 6458
82	1.25159 4520	1.24447 7863	1.23729 1765	1.23004 2268	1.22273 5584	1.21537 8130
83	1.26404 0695	1.25671 2342	1.24931 1084	1.24184 3043	1.23431 4515	1.22673 2000
84	1.27646 1011	1.26891 9594	1.26130 1754	1.25361 3687	1.24586 1772	1.23805 2587
85	1.28885 9061	1.28110 3399	1.27326 7747	1.26535 8374	1.25738 1737	1.24934 4491
86	1.30123 8483	1.29326 7586	1.28521 3091	1.27708 1338	1.26887 8859	1.26061 2384
87	1.31360 2956	1.30541 6027	1.29714 1859	1.28878 6862	1.28035 7641	1.27186 0996
88	1.32595 6188	1.31755 2628	1.30905 8163	1.30047 9272	1.29182 2628	1.28309 5105
89	1.33830 1913	1.32968 1322	1.32096 6142	1.31216 2921	1.30327 8401	1.29431 9525
90	1.35064 3881	1.34180 6058	1.33286 9954	1.32384 2184	1.31472 9560	1.30553 9094

TABLE IX.

ϕ .	F (45°).	F (46°).	F (47°).	F (48°).	F (49°).	F (50°).
45°	0.82601 7876	0.82764 9406	0.82929 6399	0.83095 7123	0.83262 9775	0.83431 2473
46	0.84623 0164	0.84798 3105	0.84975 3573	0.85153 9739	0.85333 9698	0.85515 1455
47	0.86656 1694	0.86844 2498	0.87034 3113	0.87226 1616	0.87419 5997	0.87614 4150
48	0.88701 4380	0.88902 9710	0.89106 7374	0.89312 5355	0.89520 1543	0.89729 3719
49	0.90759 0032	0.90974 6765	0.91192 8611	0.91413 3465	0.91635 9117	0.91860 3238
50	0.92829 0355	0.93059 5580	0.93292 8973	0.93528 8346	0.93767 1395	0.94007 5683
51	0.94911 6937	0.95158 7953	0.95407 0491	0.95659 2284	0.95914 0940	0.96171 3920
52	0.97007 1238	0.97269 5554	0.97535 5065	0.97804 7434	0.98077 0186	0.98352 0687
53	0.99115 4584	0.99394 9914	0.99678 4454	0.99965 5807	1.00256 1423	1.00549 8582
54	1.01236 8151	1.01534 2414	1.01836 0265	1.02141 9260	1.02451 6787	1.02765 0048
55	1.03371 2963	1.03687 4272	1.04008 3938	1.04333 9481	1.04663 8240	1.04997 7352
56	1.05518 9871	1.05854 6532	1.06195 6732	1.06541 7970	1.06892 7554	1.07248 2572
57	1.07679 9552	1.08036 0052	1.08397 9712	1.08765 6030	1.09138 6298	1.09516 7574
58	1.09854 2490	1.10231 5491	1.10615 3737	1.11005 4746	1.11401 5815	1.11803 3995
59	1.12041 8969	1.12441 3295	1.12847 9442	1.13261 4970	1.13681 7207	1.14108 3221
60	1.14242 9058	1.14665 3686	1.15095 7225	1.15533 7305	1.15979 1315	1.16431 6365
61	1.16457 2604	1.16903 6646	1.17358 7230	1.17822 2088	1.18293 8698	1.18773 4247
62	1.18684 9218	1.19156 1906	1.19636 9335	1.20126 9370	1.20625 9615	1.21133 7370
63	1.20925 8262	1.21422 8933	1.21930 3134	1.22447 8902	1.22975 4005	1.23512 5898
64	1.23179 8843	1.23703 6915	1.24238 7922	1.24785 0114	1.25342 1465	1.25909 9630
65	1.25446 9796	1.25998 4751	1.26562 2684	1.27138 2101	1.27726 1232	1.28325 7979
66	1.27726 9681	1.28307 1039	1.28900 6077	1.29507 3606	1.30127 2161	1.30759 9950
67	1.30019 6769	1.30629 4062	1.31253 6417	1.31892 3001	1.32545 2709	1.33212 4115
68	1.32324 9035	1.32965 1781	1.33621 1668	1.34292 8273	1.34980 0913	1.35682 8590
69	1.34642 4150	1.35314 1824	1.36002 9429	1.36708 7012	1.37431 4375	1.38171 1018
70	1.36971 9477	1.37676 1478	1.38398 6926	1.39139 6397	1.39899 0245	1.40676 8546
71	1.39313 2062	1.40050 7683	1.40808 0998	1.41585 3181	1.42382 5210	1.43199 7810
72	1.41665 8632	1.42437 7024	1.43230 8097	1.44045 3688	1.44881 5475	1.45739 4916
73	1.44029 5595	1.44836 5732	1.45666 4277	1.46519 3802	1.47395 6760	1.48295 5431
74	1.46403 9036	1.47246 9677	1.48114 5193	1.49006 8961	1.49924 4290	1.50867 4369
75	1.48788 4719	1.49668 4374	1.50574 6101	1.51507 4157	1.52467 2790	1.53454 6188
76	1.51182 8094	1.52100 4982	1.53046 1859	1.54020 3938	1.55023 6485	1.56056 4783
77	1.53586 4296	1.54542 6309	1.55528 6932	1.56545 2407	1.57592 9104	1.58672 3492
78	1.55998 8159	1.56994 2822	1.58021 5399	1.59081 3233	1.60174 3883	1.61301 5096
79	1.58419 4219	1.59454 8654	1.60524 0962	1.61627 9661	1.62767 3578	1.63943 1834
80	1.60847 6732	1.61923 7619	1.63035 6962	1.64184 4525	1.65371 0481	1.66596 5416
81	1.63282 9683	1.64400 3225	1.65555 6395	1.66750 0266	1.67984 6436	1.69260 7042
82	1.65724 6805	1.66883 8694	1.68083 1928	1.69323 8953	1.70607 2864	1.71934 7430
83	1.68172 1597	1.69373 6982	1.70617 5926	1.71905 2309	1.73238 0789	1.74617 6844
84	1.70624 7342	1.71869 0798	1.73158 0475	1.74493 1739	1.75876 0873	1.77308 5132
85	1.73081 7133	1.74369 2635	1.75703 7411	1.77086 8362	1.78520 3447	1.80006 1764
86	1.75542 3892	1.76873 4791	1.78253 8350	1.79685 3043	1.81169 8555	1.82709 5878
87	1.78006 0403	1.79380 9404	1.80807 4721	1.82287 6435	1.83823 5994	1.85417 6328
88	1.80471 9328	1.81890 8476	1.83363 7801	1.84892 9016	1.86480 5361	1.88129 1737
89	1.82939 3247	1.84402 3911	1.85921 8752	1.87500 1130	1.89139 6098	1.90843 0550
90	1.85407 4677	1.86914 7545	1.88480 8657	1.90108 3033	1.91799 7546	1.93558 1096

TABLE IX.

ϕ .	E(50°).	E(51°).	E(52°).	E(53°).	E(54°).	E(55°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2773	0.01745 2757	0.01745 2742	0.01745 2727	0.01745 2713	0.01745 2698
2	0.03490 2426	0.03490 2304	0.03490 2184	0.03490 2064	0.03490 1946	0.03490 1829
3	0.05234 5842	0.05234 5432	0.05234 5026	0.05234 4622	0.05234 4223	0.05234 3828
4	0.06977 9909	0.06977 8938	0.06977 7974	0.06977 7018	0.06977 6071	0.06977 5135
5	0.08720 1520	0.08719 9623	0.08719 7740	0.08719 5873	0.08719 4024	0.08719 2196
6	0.10460 7577	0.10460 4299	0.10460 1044	0.10459 7819	0.10459 4624	0.10459 1466
7	0.12199 4992	0.12198 9787	0.12198 4619	0.12197 9497	0.12197 4425	0.12196 9409
8	0.13936 0690	0.13935 2922	0.13934 5209	0.13933 7563	0.13932 9992	0.13932 2505
9	0.15670 1613	0.15669 0554	0.15667 9573	0.15666 8687	0.15665 7907	0.15664 7247
10	0.17401 4718	0.17399 9549	0.17398 4487	0.17396 9556	0.17395 4769	0.17394 0147
11	0.19129 6981	0.19127 6794	0.19125 6749	0.19123 6876	0.19121 7196	0.19119 7735
12	0.20854 5401	0.20851 9196	0.20849 3175	0.20846 7377	0.20844 1829	0.20841 6563
13	0.22575 7000	0.22572 3688	0.22569 0609	0.22565 7812	0.22562 5331	0.22559 3209
14	0.24292 8825	0.24288 7226	0.24284 5918	0.24280 4959	0.24276 4394	0.24272 4274
15	0.26005 7952	0.26000 6797	0.25995 5998	0.25990 5625	0.25985 5736	0.25980 6391
16	0.27714 1487	0.27707 9418	0.27701 7777	0.27695 6650	0.27689 6106	0.27683 6222
17	0.29417 6570	0.29410 2137	0.29402 8215	0.29395 4904	0.29388 2289	0.29381 0462
18	0.31116 0373	0.31107 2038	0.31098 4306	0.31089 7293	0.31081 1103	0.31072 5842
19	0.32809 0107	0.32798 6244	0.32788 3084	0.32778 0763	0.32767 9403	0.32757 9131
20	0.34496 3022	0.34484 1915	0.34472 1621	0.34460 2298	0.34448 4087	0.34436 7138
21	0.36177 6410	0.36163 6255	0.36149 7033	0.36135 8924	0.36122 2094	0.36108 6715
22	0.37852 7607	0.37836 6512	0.37820 6478	0.37804 7713	0.37789 0407	0.37773 4758
23	0.39521 3994	0.39502 9979	0.39484 7164	0.39466 5784	0.39448 6058	0.39430 8212
24	0.41183 3003	0.41162 4001	0.41141 6347	0.41121 0306	0.41100 6129	0.41080 4071
25	0.42838 2115	0.42814 5973	0.42791 1335	0.42767 8500	0.42744 7753	0.42721 9383
26	0.44485 8867	0.44459 3344	0.44432 9491	0.44406 7642	0.44380 8120	0.44355 1249
27	0.46126 0850	0.46096 3621	0.46066 8235	0.46037 5066	0.46008 4476	0.45979 6830
28	0.47758 5716	0.47725 4369	0.47692 5046	0.47659 8164	0.47627 4128	0.47595 3345
29	0.49383 1176	0.49346 3214	0.49309 7466	0.49273 4393	0.49237 4447	0.49201 8079
30	0.50999 5005	0.50958 7849	0.50918 3102	0.50878 1275	0.50838 2868	0.50798 8381
31	0.52607 5046	0.52562 6032	0.52517 9628	0.52473 6398	0.52429 6894	0.52386 1670
32	0.54206 9210	0.54157 5591	0.54108 4790	0.54059 7424	0.54011 4102	0.53963 5435
33	0.55797 5479	0.55743 4428	0.55689 6405	0.55636 2087	0.55583 2142	0.55530 7242
34	0.57379 1909	0.57320 0518	0.57261 2368	0.57202 8198	0.57144 8741	0.57087 4733
35	0.58951 6635	0.58887 1916	0.58823 0651	0.58759 3648	0.58696 1707	0.58633 5631
36	0.60514 7872	0.60444 6756	0.60374 9309	0.60305 6410	0.60236 8930	0.60168 7743
37	0.62068 3915	0.61992 3258	0.61916 6483	0.61841 4543	0.61766 8386	0.61692 8962
38	0.63612 3146	0.63529 9727	0.63448 0399	0.63366 6196	0.63285 8143	0.63205 7273
39	0.65146 4037	0.65057 4559	0.64968 9377	0.64880 9608	0.64793 6361	0.64707 0754
40	0.66670 5149	0.66574 6243	0.66479 1830	0.66384 3114	0.66290 1296	0.66196 7580
41	0.68184 5139	0.68081 3362	0.67978 6267	0.67876 5149	0.67775 1303	0.67674 6025
42	0.69688 2760	0.69577 4600	0.69467 1299	0.69357 4249	0.69248 4841	0.69140 4470
43	0.71181 6867	0.71062 8743	0.70944 5642	0.70826 9055	0.70710 0476	0.70594 1403
44	0.72664 6417	0.72537 4682	0.72410 8117	0.72284 8317	0.72159 6884	0.72035 5423
45	0.74137 0474	0.74001 1417	0.73865 7658	0.73731 0899	0.73597 2855	0.73464 5245

ϕ .	F(50°).	F(51°).	F(52°).	F(53°).	F(54°).	F(55°).
0°	0.00000.0000	0.00000.0000	0.00000.0000	0.00000.0000	0.00000.0000	0.00000.0000
1	0.01745 3812	0.01745 3828	0.01745 3843	0.01745 3858	0.01745 3872	0.01745 3887
2	0.03491 0745	0.03491 0867	0.03491 0987	0.03491 1107	0.03491 1225	0.03491 1342
3	0.05237 3919	0.05237 4330	0.05237 4737	0.05237 5141	0.05237 5540	0.05237 5936
4	0.06984 6459	0.06984 7432	0.06984 8398	0.06984 9357	0.06985 0304	0.06985 1243
5	0.08733 1492	0.08733 3394	0.08733 5283	0.08733 7156	0.08733 9009	0.08734 0843
6	0.10483 2150	0.10483 5441	0.10483 8708	0.10484 1948	0.10484 5155	0.10484 8328
7	0.12235 1571	0.12235 6804	0.12236 2000	0.12236 7152	0.12237 2253	0.12237 7299
8	0.13989 2902	0.13990 0725	0.13990 8493	0.13991 6197	0.13992 3824	0.13993 1370
9	0.15745 9296	0.15747 0454	0.15748 1534	0.15749 2523	0.15750 3405	0.15751 4171
10	0.17505 3916	0.17506 9251	0.17508 4481	0.17509 9587	0.17511 4548	0.17512 9350
11	0.19267 9935	0.19270 0391	0.19272 0708	0.19274 0861	0.19276 0823	0.19278 0573
12	0.21034 0540	0.21036 7160	0.21039 3602	0.21041 9833	0.21044 5819	0.21047 1531
13	0.22803 8928	0.22807 2859	0.22810 6568	0.22814 0011	0.22817 3146	0.22820 5936
14	0.24577 8310	0.24582 0807	0.24586 3030	0.24590 4925	0.24594 6440	0.24598 7528
15	0.26356 1913	0.26361 4337	0.26366 6430	0.26371 8127	0.26376 9361	0.26382 0074
16	0.28139 2977	0.28145 6801	0.28152 0233	0.28158 3191	0.28164 5596	0.28170 7373
17	0.29927 4759	0.29935 1572	0.29942 7924	0.29950 3719	0.29957 8859	0.29965 3255
18	0.31721 0534	0.31730 2040	0.31739 3014	0.31748 3338	0.31757 2898	0.31766 1585
19	0.33520 3592	0.33531 1618	0.33541 9035	0.33552 5704	0.33563 1490	0.33573 6264
20	0.35325 7243	0.35338 3740	0.35350 9547	0.35363 4503	0.35375 8448	0.35388 1230
21	0.37137 4814	0.37152 1861	0.37166 8136	0.37181 3450	0.37195 7619	0.37210 0463
22	0.38955 9651	0.38972 9460	0.38989 8414	0.39006 6294	0.39023 2887	0.39039 7983
23	0.40781 5120	0.40801 0040	0.40820 4021	0.40839 6815	0.40858 8173	0.40877 7855
24	0.42614 4604	0.42636 7125	0.42658 8628	0.42680 8827	0.42702 7439	0.42724 4186
25	0.44455 1506	0.44480 4266	0.44505 5932	0.44530 6179	0.44555 4685	0.44580 1132
26	0.46303 9247	0.46332 5035	0.46360 9660	0.46389 2755	0.46417 3954	0.46445 2896
27	0.48161 1267	0.48193 3028	0.48225 3568	0.48257 2474	0.48288 9330	0.48320 3728
28	0.50027 1022	0.50063 1865	0.50099 1443	0.50134 9289	0.50170 4940	0.50205 7931
29	0.51902 1987	0.51942 5189	0.51982 7098	0.52022 7192	0.52062 4953	0.52101 9856
30	0.53786 7650	0.53831 6663	0.53876 4377	0.53921 0209	0.53965 3581	0.54009 3905
31	0.55681 1515	0.55730 9973	0.55780 7150	0.55830 2401	0.55879 5081	0.55928 4534
32	0.57585 7098	0.57640 8822	0.57695 9315	0.57750 7863	0.57805 3751	0.57859 6248
33	0.59500 7926	0.59561 6931	0.59622 4793	0.59683 0724	0.59743 3930	0.59803 3606
34	0.61426 7535	0.61493 8038	0.61560 7531	0.61627 5144	0.61694 0002	0.61760 1216
35	0.63363 9465	0.63437 5894	0.63511 1495	0.63584 5314	0.63657 6388	0.63730 3736
36	0.65312 7261	0.65393 4259	0.65474 0672	0.65554 5453	0.65634 7547	0.65714 5874
37	0.67273 4467	0.67361 6902	0.67449 9062	0.67537 9805	0.67625 7973	0.67713 2384
38	0.69246 4622	0.69342 7595	0.69439 0681	0.69535 2636	0.69631 2195	0.69726 8066
39	0.71232 1258	0.71337 0110	0.71441 9551	0.71546 8231	0.71651 4770	0.71755 7759
40	0.73230 7891	0.73344 8212	0.73458 9699	0.73573 0889	0.73687 0282	0.73800 6344
41	0.75242 8021	0.75366 5657	0.75490 5150	0.75614 4917	0.75738 3334	0.75861 8733
42	0.77268 5122	0.77402 6185	0.77536 9923	0.77671 4628	0.77805 8546	0.77939 9869
43	0.79308 2636	0.79453 3511	0.79598 8022	0.79744 4332	0.79890 0548	0.80035 4716
44	0.81362 3967	0.81519 1320	0.81676 3431	0.81833 8327	0.81991 3971	0.82148 8258
45	0.83431 2473	0.83600 3260	0.83770 0104	0.83940 0893	0.84110 3441	0.84280 5484

TABLE IX.

φ.	E (50°).	E (51°).	E (52°).	E (53°).	E (54°).	E (55°).
45°	0.74137 0474	0.74001 1417	0.73865 7658	0.73731 0899	0.73597 2855	0.73464 5245
46	0.75598 8212	0.75453 8060	0.75309 3310	0.75165 5779	0.75022 7298	0.74880 9703
47	0.77049 8917	0.76895 3837	0.76741 4238	0.76588 2056	0.76435 9242	0.76284 7755
48	0.78490 1993	0.78325 8095	0.78161 9729	0.77998 8953	0.77836 7844	0.77675 8487
49	0.79919 6960	0.79745 0301	0.79570 9193	0.79397 5820	0.79225 2388	0.79054 1116
50	0.81338 3463	0.81153 0049	0.80968 2169	0.80784 2137	0.80601 2295	0.80419 4996
51	0.82746 1270	0.82549 7061	0.82353 8328	0.82158 7521	0.81964 7121	0.81771 9623
52	0.84143 0281	0.83935 1192	0.83727 7478	0.83521 1728	0.83315 6567	0.83111 4636
53	0.85529 0524	0.85309 2431	0.85089 9564	0.84871 4656	0.84654 0479	0.84437 9823
54	0.86904 2165	0.86672 0908	0.86440 4677	0.86209 6351	0.85979 8853	0.85751 5129
55	0.88268 5505	0.88023 6894	0.87779 3052	0.87535 7008	0.87293 1842	0.87052 0657
56	0.89622 0988	0.89364 0806	0.89106 5076	0.88849 6980	0.88593 9756	0.88339 6672
57	0.90964 9201	0.90693 3210	0.90422 1289	0.90151 6777	0.89882 3072	0.89614 3609
58	0.92297 0876	0.92011 4824	0.91726 2389	0.91441 7071	0.91158 2431	0.90876 2075
59	0.93618 6896	0.93318 6520	0.93018 9235	0.92719 8702	0.92421 8649	0.92125 2856
60	0.94929 8295	0.94614 9330	0.94300 2850	0.93986 2680	0.93673 2717	0.93361 6919
61	0.96230 6260	0.95900 4443	0.95570 4423	0.95241 0188	0.94912 5808	0.94585 5419
62	0.97521 2156	0.97175 5215	0.96829 5313	0.96484 2586	0.96139 9276	0.95796 9701
63	0.98801 7425	0.98439 7165	0.98077 7054	0.97716 1416	0.97355 4667	0.96996 1305
64	1.00072 3788	0.99693 7979	0.99315 1353	0.98936 8402	0.98559 3715	0.98183 1973
65	1.01333 3047	1.00937 7514	1.00542 0096	1.00146 5453	0.99751 8349	0.99358 3649
66	1.02584 7188	1.02171 7796	1.01758 5347	1.01345 4669	1.00933 0698	1.00521 8482
67	1.03826 8358	1.03396 1023	1.02964 9352	1.02533 8337	1.02103 3088	1.01673 8834
68	1.05059 8867	1.04610 9567	1.04161 4539	1.03711 8939	1.03262 8049	1.02814 7278
69	1.06284 1189	1.05816 5969	1.05348 3516	1.04879 9147	1.04411 8313	1.03944 6603
70	1.07499 7960	1.07031 2946	1.06525 9077	1.06038 1829	1.05550 6819	1.05063 9811
71	1.08707 1978	1.08201 3384	1.07694 4196	1.07187 0044	1.06679 6708	1.06173 0126
72	1.09906 6199	1.09381 0341	1.08854 2029	1.08326 7045	1.07799 1329	1.07272 0986
73	1.11098 3738	1.10552 7041	1.10005 5910	1.09457 6276	1.08909 4232	1.08361 6047
74	1.12282 7864	1.11716 6874	1.11148 9352	1.10580 1369	1.10010 9170	1.09441 9182
75	1.13460 1998	1.12873 3394	1.12284 6039	1.11694 6143	1.11104 0095	1.10513 4475
76	1.14630 9709	1.14023 0311	1.13412 9827	1.12801 4598	1.12189 1154	1.11576 6220
77	1.15795 4707	1.15166 1489	1.14534 4735	1.13901 0913	1.13266 6685	1.12631 8916
78	1.16954 0840	1.16303 0940	1.15649 4942	1.14993 9436	1.14337 1210	1.13679 7262
79	1.18107 2088	1.17434 2818	1.16758 4780	1.16080 4681	1.15400 9429	1.14720 6149
80	1.19255 2554	1.18560 1410	1.17861 8726	1.17161 1319	1.16458 6213	1.15755 0651
81	1.20398 6458	1.19681 1129	1.18960 1393	1.18236 4170	1.17510 6592	1.16783 6016
82	1.21537 8130	1.20797 6508	1.20053 7522	1.19306 8191	1.18557 5749	1.17806 7658
83	1.22673 2000	1.21910 2188	1.21143 1973	1.20372 8469	1.19599 9003	1.18825 1140
84	1.23805 2587	1.23019 2907	1.22228 9712	1.21435 0204	1.20638 1802	1.19839 2164
85	1.24934 4491	1.24125 3492	1.23311 5801	1.22493 8704	1.21672 9708	1.20849 6558
86	1.26061 2384	1.25228 8846	1.24391 5385	1.23549 9366	1.22704 8380	1.21857 0255
87	1.27186 0996	1.26330 3936	1.25469 3678	1.24603 7663	1.23734 3562	1.22861 9283
88	1.28309 5105	1.27430 3786	1.26545 5953	1.25655 9132	1.24762 1066	1.23864 9742
89	1.29431 9525	1.28529 3445	1.27620 7525	1.26706 9355	1.25788 6756	1.24866 7791
90	1.30553 9094	1.29627 8008	1.28695 3739	1.27757 3948	1.26814 6531	1.25867 9625

ϕ .	F (50°).	F (51°).	F (52°).	F (53°).	F (54°).	F (55°).
45°	0.83431 2473	0.83600 3260	0.83770 0104	0.83940 0893	0.84110 3441	0.84280 5484
46	0.85515 1455	0.85697 2929	0.85880 1958	0.86063 6284	0.86247 3570	0.86431 1385
47	0.87614 4150	0.87810 3870	0.88007 2860	0.88204 8717	0.88402 8944	0.88601 0941
48	0.89729 3719	0.89939 9555	0.90151 6618	0.90364 2357	0.90577 4112	0.90790 9110
49	0.91860 3238	0.92086 3379	0.92313 6969	0.92542 1309	0.92771 3576	0.93001 0817
50	0.94007 5683	0.94249 8641	0.94493 7564	0.94738 9603	0.94985 1772	0.95232 0935
51	0.96171 3920	0.96430 8537	0.96692 1955	0.96955 1180	0.97219 3058	0.97484 4273
52	0.98352 0687	0.98629 6139	0.98909 3580	0.99190 9871	0.99474 1696	0.99758 5559
53	1.00549 8582	1.00846 4382	1.01145 5742	1.01446 9383	1.01750 1833	1.02054 9415
54	1.02765 0048	1.03081 6048	1.03401 1594	1.03723 3279	1.04047 7478	1.04374 0340
55	1.04997 7352	1.05335 3743	1.05676 4120	1.06020 4955	1.06367 2482	1.06716 2684
56	1.07248 2572	1.07607 9883	1.07971 6110	1.08338 7619	1.08709 0514	1.09082 0624
57	1.09516 7574	1.09899 6670	1.10287 0141	1.10678 4265	1.11073 5032	1.11471 8131
58	1.11803 3995	1.12210 6071	1.12622 8552	1.13039 7648	1.13460 9256	1.13885 8944
59	1.14108 3221	1.14540 9794	1.14979 3417	1.15423 0255	1.15871 6137	1.16324 6534
60	1.16431 6365	1.16890 9267	1.17356 6520	1.17828 4276	1.18305 8326	1.18788 4071
61	1.18773 4247	1.19260 5610	1.19754 9327	1.20256 1574	1.20763 8136	1.21277 4382
62	1.21133 7370	1.21649 9610	1.22174 2958	1.22706 3650	1.23245 7509	1.23791 9914
63	1.23512 5898	1.24059 1697	1.24614 8153	1.25179 1611	1.25751 7978	1.26332 2690
64	1.25909 9630	1.26488 1915	1.27076 5248	1.27674 6135	1.28282 0623	1.28898 4263
65	1.28325 7979	1.28936 9894	1.29559 4137	1.30192 7435	1.30836 6036	1.31490 5671
66	1.30759 9950	1.31405 4826	1.32063 4246	1.32733 5222	1.33415 4275	1.34108 7389
67	1.33212 4115	1.33893 5437	1.34588 4497	1.35296 8668	1.36018 4821	1.36752 9278
68	1.35682 8590	1.36400 9959	1.37134 3282	1.37882 6372	1.38645 6539	1.39423 0535
69	1.38171 1018	1.38927 6108	1.39700 8428	1.40490 6322	1.41296 7632	1.42118 9645
70	1.40676 8546	1.41473 1057	1.42287 7172	1.43120 5859	1.43971 5600	1.44840 4330
71	1.43199 7810	1.44037 1418	1.44894 6131	1.45772 1647	1.46669 7201	1.47587 1498
72	1.45739 4916	1.46619 3217	1.47521 1280	1.48444 9641	1.49390 8412	1.50358 7203
73	1.48295 5431	1.49219 1883	1.50166 7929	1.51138 5062	1.52134 4397	1.53154 6596
74	1.50867 4369	1.51836 2230	1.52831 0704	1.53852 2368	1.54899 9475	1.55974 3891
75	1.53454 6188	1.54469 8448	1.55513 3537	1.56585 5239	1.57686 7094	1.58817 2330
76	1.56056 4783	1.57119 4099	1.58212 9651	1.59337 6565	1.60493 9812	1.61682 4156
77	1.58672 3492	1.59784 2114	1.60929 1561	1.62107 8432	1.63320 9287	1.64569 0594
78	1.61301 5096	1.62463 4799	1.63661 1073	1.64895 2129	1.66166 6268	1.67476 1843
79	1.63943 1834	1.65156 3842	1.66407 9293	1.67698 8148	1.69030 0603	1.70402 7074
80	1.66596 5416	1.67862 0331	1.69168 6645	1.70517 6202	1.71910 1249	1.73347 4440
81	1.69260 7042	1.70579 4772	1.71942 2889	1.73350 5247	1.74805 6297	1.76309 1101
82	1.71934 7430	1.73307 7121	1.74727 7153	1.76196 3514	1.77715 3003	1.79286 3259
83	1.74617 6844	1.76045 6815	1.77523 7969	1.79053 8550	1.80637 7835	1.82277 6202
84	1.77308 5132	1.78792 2810	1.80329 3319	1.81921 7264	1.83571 6527	1.85281 4370
85	1.80006 1764	1.81546 3629	1.83143 0683	1.84798 5987	1.86515 4143	1.88296 1423
86	1.82709 5878	1.84306 7413	1.85963 7099	1.87683 0539	1.89467 5150	1.91320 0331
87	1.85417 6328	1.87072 1974	1.88789 9227	1.90573 6301	1.92426 3507	1.94351 3466
88	1.88129 1737	1.89841 4855	1.91620 3415	1.93468 2922	1.95390 2753	1.97388 2711
89	1.90843 0550	1.92613 3399	1.94453 5777	1.96367 1257	1.98357 6105	2.00428 9575
90	1.93558 1096	1.95386 4809	1.97288 2266	1.99266 9756	2.01326 6565	2.03471 5312

TABLE IX.

φ.	E (55°).	E (56°).	E (57°).	E (58°).	E (59°).	E (60°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2698	0.01745 2684	0.01745 2669	0.01745 2655	0.01745 2641	0.01745 2628
2	0.03490 1829	0.03490 1714	0.03490 1599	0.03490 1487	0.03490 1377	0.03490 1269
3	0.05234 3828	0.05234 3439	0.05234 3054	0.05234 2675	0.05234 2303	0.05234 1938
4	0.06977 5135	0.06977 4212	0.06977 3300	0.06977 2403	0.06977 1521	0.06977 0655
5	0.08719 2196	0.08719 0392	0.08718 8612	0.08718 6860	0.08718 5137	0.08718 3446
6	0.10459 1466	0.10458 8348	0.10458 5272	0.10458 2244	0.10457 9267	0.10457 6345
7	0.12196 9409	0.12196 4458	0.12195 9574	0.12195 4765	0.12195 0038	0.12194 5397
8	0.13932 2505	0.13931 5114	0.13930 7823	0.13930 0645	0.13929 3588	0.13928 6660
9	0.15664 7247	0.15663 6723	0.15662 6342	0.15661 6121	0.15660 6072	0.15659 6207
10	0.17394 0147	0.17392 5710	0.17391 1469	0.17389 7448	0.17388 3662	0.17387 0127
11	0.19119 7735	0.19117 8518	0.19115 9563	0.19114 0899	0.19112 2548	0.19110 4530
12	0.20841 6563	0.20839 1613	0.20836 7004	0.20834 2771	0.20831 8943	0.20829 5547
13	0.22559 3209	0.22556 1485	0.22553 0196	0.22549 9382	0.22546 9083	0.22543 9332
14	0.24272 4274	0.24268 4651	0.24264 5569	0.24260 7079	0.24256 9230	0.24253 2065
15	0.25980 6391	0.25975 7654	0.25970 9582	0.25966 2236	0.25961 5675	0.25956 9955
16	0.27683 6222	0.27677 7071	0.27671 8725	0.27666 1258	0.27660 4740	0.27654 9241
17	0.29381 0462	0.29373 9510	0.29366 9521	0.29360 0582	0.29353 2779	0.29346 6194
18	0.31072 5842	0.31064 1616	0.31055 8528	0.31047 6682	0.31039 6180	0.31031 7121
19	0.32757 9131	0.32748 0070	0.32738 2341	0.32728 6069	0.32719 1371	0.32709 8366
20	0.34436 7138	0.34425 1594	0.34413 7598	0.34402 5293	0.34391 4819	0.34380 6313
21	0.36108 6715	0.36095 2954	0.36082 0977	0.36069 0949	0.36056 3032	0.36043 7387
22	0.37773 4758	0.37758 0959	0.37742 9201	0.37727 9674	0.37713 2565	0.37698 8059
23	0.39430 8212	0.39413 2467	0.39395 9042	0.39378 8154	0.39362 0018	0.39345 4846
24	0.41080 4071	0.41060 4386	0.41040 7321	0.41021 3125	0.41002 2043	0.40983 4315
25	0.42721 9383	0.42699 3676	0.42677 0913	0.42655 1376	0.42633 5342	0.42612 3084
26	0.44355 1249	0.44329 7352	0.44304 6746	0.44279 9750	0.44255 6674	0.44231 7827
27	0.45979 6830	0.45951 2488	0.45923 1808	0.45895 5147	0.45868 2853	0.45841 5275
28	0.47595 3345	0.47563 6218	0.47532 3146	0.47501 4529	0.47471 0757	0.47441 2219
29	0.49201 8079	0.49166 5739	0.49131 7871	0.49097 4921	0.49063 7324	0.49030 5512
30	0.50798 8381	0.50759 8314	0.50721 3161	0.50683 3414	0.50645 9558	0.50609 2073
31	0.52386 1670	0.52343 1276	0.52300 6261	0.52258 7167	0.52217 4533	0.52176 8890
32	0.53963 5435	0.53916 2029	0.53869 4489	0.53823 3412	0.53777 9395	0.53733 3022
33	0.55530 7242	0.55478 8052	0.55427 5238	0.55376 9456	0.55327 1363	0.55278 1602
34	0.57087 4733	0.57030 6902	0.56974 5979	0.56919 2683	0.56864 7735	0.56811 1841
35	0.58633 5631	0.58571 6217	0.58510 4264	0.58450 0559	0.58390 5890	0.58332 1032
36	0.60168 7743	0.60101 3719	0.60034 7729	0.59969 0633	0.59904 3291	0.59840 6550
37	0.61692 8962	0.61619 7218	0.61547 4099	0.61476 0544	0.61405 7489	0.61336 5858
38	0.63205 7273	0.63126 4613	0.63048 1189	0.62970 8021	0.62894 6126	0.62819 6511
39	0.64707 0754	0.64621 3899	0.64536 6908	0.64453 0887	0.64370 6940	0.64289 6158
40	0.66196 7580	0.66104 3168	0.66012 9265	0.65922 7065	0.65833 7765	0.65746 2547
41	0.67674 6025	0.67575 0614	0.67476 6369	0.67379 4580	0.67283 6539	0.67189 3527
42	0.69140 4470	0.69033 4536	0.68927 6435	0.68823 1561	0.68720 1306	0.68618 7054
43	0.70594 1403	0.70479 3340	0.70365 7789	0.70253 6250	0.70143 0221	0.70034 1194
44	0.72035 5423	0.71912 5547	0.71790 8869	0.71670 7001	0.71552 1552	0.71435 4128
45	0.73464 5245	0.73332 9794	0.73202 8232	0.73074 2287	0.72947 3687	0.72822 4156

TABLE IX.

ϕ .	F(55°).	F(56°).	F(57°).	F(58°).	F(59°).	F(60°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 3887	0.01745 3902	0.01745 3916	0.01745 3930	0.01745 3944	0.01745 3957
2	0.03491 1342	0.03491 1458	0.03491 1572	0.03491 1684	0.03491 1794	0.03491 1902
3	0.05237 5936	0.05237 6326	0.05237 6711	0.05237 7090	0.05237 7462	0.05237 7827
4	0.06985 1243	0.06985 2168	0.06985 3081	0.06985 3980	0.06985 4864	0.06985 5731
5	0.08734 0843	0.08734 2653	0.08734 4438	0.08734 6196	0.08734 7925	0.08734 9521
6	0.10484 8328	0.10485 1460	0.10485 4549	0.10485 7592	0.10486 0583	0.10486 3519
7	0.12237 7299	0.12238 2281	0.12238 7195	0.12239 2034	0.12239 6793	0.12240 1464
8	0.13993 1370	0.13993 8821	0.13994 6170	0.13995 3408	0.13996 0526	0.13996 7514
9	0.15751 4171	0.15752 4803	0.15753 5290	0.15754 5619	0.15755 5777	0.15756 5752
10	0.17512 9350	0.17514 3969	0.17515 8390	0.17517 2595	0.17518 6566	0.17520 0286
11	0.19278 0573	0.19280 0083	0.19281 9330	0.19283 8290	0.19285 6940	0.19287 5256
12	0.21047 1531	0.21049 6933	0.21052 1996	0.21054 6687	0.21057 0978	0.21059 4836
13	0.22820 5936	0.22823 8334	0.22827 0303	0.22830 1802	0.22833 2794	0.22836 3236
14	0.24598 7528	0.24602 8130	0.24606 8199	0.24610 7685	0.24614 6538	0.24618 4708
15	0.26382 0074	0.26387 0196	0.26391 9666	0.26396 8422	0.26401 6403	0.26406 3548
16	0.28170 7373	0.28176 8440	0.28182 8722	0.28188 8143	0.28194 6626	0.28200 4099
17	0.29965 3255	0.29972 6808	0.29979 9426	0.29987 1018	0.29994 1491	0.30001 0757
18	0.31766 1585	0.31774 9282	0.31783 5880	0.31792 1266	0.31800 5333	0.31808 7972
19	0.33573 6264	0.33583 9886	0.33594 2228	0.33604 3155	0.33614 2540	0.33624 0253
20	0.35388 1230	0.35400 2686	0.35412 2664	0.35424 1005	0.35435 7559	0.35447 2172
21	0.37210 0463	0.37224 1793	0.37238 1430	0.37251 9190	0.37265 4896	0.37278 8366
22	0.39039 7983	0.39056 1365	0.39072 2823	0.39088 2144	0.39103 9121	0.39119 3543
23	0.40877 7855	0.40896 5608	0.40915 1192	0.40933 4360	0.40951 4872	0.40969 2483
24	0.42724 4186	0.42745 8780	0.42767 0945	0.42788 0395	0.42808 6856	0.42829 0044
25	0.44580 1132	0.44604 5192	0.44628 6548	0.44652 4873	0.44675 9854	0.44699 1165
26	0.46445 2896	0.46472 9208	0.46500 2529	0.46527 2487	0.46553 8723	0.46580 0868
27	0.48320 3728	0.48351 5249	0.48382 3479	0.48412 7999	0.48442 8400	0.48472 4264
28	0.50205 7931	0.50240 7792	0.50275 4055	0.50309 6248	0.50343 3905	0.50376 6555
29	0.52101 9856	0.52141 1374	0.52179 8982	0.52218 2147	0.52256 0342	0.52293 3038
30	0.54009 3905	0.54053 0592	0.54096 3052	0.54139 0687	0.54181 2904	0.54222 9110
31	0.55928 4534	0.55977 0103	0.56025 1128	0.56072 6941	0.56119 6876	0.56166 0267
32	0.57859 6248	0.57913 4625	0.57966 8145	0.58019 6062	0.58071 7634	0.58123 2113
33	0.59803 3606	0.59862 8938	0.59921 9109	0.59980 3288	0.60038 0649	0.60095 0357
34	0.61760 1216	0.61825 7883	0.61890 9099	0.61955 3941	0.62019 1492	0.62082 0821
35	0.63730 3736	0.63802 6363	0.63874 3267	0.63945 3430	0.64015 5831	0.64084 9439
36	0.65714 5874	0.65793 9340	0.65872 6839	0.65950 7247	0.66027 9435	0.66104 2260
37	0.67713 2384	0.67800 1836	0.67886 5112	0.67972 0974	0.68056 8175	0.68140 5451
38	0.69726 8066	0.69821 8931	0.69916 3455	0.70010 0277	0.70102 8023	0.70194 5299
39	0.71755 7759	0.71859 5759	0.71962 7306	0.72065 0907	0.72166 5053	0.72266 8209
40	0.73800 6344	0.73913 7507	0.74026 2170	0.74137 8700	0.74248 5441	0.74358 0707
41	0.75861 8733	0.75984 9409	0.76107 3617	0.76228 9572	0.76349 5462	0.76468 9439
42	0.77939 9869	0.78073 6745	0.78206 7276	0.78338 9518	0.78470 1490	0.78600 1170
43	0.80035 4716	0.80180 4832	0.80324 8834	0.80468 4607	0.80610 9993	0.80752 2783
44	0.82148 8258	0.82305 9020	0.82462 4025	0.82618 0978	0.82772 7530	0.82926 1273
45	0.84280 5484	0.84450 4684	0.84619 8628	0.84788 4833	0.84956 0746	0.85122 3748

TABLE IX.

φ.	E (55°).	E (56°).	E (57°).	E (58°).	E (59°).	E (60°).
45°	0.73464 5245	0.73332 9794	0.73202 8232	0.73074 2287	0.72947 3687	0.72822 4156
46	0.74880 9703	0.74740 4838	0.74601 4555	0.74464 0704	0.74328 5137	0.74194 9702
47	0.76284 7755	0.76134 9563	0.75986 6644	0.75840 0976	0.75695 4542	0.75552 9318
48	0.77675 8487	0.77516 2980	0.77358 3434	0.77202 1959	0.77048 0673	0.76896 1691
49	0.79054 1116	0.78884 4236	0.78716 3995	0.78550 2644	0.78386 2441	0.78224 5645
50	0.80419 4996	0.80239 2615	0.80060 7540	0.79884 2166	0.79709 8899	0.79538 0148
51	0.81771 9623	0.81580 7545	0.81391 3424	0.81203 9805	0.81018 9249	0.80836 4319
52	0.83111 4636	0.82908 8601	0.82708 1154	0.82509 4996	0.82313 2846	0.82119 7431
53	0.84437 9823	0.84223 5511	0.84011 0392	0.83800 7329	0.83592 9207	0.83387 8920
54	0.85751 5129	0.85524 8161	0.85300 0961	0.85077 6559	0.84857 8012	0.84640 8389
55	0.87052 0657	0.86812 6599	0.86575 2848	0.86340 2609	0.86107 9114	0.85878 5614
56	0.88339 6672	0.88087 1040	0.87836 6214	0.87588 5577	0.87343 2543	0.87101 0552
57	0.89614 3609	0.89348 1873	0.89084 1396	0.88822 5742	0.88563 8515	0.88308 3348
58	0.90876 2075	0.90595 9664	0.90317 8912	0.90042 3570	0.89769 7436	0.89500 4342
59	0.92125 2856	0.91830 5163	0.91537 9470	0.91247 9719	0.90960 9909	0.90677 4074
60	0.93361 6919	0.93051 9307	0.92744 3970	0.92439 5048	0.92137 6741	0.91839 3294
61	0.94585 5419	0.94260 3227	0.93937 3514	0.93617 0620	0.93299 8951	0.92986 2699
62	0.95796 9701	0.95455 8252	0.95116 9407	0.94780 7709	0.94447 7776	0.94118 4288
63	0.96996 1305	0.96638 5913	0.96283 3165	0.95930 7808	0.95581 4678	0.95235 8675
64	0.98183 1973	0.97808 7950	0.97436 6519	0.97067 2635	0.96701 1349	0.96338 7791
65	0.99358 3649	0.98966 6315	0.98577 1423	0.98190 4135	0.97806 9722	0.97427 3544
66	1.00521 8482	1.00112 3176	0.99705 0055	0.99300 4490	0.98899 1974	0.98501 8097
67	1.01673 8834	1.01246 0921	1.00820 4824	1.00397 6124	0.99978 0534	0.99562 3876
68	1.02814 7278	1.02368 2162	1.01923 8374	1.01482 1704	1.01043 8086	1.00609 3575
69	1.03944 6603	1.03478 9736	1.03015 3586	1.02554 4150	1.02096 7579	1.01643 0162
70	1.05063 9811	1.04578 6710	1.04095 3584	1.03614 6634	1.03137 2230	1.02663 6888
71	1.06173 0126	1.05667 6381	1.05164 1734	1.04663 2588	1.04165 5526	1.03671 7291
72	1.07272 0986	1.06746 2276	1.06222 1648	1.05700 5702	1.05182 1231	1.04667 5200
73	1.08361 6047	1.07814 8154	1.07269 7183	1.06726 9928	1.06187 3385	1.05651 4739
74	1.09441 9182	1.08873 8004	1.08307 2443	1.07742 9480	1.07181 6310	1.06624 0328
75	1.10513 4475	1.09923 6042	1.09335 1774	1.08748 8832	1.08165 4604	1.07585 6688
76	1.11576 6220	1.10964 6710	1.10353 9765	1.09745 2719	1.09139 3145	1.08536 8835
77	1.12631 8916	1.11997 4669	1.11364 1241	1.10732 6129	1.10103 7084	1.09478 2083
78	1.13679 7262	1.13022 4797	1.12366 1258	1.11711 4301	1.11059 1843	1.10410 2037
79	1.14720 6149	1.14040 2178	1.13360 5099	1.12682 2718	1.12006 3106	1.11333 4586
80	1.15755 0651	1.15051 2096	1.14347 8262	1.13645 7095	1.12945 6813	1.12248 5896
81	1.16783 6016	1.16056 0023	1.15328 6450	1.14602 3373	1.13877 9148	1.13156 2399
82	1.17806 7658	1.17055 1611	1.16303 5560	1.15552 7703	1.14803 6524	1.14057 0780
83	1.18825 1140	1.18049 2676	1.17273 1670	1.16497 6435	1.15723 5571	1.14951 7960
84	1.19839 2164	1.19038 9185	1.18238 1024	1.17437 6098	1.16638 3118	1.15841 1077
85	1.20849 6558	1.20024 7242	1.19199 0013	1.18373 3385	1.17548 6171	1.16725 7469
86	1.21857 0255	1.21007 3068	1.20156 5158	1.19305 5132	1.18455 1896	1.17606 4646
87	1.22861 9283	1.21987 2986	1.21111 3092	1.20234 8298	1.19558 7593	1.18484 0266
88	1.23864 9742	1.22965 3399	1.22064 0538	1.21161 9938	1.20260 0671	1.19359 2111
89	1.24866 7791	1.23942 0774	1.23015 4287	1.22087 7185	1.21159 8622	1.20232 8053
90	1.25867 9625	1.24918 1621	1.23966 1175	1.23012 7224	1.22058 8996	1.21105 6028

ϕ .	F (55°).	F (56°).	F (57°).	F (58°).	F (59°).	F (60°).
45°	0.84280 5484	0.84450 4684	0.84619 8628	0.84788 4833	0.84956 0746	0.85122 3748
46	0.86431 1385	0.86614 7215	0.86797 8457	0.86980 2429	0.87161 6365	0.87341 7420
47	0.88601 0941	0.88799 2010	0.88996 9352	0.89194 0073	0.89390 1182	0.89584 9598
48	0.90790 9110	0.91004 4463	0.91217 7166	0.91430 4106	0.91642 2056	0.91852 7683
49	0.93001 0817	0.93230 9948	0.93460 7755	0.93690 0894	0.93918 5894	0.94145 9155
50	0.95232 0935	0.95479 3809	0.95726 6963	0.95973 6816	0.96219 9641	0.96465 1561
51	0.97484 4273	0.97750 1340	0.98016 0605	0.98281 8244	0.98547 0264	0.98811 2500
52	0.99758 5559	1.00043 7770	1.00329 4449	1.00615 1526	1.00900 4733	1.01184 9606
53	1.02054 9415	1.02360 8238	1.02667 4196	1.02974 2966	1.03281 0001	1.03587 0528
54	1.04374 0340	1.04701 7776	1.05030 5454	1.05359 8799	1.05689 2978	1.06018 2905
55	1.06716 2684	1.07067 1280	1.07419 3715	1.07772 5163	1.08126 0507	1.08479 4340
56	1.09082 0624	1.09457 3483	1.09834 4324	1.10212 8073	1.10591 9331	1.10971 2368
57	1.11471 8131	1.11872 8926	1.12276 2448	1.12681 3384	1.13087 6058	1.13494 4421
58	1.13885 8944	1.14314 1924	1.14745 3039	1.15178 6753	1.15613 7123	1.16049 7788
59	1.16324 6534	1.16781 6530	1.17242 0799	1.17705 3602	1.18170 8744	1.18637 9566
60	1.18788 4071	1.19275 6495	1.19767 0134	1.20261 9068	1.20759 6875	1.21253 6614
61	1.21277 4382	1.21796 5230	1.22320 5112	1.22848 7958	1.23380 7150	1.23915 5493
62	1.23791 9914	1.24344 5758	1.24902 9410	1.25466 4691	1.26034 4826	1.26606 2404
63	1.26332 2690	1.26920 0666	1.27514 6263	1.28115 3242	1.28721 4721	1.29332 3118
64	1.28898 4263	1.29523 2057	1.30155 8407	1.30795 7080	1.31442 1141	1.32094 2900
65	1.31490 5671	1.32154 1494	1.32826 8022	1.33507 9097	1.34195 7808	1.34892 6427
66	1.34108 7389	1.34812 9947	1.35527 6665	1.36252 1542	1.36985 7778	1.37727 7697
67	1.36752 9278	1.37499 7737	1.38258 5208	1.39028 5944	1.39809 3359	1.40599 9933
68	1.39423 0535	1.40214 4476	1.41019 3768	1.41837 3033	1.42667 6017	1.43509 5481
69	1.42118 9645	1.42956 9006	1.43810 1638	1.44678 2660	1.45560 6287	1.46456 5705
70	1.44840 4330	1.45726 9345	1.46630 7220	1.47551 3717	1.48488 3673	1.49441 0869
71	1.47587 1498	1.48524 2624	1.49480 7953	1.50456 4051	1.51450 6553	1.52463 0026
72	1.50358 7203	1.51348 5035	1.52360 0246	1.53393 0385	1.54447 2081	1.55522 0900
73	1.53154 6596	1.54199 1776	1.55267 9413	1.56360 8236	1.57477 6086	1.58617 9767
74	1.55974 3891	1.57075 7002	1.58203 9612	1.59359 1842	1.60541 2983	1.61750 1341
75	1.58817 2330	1.59977 3783	1.61167 3790	1.62387 4091	1.63637 5684	1.64917 8666
76	1.61682 4156	1.62903 4069	1.64157 3636	1.65444 6460	1.66765 5520	1.68120 3013
77	1.64569 0594	1.65852 8661	1.67172 9545	1.68529 8964	1.69924 2171	1.71356 3794
78	1.67476 1843	1.68824 7197	1.70213 0589	1.71642 0119	1.73112 3614	1.74624 8486
79	1.70402 7074	1.71817 8142	1.73276 4506	1.74779 6917	1.76328 6088	1.77924 2576
80	1.73347 4440	1.74830 8809	1.76361 7702	1.77941 4821	1.79571 4075	1.81252 9534
81	1.76309 1101	1.77862 5332	1.79467 5268	1.81125 7780	1.82839 0308	1.84609 0807
82	1.79286 3259	1.80911 2794	1.82592 1018	1.84330 8264	1.86129 5805	1.87990 5844
83	1.82277 6202	1.83975 5186	1.85733 7543	1.87554 7321	1.89440 9923	1.91395 2156
84	1.85281 4370	1.87053 5520	1.88890 6282	1.90795 4655	1.92771 0450	1.94820 5412
85	1.88296 1423	1.90143 5905	1.92060 7620	1.94050 8733	1.96117 3720	1.98263 9566
86	1.91320 0331	1.93243 7639	1.95242 0994	1.97318 6912	1.99477 4757	2.01722 7022
87	1.94351 3466	1.96352 1325	1.98432 5023	2.00596 5584	2.02848 7446	2.05193 8833
88	1.97388 2711	1.99466 6992	2.01629 7653	2.03882 0346	2.06228 4728	2.08674 4930
89	2.00428 9575	2.02585 4227	2.04831 6309	2.07172 6181	2.09613 8818	2.12161 4377
90	2.03471 5312	2.05706 2323	2.08035 8167	2.10465 7658	2.13002 1438	2.15651 5648

TABLE IX.

ϕ .	E(60°).	E(61°).	E(62°).	E(63°).	E(64°).	E(65°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2628	0.01745 2615	0.01745 2602	0.01745 2589	0.01745 2577	0.01745 2565
2	0.03490 1269	0.03490 1163	0.03490 1059	0.03490 0958	0.03490 0859	0.03490 0763
3	0.05234 1938	0.05234 1580	0.05234 1230	0.05234 0888	0.05234 0555	0.05234 0230
4	0.06977 0655	0.06976 9807	0.06976 8977	0.06976 8166	0.06976 7376	0.06976 6606
5	0.08718 3446	0.08718 1789	0.08718 0168	0.08717 8584	0.08717 7039	0.08717 5536
6	0.10457 6345	0.10457 3481	0.10457 0679	0.10456 7942	0.10456 5272	0.10456 2675
7	0.12194 5397	0.12194 0849	0.12193 6398	0.12193 2051	0.12192 7811	0.12192 3686
8	0.13928 6660	0.13927 9870	0.13927 3225	0.13926 6735	0.13926 0405	0.13925 4247
9	0.15659 6207	0.15658 6537	0.15657 7074	0.15656 7832	0.15655 8818	0.15655 0048
10	0.17387 0127	0.17385 6860	0.17384 3878	0.17383 1197	0.17381 8830	0.17380 6796
11	0.19110 4530	0.19108 6869	0.19106 9586	0.19105 2703	0.19103 6239	0.19102 0217
12	0.20829 5547	0.20827 2614	0.20825 0170	0.20822 8246	0.20820 6866	0.20818 6058
13	0.22543 9332	0.22541 0168	0.22538 1626	0.22535 3744	0.22532 6552	0.22530 0088
14	0.24253 2065	0.24249 5632	0.24245 9974	0.24242 5140	0.24239 1166	0.24235 8101
15	0.25956 9955	0.25952 5133	0.25948 1263	0.25943 8405	0.25939 6603	0.25935 5918
16	0.27654 9241	0.27649 4829	0.27644 1571	0.27638 9539	0.27633 8788	0.27628 9390
17	0.29346 6194	0.29340 0911	0.29333 7010	0.29327 4575	0.29321 3677	0.29315 4398
18	0.31031 7121	0.31023 9604	0.31016 3724	0.31008 9580	0.31001 7259	0.30994 6857
19	0.32709 8366	0.32700 7170	0.32691 7895	0.32683 0658	0.32674 5562	0.32666 2719
20	0.34380 6313	0.34369 9911	0.34359 5745	0.34349 3951	0.34339 4650	0.34329 7973
21	0.36043 7387	0.36031 4171	0.36019 3537	0.36007 5642	0.35996 0629	0.35984 8648
22	0.37698 8059	0.37684 6337	0.37670 7577	0.37657 1958	0.37643 9647	0.37631 0816
23	0.39345 4846	0.39329 2844	0.39313 4219	0.39297 9173	0.39282 7899	0.39268 0595
24	0.40983 4315	0.40965 0176	0.40946 9864	0.40929 3607	0.40912 1627	0.40895 4149
25	0.42612 3084	0.42591 4869	0.42571 0965	0.42551 1633	0.42531 7124	0.42512 7692
26	0.44231 7827	0.44208 3512	0.44185 4030	0.44162 9676	0.44141 0735	0.44119 7492
27	0.45841 5275	0.45815 2752	0.45789 5622	0.45764 4218	0.45739 8860	0.45715 9869
28	0.47441 2219	0.47411 9295	0.47383 2365	0.47355 1800	0.47327 7960	0.47301 1204
29	0.49030 5512	0.48997 9911	0.48966 0943	0.48934 9023	0.48904 4554	0.48874 7935
30	0.50609 2073	0.50573 1433	0.50537 8106	0.50503 2553	0.50469 5225	0.50436 6564
31	0.52176 8890	0.52137 0763	0.52098 0670	0.52059 9123	0.52022 6623	0.51986 3659
32	0.53733 3022	0.53689 4874	0.53646 5524	0.53604 5537	0.53563 5467	0.53523 5856
33	0.55278 1602	0.55230 0814	0.55182 9629	0.55136 8670	0.55091 8548	0.55047 9863
34	0.56811 1841	0.56758 5706	0.56707 0022	0.56656 5474	0.56607 2733	0.56559 2461
35	0.58332 1032	0.58274 6756	0.58218 3821	0.58163 2980	0.58109 4967	0.58057 0510
36	0.59840 6550	0.59778 1252	0.59716 8228	0.59656 8301	0.59598 2276	0.59541 0950
37	0.61336 5858	0.61268 6569	0.61202 0530	0.61136 8637	0.61073 1772	0.61011 0805
38	0.62819 6511	0.62746 0174	0.62673 8104	0.62603 1277	0.62534 0655	0.62466 7187
39	0.64289 6158	0.64209 9628	0.64131 8422	0.64055 3603	0.63980 6218	0.63907 7299
40	0.65746 2547	0.65660 2588	0.65575 9053	0.65493 3094	0.65412 5849	0.65333 8440
41	0.67189 3527	0.67096 6816	0.67005 7667	0.66916 7329	0.66829 7037	0.66744 8006
42	0.68618 7054	0.68519 0177	0.68421 2040	0.68325 3994	0.68231 7374	0.68140 3497
43	0.70034 1194	0.69927 0649	0.69822 0058	0.69719 0881	0.69618 4560	0.69520 2519
44	0.71435 4128	0.71320 6322	0.71207 9721	0.71097 5898	0.70989 6409	0.70884 2792
45	0.72822 4156	0.72699 5407	0.72578 9147	0.72460 7070	0.72345 0851	0.72232 2150

TABLE IX.

ϕ .	F(60°).	F(61°).	F(62°).	F(63°).	F(64°).	F(65°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 3957	0.01745 3970	0.01745 3983	0.01745 3996	0.01745 4008	0.01745 4020
2	0.03491 1902	0.03491 2008	0.03491 2112	0.03491 2214	0.03491 2312	0.03491 2409
3	0.05237 7827	0.05237 8186	0.05237 8536	0.05237 8879	0.05237 9212	0.05237 9538
4	0.06985 5731	0.06985 6581	0.06985 7413	0.06985 8226	0.06985 9018	0.06985 9790
5	0.08734 9621	0.08735 1284	0.08735 2910	0.08735 4501	0.08735 6050	0.08735 7559
6	0.10486 3519	0.10486 6398	0.10486 9213	0.10487 1966	0.10487 4648	0.10487 7260
7	0.12240 1464	0.12240 6044	0.12241 0524	0.12241 4904	0.12241 9172	0.12242 3328
8	0.13996 7514	0.13997 4366	0.13998 1069	0.13998 7621	0.13999 4008	0.14000 0227
9	0.15756 5752	0.15757 5531	0.15758 5101	0.15759 4454	0.15760 3573	0.15761 2452
10	0.17520 0286	0.17521 3738	0.17522 6904	0.17523 9772	0.17525 2319	0.17526 4536
11	0.19287 5256	0.19289 3217	0.19291 0797	0.19292 7980	0.19294 4736	0.19296 1053
12	0.21059 4836	0.21061 8233	0.21064 1137	0.21066 3525	0.21068 5360	0.21070 6623
13	0.22836 3236	0.22839 3093	0.22842 2325	0.22845 0900	0.22847 8774	0.22850 5918
14	0.24618 4708	0.24622 2148	0.24625 8809	0.24629 4649	0.24632 9614	0.24636 3667
15	0.26406 3548	0.26410 9796	0.26415 5087	0.26419 9369	0.26424 2576	0.26428 4660
16	0.28200 4099	0.28206 0486	0.28211 5714	0.28216 9717	0.28222 2418	0.28227 3754
17	0.30001 0757	0.30007 8723	0.30014 5303	0.30021 0414	0.30027 3965	0.30033 5878
18	0.31808 7972	0.31816 9073	0.31824 8533	0.31832 6250	0.31840 2117	0.31847 6039
19	0.33624 0253	0.33633 6164	0.33643 0150	0.33652 2088	0.33661 1852	0.33669 9328
20	0.35447 2172	0.35458 4692	0.35469 4973	0.35480 2869	0.35490 8231	0.35501 0924
21	0.37278 8366	0.37291 9425	0.37304 7899	0.37317 3617	0.37329 6404	0.37341 6102
22	0.39119 3543	0.39134 5206	0.39149 3906	0.39163 9444	0.39178 1617	0.39192 0237
23	0.40969 2483	0.40986 6958	0.41003 8060	0.41020 5557	0.41036 9214	0.41052 8813
24	0.42829 0044	0.42848 9689	0.42868 5517	0.42887 7260	0.42906 4648	0.42924 7425
25	0.44699 1165	0.44721 8495	0.44744 1530	0.44765 9962	0.44787 3481	0.44808 1790
26	0.46580 0868	0.46605 8564	0.46631 1453	0.46655 9181	0.46680 1395	0.46703 7752
27	0.48472 4264	0.48501 5181	0.48530 0744	0.48558 0550	0.48585 4195	0.48612 1288
28	0.50376 6555	0.50409 3732	0.50441 4973	0.50472 9822	0.50503 7818	0.50533 8516
29	0.52293 3038	0.52329 9707	0.52365 9825	0.52401 2875	0.52435 8336	0.52469 5701
30	0.54222 9110	0.54263 8707	0.54304 1105	0.54343 5721	0.54382 1965	0.54419 9264
31	0.56166 0267	0.56211 6445	0.56256 4744	0.56300 4507	0.56343 5071	0.56385 5788
32	0.58123 2113	0.58173 8751	0.58223 6801	0.58272 5525	0.58320 4177	0.58367 2027
33	0.60095 0357	0.60151 1576	0.60206 3471	0.60260 5213	0.60313 5968	0.60365 4914
34	0.62082 0821	0.62144 0997	0.62205 1087	0.62265 0166	0.62323 7300	0.62381 1566
35	0.64084 9439	0.64153 3217	0.64220 6128	0.64286 7138	0.64351 5205	0.64414 9296
36	0.66104 2260	0.66179 4572	0.66253 5218	0.66326 3047	0.66397 6898	0.66467 5618
37	0.68140 5451	0.68223 1531	0.68304 5135	0.68384 4983	0.68462 9785	0.68539 8257
38	0.70194 5299	0.70285 0701	0.70374 2812	0.70462 0212	0.70548 1469	0.70632 5156
39	0.72266 8209	0.72365 8827	0.72463 5341	0.72559 6179	0.72653 9755	0.72745 4483
40	0.74358 0707	0.74466 2795	0.74572 9976	0.74678 0515	0.74781 2656	0.74882 4642
41	0.76468 9439	0.76586 9631	0.76703 4136	0.76818 1040	0.76930 8402	0.77041 4278
42	0.78600 1170	0.78728 6506	0.78855 5407	0.78980 5765	0.79103 5441	0.79224 2286
43	0.80752 2783	0.80892 0729	0.81030 1541	0.81166 2898	0.81300 2447	0.81431 7816
44	0.82926 1273	0.83077 9752	0.83228 0457	0.83376 0843	0.83521 8322	0.83665 0281
45	0.85122 3748	0.85287 1161	0.85450 0242	0.85610 8202	0.85769 2201	0.85924 9361

TABLE IX.

ϕ .	E (60°).	E (61°).	E (62°).	E (63°).	E (64°).	E (65°).
45°	0.72822 4156	0.72699 5407	0.72578 9147	0.72460 7070	0.72345 0851	0.72232 2150
46	0.74194 9702	0.74063 6238	0.73934 6579	0.73808 2545	0.73684 5939	0.73563 8549
47	0.75552 9318	0.75412 7278	0.75275 0387	0.75140 0600	0.75007 9854	0.74879 0071
48	0.76896 1691	0.76746 7124	0.76599 9077	0.76455 9645	0.76315 0908	0.76177 4929
49	0.78224 5645	0.78065 4511	0.77909 1292	0.77755 8229	0.77605 7553	0.77459 1475
50	0.79538 0148	0.79368 8320	0.79202 5820	0.79039 5046	0.78879 8385	0.78723 8204
51	0.80836 4319	0.80656 7581	0.80480 1602	0.80306 8940	0.80137 2149	0.79971 3760
52	0.82119 7431	0.81929 1482	0.81741 7734	0.81557 8914	0.81377 7748	0.81201 6944
53	0.83387 8920	0.83185 9373	0.82987 3475	0.82792 4132	0.82601 4250	0.82414 6719
54	0.84640 8389	0.84427 0773	0.84216 8257	0.84010 3932	0.83808 0893	0.83610 2220
55	0.85878 5614	0.85652 5377	0.85430 1687	0.85211 7829	0.84997 7093	0.84788 2761
56	0.87101 0552	0.86862 3064	0.86627 3558	0.86396 5523	0.86170 2454	0.85948 7843
57	0.88308 3348	0.88056 3901	0.87808 3855	0.87564 6910	0.87325 6775	0.87091 7161
58	0.89500 4342	0.89234 8153	0.88973 2763	0.88716 2088	0.88464 0059	0.88217 0616
59	0.90677 4074	0.90397 6293	0.90122 0676	0.89851 1366	0.89585 2522	0.89324 8324
60	0.91839 3294	0.91544 9004	0.91254 8205	0.90969 5272	0.90689 4604	0.90415 0626
61	0.92986 2969	0.92676 7192	0.92371 6187	0.92071 4566	0.91776 6976	0.91487 8098
62	0.94118 4288	0.93793 1993	0.93472 5693	0.93157 0247	0.92847 0555	0.92543 1564
63	0.95235 8675	0.94894 4781	0.94557 8040	0.94226 3563	0.93900 6511	0.93581 2105
64	0.96338 7791	0.95980 7176	0.95627 4797	0.95279 6022	0.94937 6281	0.94602 1074
65	0.97427 3544	0.97052 1054	0.96681 7797	0.96316 9404	0.95958 1579	0.95606 0108
66	0.98501 8097	0.98108 8555	0.97720 9147	0.97338 5770	0.96962 4408	0.96593 1141
67	0.99562 3876	0.99151 2091	0.98745 1234	0.98344 7472	0.97950 7073	0.97563 6416
68	1.00609 3575	1.00179 4354	0.99754 6739	0.99335 7167	0.98922 2194	0.98517 8502
69	1.01643 0162	1.01193 8325	1.00749 8642	1.00311 7823	0.99880 2715	0.99456 0304
70	1.02663 6888	1.02194 7279	1.01731 0233	1.01273 2735	1.00822 1919	1.00378 5081
71	1.03671 7291	1.03182 4795	1.02698 5122	1.02220 5528	1.01749 3439	1.01285 6455
72	1.04667 5200	1.04157 4758	1.03652 7241	1.03154 0173	1.02662 1267	1.02177 8429
73	1.05651 4739	1.05120 1368	1.04594 0855	1.04074 0990	1.03560 9767	1.03055 5395
74	1.06624 0328	1.06070 9139	1.05523 0566	1.04981 2657	1.04446 3682	1.03919 2148
75	1.07585 6688	1.07010 2906	1.06440 1316	1.05876 0215	1.05318 8142	1.04769 3894
76	1.08536 8835	1.07938 7823	1.07345 8389	1.06758 9073	1.06178 8671	1.05606 6261
77	1.09478 2083	1.08856 9361	1.08240 7413	1.07630 5006	1.07027 1188	1.06431 5303
78	1.10410 2037	1.09765 3308	1.09125 4354	1.08491 4160	1.07864 2009	1.07244 7501
79	1.11333 4586	1.10664 5758	1.10000 5514	1.09342 3041	1.08690 7845	1.08046 9766
80	1.12248 5896	1.11555 3109	1.10866 7522	1.10183 8514	1.09507 5797	1.08838 9433
81	1.13156 2399	1.12438 2047	1.11724 7326	1.11016 7791	1.10315 3344	1.09621 4252
82	1.14057 0780	1.13313 9535	1.12575 2174	1.11841 8415	1.11114 8331	1.10395 2377
83	1.14951 7960	1.14183 2796	1.13418 9602	1.12659 8243	1.11906 8950	1.11161 2345
84	1.15841 1077	1.15046 9292	1.14256 7410	1.13471 5427	1.12692 3718	1.11920 3053
85	1.16725 7469	1.15905 6704	1.15089 3638	1.14277 8385	1.13472 1448	1.12673 3729
86	1.17606 4646	1.16760 2905	1.15917 6540	1.15079 5773	1.14247 1218	1.13421 3897
87	1.18484 0266	1.17611 5933	1.16742 4554	1.15877 6450	1.15018 2335	1.14165 3337
88	1.19359 2111	1.18460 3960	1.17564 6267	1.16672 9443	1.15786 4293	1.14906 2041
89	1.20232 8053	1.19307 5262	1.18385 0381	1.17466 3907	1.16552 6730	1.15645 0162
90	1.21105 6028	1.20153 8184	1.19204 5677	1.18258 9085	1.17317 9382	1.16382 7964

φ.	F (60°).	F (61°).	F (62°).	F (63°).	F (64°).	F (65°).
45°	0.85122 3748	0.85287 1161	0.85450 0242	0.85610 8202	0.85769 2201	0.85924 9361
46	0.87341 7420	0.87520 2678	0.87696 9147	0.87871 3776	0.88043 3451	0.88212 5011
47	0.89584 9598	0.89778 2151	0.89969 5582	0.90158 6560	0.90345 1676	0.90528 7461
48	0.91852 7683	0.92061 7551	0.92268 8115	0.92473 5744	0.92675 6713	0.92874 7220
49	0.94145 9155	0.94371 6960	0.94595 5460	0.94817 0705	0.95035 8631	0.95251 5076
50	0.96465 1561	0.96708 8560	0.96950 6471	0.97190 1002	0.97426 7726	0.97660 2097
51	0.98811 2500	0.99074 0623	0.99335 0129	0.99593 6364	0.99849 4516	1.00101 9625
52	1.01184 9606	1.01468 1489	1.01749 5526	1.02028 6680	1.02304 9727	1.02577 9688
53	1.03587 0528	1.03891 9552	1.04195 1849	1.04496 1980	1.04794 4284	1.05089 2894
54	1.06018 2905	1.06346 3234	1.06672 8358	1.06997 2417	1.07318 9291	1.07637 2614
55	1.08479 4340	1.08832 0959	1.09183 4359	1.09532 8243	1.09879 6010	1.10223 0767
56	1.10971 2368	1.11350 1120	1.11727 9174	1.12103 9779	1.12477 5834	1.12847 9892
57	1.13494 4421	1.13901 2046	1.14307 2104	1.14711 7381	1.15114 0254	1.15513 2701
58	1.16049 7788	1.16486 1958	1.16922 2390	1.17357 1397	1.17790 0822	1.18220 2042
59	1.18637 9566	1.19105 8924	1.19573 9164	1.20041 2122	1.20508 9098	1.20970 0852
60	1.21253 6614	1.21761 0805	1.22263 1392	1.22764 9739	1.23265 6599	1.23764 2104
61	1.23915 5493	1.24452 5194	1.24990 7813	1.25529 4256	1.26067 4732	1.26603 8745
62	1.26606 2404	1.27180 9350	1.27757 6869	1.28335 5431	1.28913 4716	1.29490 3602
63	1.29332 3118	1.29947 0122	1.30564 6622	1.31184 2687	1.31804 7497	1.32424 9318
64	1.32094 2900	1.32751 3866	1.33412 4667	1.34076 5019	1.34742 3643	1.35408 8229
65	1.34892 6427	1.35594 6356	1.36301 8031	1.37013 0882	1.37727 3232	1.38443 2245
66	1.37727 7697	1.38477 2680	1.39233 3063	1.39994 8073	1.40760 5719	1.41529 2712
67	1.40599 9933	1.41399 7136	1.42207 5313	1.43022 3598	1.43842 9791	1.44668 0252
68	1.43509 5481	1.44362 3115	1.45224 9404	1.46096 3524	1.46975 3203	1.47860 4585
69	1.46456 5705	1.47365 2976	1.48285 8886	1.49217 2820	1.50158 2599	1.51107 4325
70	1.49441 0869	1.50408 7916	1.51390 6090	1.52385 5182	1.53392 3317	1.54409 6762
71	1.52463 0026	1.53492 7835	1.54539 1966	1.55601 2853	1.56677 9171	1.57767 7616
72	1.55522 0900	1.56617 1197	1.57731 5921	1.58864 6425	1.60015 2229	1.61182 0772
73	1.58617 9767	1.59781 4886	1.60967 5648	1.62175 4638	1.63404 2570	1.64652 7998
74	1.61750 1341	1.62985 4070	1.64246 6954	1.65533 4175	1.66844 8036	1.68179 8648
75	1.64917 8666	1.66228 2060	1.67568 3594	1.68937 9452	1.70336 3982	1.71762 9353
76	1.68120 3013	1.69509 0187	1.70931 7110	1.72388 2420	1.73878 3019	1.75401 3710
77	1.71356 3794	1.72826 7683	1.74335 6681	1.75883 2372	1.77469 4776	1.79094 1976
78	1.74624 8486	1.76180 1585	1.77778 8991	1.79421 5769	1.81108 5672	1.82840 0773
79	1.77924 2576	1.79567 6653	1.81259 8121	1.83001 6094	1.84693 8718	1.86637 2827
80	1.81252 9534	1.82987 5324	1.84776 5474	1.86621 3738	1.88523 3354	1.90483 6739
81	1.84609 0807	1.86437 7690	1.88326 9731	1.90278 5930	1.92294 5340	1.94376 6816
82	1.87990 5844	1.89916 1517	1.91908 6854	1.93970 6716	1.96104 6700	1.98313 2981
83	1.91395 2156	1.93420 2299	1.95519 0138	1.97694 6997	1.99950 5742	2.02290 0744
84	1.94820 5412	1.96947 3359	1.99155 0312	2.01447 4633	2.03828 7153	2.06303 1293
85	1.98263 9566	2.00494 5993	2.02813 5698	2.05225 4612	2.07735 2186	2.10348 1685
86	2.01722 7022	2.04058 9656	2.06491 2421	2.09024 9294	2.11665 8927	2.14420 5151
87	2.05193 8833	2.07637 2192	2.10184 4679	2.12841 8719	2.15616 2660	2.18515 1512
88	2.08674 4930	2.11226 0105	2.13889 5060	2.16672 0984	2.19581 6309	2.22626 7708
89	2.12161 4377	2.14821 8861	2.17602 4904	2.20511 2675	2.23557 0959	2.26749 8425
90	2.15651 5648	2.18421 3217	2.21319 4695	2.24354 9342	2.27537 6430	2.30878 6798

TABLE IX.

397

ϕ	E(65°).	E(66°).	E(67°).	E(68°).	E(69°).	E(70°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2565	0.01745 2553	0.01745 2542	0.01745 2531	0.01745 2520	0.01745 2510
2	0.03490 0763	0.03490 0670	0.03490 0579	0.03490 0492	0.03490 0407	0.03490 0326
3	0.05234 0230	0.05233 9915	0.05233 9610	0.05233 9315	0.05233 9029	0.05233 8756
4	0.06976 6606	0.06976 5859	0.06976 5135	0.06976 4436	0.06976 3759	0.06976 3111
5	0.08717 5536	0.08717 4077	0.08717 2663	0.08717 1296	0.08716 9976	0.08716 8708
6	0.10456 2675	0.10456 0153	0.10455 7709	0.10455 5346	0.10455 3065	0.10455 0873
7	0.12192 3686	0.12191 9681	0.12191 5799	0.12191 2045	0.12190 8423	0.12190 4941
8	0.13925 4247	0.13924 8266	0.13924 2470	0.13923 6865	0.13923 1458	0.13922 6258
9	0.15655 0048	0.15654 1530	0.15653 3274	0.15652 5292	0.15651 7591	0.15651 0184
10	0.17380 6796	0.17379 5108	0.17378 3780	0.17377 2826	0.17376 2259	0.17375 2095
11	0.19102 0217	0.19100 4655	0.19098 9572	0.19097 4988	0.19096 0918	0.19094 7383
12	0.20818 6058	0.20816 5847	0.20814 6258	0.20812 7316	0.20810 9042	0.20809 1462
13	0.22530 0088	0.22527 4382	0.22524 9466	0.22522 5372	0.22520 2128	0.22517 9765
14	0.24235 8101	0.24232 5982	0.24229 4848	0.24226 4741	0.24223 5696	0.24220 7750
15	0.25935 5918	0.25931 6396	0.25927 8084	0.25924 1035	0.25920 5291	0.25917 0899
16	0.27628 9390	0.27624 1402	0.27619 4882	0.27614 9893	0.27610 6488	0.27606 4723
17	0.29315 4398	0.29309 6809	0.29304 0980	0.29298 6986	0.29293 4890	0.29288 4762
18	0.30994 6857	0.30987 8459	0.30981 2149	0.30974 8015	0.30968 6133	0.30962 6586
19	0.32666 2719	0.32658 2230	0.32650 4196	0.32642 8718	0.32635 5887	0.32628 5801
20	0.34329 7973	0.34320 4038	0.34311 2963	0.34302 4868	0.34293 9858	0.34285 8048
21	0.35984 8648	0.35973 9837	0.35963 4334	0.35953 2277	0.35943 3790	0.35933 9005
22	0.37631 0816	0.37618 5625	0.37606 4233	0.37594 6799	0.37583 3468	0.37572 4391
23	0.39268 0595	0.39253 7444	0.39239 8629	0.39226 4331	0.39213 4720	0.39200 9966
24	0.40895 4149	0.40879 1382	0.40863 3536	0.40848 0816	0.40833 3418	0.40819 1534
25	0.42512 7692	0.42494 3577	0.42476 5017	0.42459 2244	0.42442 5482	0.42426 4948
26	0.44119 7492	0.44099 0219	0.44078 9187	0.44059 4656	0.44040 6881	0.44022 6107
27	0.45715 9869	0.45692 7552	0.45670 2213	0.45648 4146	0.45627 3637	0.45607 0963
28	0.47301 1204	0.47275 1877	0.47250 0320	0.47225 6862	0.47202 1826	0.47179 5521
29	0.48874 7935	0.48845 9553	0.48817 9789	0.48790 9011	0.48764 7579	0.48739 5841
30	0.50436 6564	0.50404 7003	0.50373 6964	0.50343 6859	0.50314 7089	0.50286 8042
31	0.51986 3659	0.51951 0713	0.51916 8253	0.51883 6737	0.51851 6610	0.51820 8304
32	0.53523 5856	0.53484 7238	0.53447 0129	0.53410 5039	0.53375 2460	0.53341 2871
33	0.55047 9863	0.55005 3202	0.54963 9136	0.54923 8229	0.54885 1025	0.54847 8051
34	0.56559 2461	0.56512 5304	0.56467 1891	0.56423 2842	0.56380 8760	0.56340 0223
35	0.58057 0510	0.58006 0318	0.57956 5084	0.57908 5488	0.57862 2194	0.57817 5837
36	0.59541 0950	0.59485 5099	0.59431 5485	0.59379 2853	0.59328 7931	0.59280 1418
37	0.61011 0805	0.60950 6585	0.60891 9946	0.60835 1704	0.60780 2655	0.60727 3567
38	0.62466 7187	0.62401 1800	0.62337 5404	0.62275 8892	0.62216 3132	0.62158 8967
39	0.63907 7299	0.63836 7858	0.63767 8885	0.63701 1355	0.63636 6214	0.63574 4384
40	0.65333 8440	0.65257 1966	0.65182 7507	0.65110 6122	0.65040 8842	0.64973 6673
41	0.66744 8006	0.66662 1430	0.66581 8483	0.66504 0316	0.66428 8050	0.66356 2779
42	0.68140 3497	0.68051 3657	0.67964 9129	0.67881 1159	0.67800 0968	0.67721 9742
43	0.69520 2519	0.69424 6160	0.69331 6862	0.69241 5976	0.69154 4826	0.69070 4700
44	0.70884 2792	0.70781 6562	0.70681 9210	0.70585 2198	0.70491 6961	0.70401 4894
45	0.72232 2150	0.72122 2600	0.72015 3813	0.71911 7369	0.71811 4818	0.71714 7672

ddd

ϕ .	F(65°).	F(66°).	F(67°).	F(68°).	F(69°).	F(70°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4020	0.01745 4032	0.01745 4043	0.01745 4054	0.01745 4065	0.01745 4075
2	0.03491 2409	0.03491 2502	0.03491 2593	0.03491 2680	0.03491 2765	0.03491 2846
3	0.05237 9538	0.05237 9853	0.05238 0160	0.05238 0455	0.05238 0741	0.05238 1015
4	0.06985 9790	0.06986 0538	0.06986 1265	0.06986 1966	0.06986 2644	0.06986 3295
5	0.08735 7559	0.08735 9023	0.08736 0444	0.08736 1817	0.08736 3142	0.08736 4416
6	0.10487 7260	0.10487 9795	0.10488 2254	0.10488 4631	0.10488 6924	0.10488 9130
7	0.12242 3328	0.12242 7363	0.12243 1276	0.12243 5059	0.12243 8708	0.12244 2219
8	0.14000 0227	0.14000 6265	0.14001 2121	0.14001 7782	0.14002 3244	0.14002 8499
9	0.15761 2452	0.15762 1074	0.15762 9436	0.15763 7520	0.15764 5320	0.15765 2825
10	0.17526 4536	0.17527 6402	0.17528 7908	0.17529 9034	0.17530 9770	0.17532 0101
11	0.19296 1053	0.19297 6903	0.19299 2272	0.19300 7185	0.19302 1478	0.19305 5281
12	0.21070 6623	0.21072 7281	0.21074 7312	0.21076 6886	0.21078 5384	0.21080 5379
13	0.22850 5918	0.22853 2294	0.22855 7871	0.22858 2612	0.22860 6491	0.22862 9474
14	0.24636 3667	0.24639 6760	0.24642 8854	0.24645 9962	0.24648 9869	0.24651 8717
15	0.26428 4660	0.26432 5562	0.26436 5234	0.26440 3618	0.26444 0688	0.26447 6339
16	0.28227 3754	0.28232 3655	0.28237 2060	0.28241 8900	0.28246 4117	0.28250 7655
17	0.30033 5878	0.30039 6068	0.30045 4481	0.30051 0974	0.30056 5534	0.30061 8074
18	0.31847 6039	0.31854 7914	0.31861 7652	0.31868 5155	0.31875 0333	0.31881 5104
19	0.33669 9328	0.33678 4395	0.33686 6943	0.33694 6858	0.33702 4031	0.33709 8363
20	0.35501 0924	0.35511 0805	0.35520 7743	0.35530 1604	0.35539 2258	0.35547 9585
21	0.37341 6102	0.37353 2542	0.37364 5569	0.37375 6026	0.37386 0760	0.37396 2628
22	0.39192 0237	0.39205 5109	0.39218 6050	0.39231 2877	0.39243 5411	0.39255 5483
23	0.41052 8813	0.41068 4125	0.41083 4939	0.41098 1040	0.41112 2221	0.41125 8283
24	0.42924 7425	0.42942 5329	0.42959 8115	0.42976 5533	0.42992 7342	0.43008 5313
25	0.44808 1790	0.44828 4590	0.44848 1595	0.44867 2519	0.44885 7082	0.44903 5019
26	0.46703 7752	0.46726 7911	0.46749 1541	0.46770 8314	0.46791 7909	0.46812 0019
27	0.48612 1288	0.48638 1438	0.48663 4267	0.48687 9398	0.48711 6464	0.48734 5112
28	0.50533 8516	0.50563 1470	0.50591 6249	0.50619 2423	0.50645 9572	0.50671 7292
29	0.52469 5701	0.52502 4464	0.52534 4134	0.52565 4222	0.52595 4250	0.52624 3756
30	0.54419 9264	0.54456 7043	0.54492 4747	0.54527 1820	0.54560 7720	0.54593 1919
31	0.56385 5788	0.56426 6009	0.56466 5104	0.56505 2446	0.56542 7419	0.56578 9425
32	0.58367 2027	0.58412 8346	0.58457 2420	0.58500 3542	0.58542 1015	0.58582 4162
33	0.60365 4914	0.60416 1232	0.60465 4117	0.60513 2774	0.60559 6415	0.60604 4275
34	0.62381 1566	0.62437 2048	0.62491 7839	0.62544 8045	0.62596 1780	0.62645 8180
35	0.64414 9296	0.64476 8387	0.64537 1459	0.64595 7508	0.64652 5540	0.64707 4580
36	0.66467 5618	0.66535 8663	0.66602 3091	0.66666 9577	0.66729 6406	0.66790 2481
37	0.68539 8257	0.68614 9121	0.68688 1102	0.68759 2940	0.68828 3386	0.68895 1210
38	0.70632 5156	0.70714 9848	0.70795 4123	0.70873 6573	0.70949 5801	0.71023 0429
39	0.72746 4483	0.72836 8780	0.72925 1061	0.73010 9754	0.73094 3300	0.73175 0156
40	0.74882 4042	0.74981 4714	0.75078 1110	0.75172 2078	0.75263 5877	0.75352 0784
41	0.77041 4278	0.77149 6719	0.77255 3765	0.77358 3468	0.77458 2888	0.77555 3101
42	0.79224 2286	0.79342 4141	0.79457 8832	0.79570 4194	0.79679 8068	0.79785 8308
43	0.81431 7816	0.81560 6616	0.81686 6440	0.81809 4885	0.81928 9549	0.82044 8042
44	0.83665 0281	0.83805 4079	0.83942 7056	0.84076 6546	0.84206 9880	0.84333 4399
45	0.85924 9361	0.86077 6771	0.86227 1492	0.86373 0570	0.86515 1044	0.86652 19957

TABLE IX.

ϕ .	E (65°).	E (66°).	E (67°).	E (68°).	E (69°).	E (70°).
45°	0.72232 2150	0.72122 2600	0.72015 3813	0.71911 7369	0.71811 4818	0.71714 7672
46	0.73563 8549	0.73446 2133	0.73331 8430	0.73220 9147	0.73113 5957	0.73010 9495
47	0.74879 0071	0.74753 3143	0.74631 0943	0.74512 5313	0.74397 8056	0.74287 0939
48	0.76177 4929	0.76043 3743	0.75912 9363	0.75786 3773	0.75663 8917	0.75545 6701
49	0.77459 1475	0.77316 2181	0.77177 1834	0.77042 2567	0.76911 6474	0.76785 5608
50	0.78723 8204	0.78571 6849	0.78423 6642	0.78279 9873	0.78140 8795	0.78006 5617
51	0.79971 3760	0.79809 6287	0.79652 2218	0.79499 4012	0.79351 4090	0.79208 4827
52	0.81201 6944	0.81029 9189	0.80862 7149	0.80700 3459	0.80543 0719	0.80391 1481
53	0.82414 6719	0.82232 4412	0.82055 0180	0.81882 6847	0.81715 7199	0.81554 3977
54	0.83610 2220	0.83417 0983	0.83229 0227	0.83046 2974	0.82869 2210	0.82698 0873
55	0.84788 2761	0.84583 8107	0.84384 6382	0.84191 0815	0.84003 4603	0.83822 0896
56	0.85948 7843	0.85732 5176	0.85521 7921	0.85316 9528	0.85118 3413	0.84926 2952
57	0.87091 7161	0.86863 1776	0.86640 4317	0.86423 8463	0.86213 7865	0.86010 6134
58	0.88217 6616	0.87975 7700	0.87740 5246	0.87511 7175	0.87289 7385	0.87074 9735
59	0.89324 8324	0.89070 2956	0.88822 0600	0.88580 5433	0.88346 1611	0.88119 3256
60	0.90415 0626	0.90146 7777	0.89885 0497	0.89630 3231	0.89383 0405	0.89143 6420
61	0.91487 8098	0.91205 2634	0.90929 5294	0.90661 0801	0.90400 3867	0.90147 9185
62	0.92543 1564	0.92245 8247	0.91955 5597	0.91672 8627	0.91398 2348	0.91132 1758
63	0.93581 2105	0.93268 5599	0.92963 2278	0.92665 7459	0.92376 6463	0.92096 4611
64	0.94602 1074	0.94273 5947	0.93952 6488	0.93639 8327	0.93335 7111	0.93040 8497
65	0.95606 0108	0.95261 0838	0.94923 9670	0.94595 2557	0.94275 5487	0.93965 4467
66	0.96593 1141	0.96231 2122	0.95877 3575	0.95532 1789	0.95196 3103	0.94870 3890
67	0.97563 6416	0.97184 1968	0.96813 0282	0.96450 7995	0.96098 1808	0.95755 8474
68	0.98517 8502	0.98120 2878	0.97731 2211	0.97351 3495	0.96981 3806	0.96622 0288
69	0.99456 0304	0.99039 7703	0.98632 2143	0.98234 0983	0.97846 1679	0.97469 1785
70	1.00378 5081	0.99942 9660	0.99516 3235	0.99099 3535	0.98692 8409	0.98297 5826
71	1.01285 6455	1.00830 2347	1.00383 9042	0.99947 4644	0.99521 7401	0.99107 5708
72	1.02177 8429	1.01701 9757	1.01235 3531	1.00778 8231	1.00333 2507	0.99899 5189
73	1.03055 5395	1.02558 6297	1.02071 1103	1.01593 8669	1.01127 8052	1.00673 8518
74	1.03919 2148	1.03400 6797	1.02891 6607	1.02393 0806	1.01905 8856	1.01431 0462
75	1.04769 3894	1.04228 6527	1.03697 5356	1.03176 9980	1.02668 0259	1.02171 6335
76	1.05606 6261	1.05043 1204	1.04489 3144	1.03946 2039	1.03414 8142	1.02896 2025
77	1.06431 5303	1.05844 7004	1.05267 6255	1.04701 3359	1.04146 8951	1.03605 4022
78	1.07244 7501	1.06634 0567	1.06033 1472	1.05443 0853	1.04864 9710	1.04299 9438
79	1.08046 9766	1.07411 8995	1.06786 6084	1.06172 1983	1.05569 8039	1.04980 6030
80	1.08838 9433	1.08178 9856	1.07528 7886	1.06889 4763	1.06262 2159	1.05648 2213
81	1.09621 4252	1.08936 1174	1.08260 5173	1.07595 7757	1.06943 0899	1.06303 7067
82	1.10395 2377	1.09684 1415	1.08982 6729	1.08292 0072	1.07613 3684	1.06948 0336
83	1.11161 2345	1.10423 9472	1.09696 1813	1.08979 1339	1.08274 0528	1.07582 2418
84	1.11920 3053	1.11156 4638	1.10402 0129	1.09658 1689	1.08946 2003	1.08207 4341
85	1.12673 3729	1.11882 6576	1.11101 1797	1.10330 1720	1.09570 9208	1.08824 7730
86	1.13421 3897	1.12603 5281	1.11794 7310	1.10996 2452	1.10209 3722	1.09435 4753
87	1.14165 3337	1.13320 1636	1.12483 7486	1.11657 5274	1.10842 7543	1.10040 8061
88	1.14906 2041	1.14033 4363	1.13169 3414	1.12315 1883	1.11472 3022	1.10642 0711
89	1.15645 0162	1.14744 5967	1.13852 6391	1.12970 4214	1.12099 2783	1.11240 6074
90	1.16382 7964	1.15454 6678	1.14534 7857	1.13624 4365	1.12724 9638	1.11837 7738

ϕ .	F (65°).	F (66°).	F (67°).	F (68°).	F (69°).	F (70°).
45°	0.85924 9361	0.86077 6771	0.86227 1492	0.86373 0570	0.86515 1044	0.86652 9957
46	0.88212 5011	0.88378 5248	0.88541 0919	0.88699 8756	0.88854 5477	0.89004 7795
47	0.90528 7461	0.90709 0386	0.90885 6878	0.91058 3323	0.91226 6087	0.91390 1521
48	0.92874 7220	0.93070 3389	0.93262 1286	0.93449 6921	0.93632 6273	0.93810 5295
49	0.95251 5076	0.95463 5791	0.95671 6448	0.95875 2647	0.96073 9944	0.96267 3852
50	0.97660 2097	0.97889 9461	0.98115 5062	0.98336 4056	0.98552 1533	0.98762 2528
51	1.00101 9625	1.00350 6600	1.00595 0225	1.00834 5171	1.01068 6020	1.01296 7279
52	1.02577 9268	1.02846 9742	1.03111 5435	1.03371 0491	1.03624 8939	1.03872 4708
53	1.05089 2894	1.05380 1746	1.05666 4589	1.05947 4998	1.06222 6397	1.06491 2084
54	1.07637 2614	1.07951 5788	1.08261 1982	1.08565 4157	1.08863 5082	1.09154 7362
55	1.10223 0767	1.10562 5346	1.10897 2297	1.11226 3918	1.11549 2269	1.11864 9198
56	1.12847 9892	1.13214 4180	1.13576 0591	1.13932 0707	1.14281 5821	1.14623 6961
57	1.15513 2701	1.15908 6310	1.16299 2274	1.16684 1412	1.17062 4189	1.17433 0743
58	1.18220 2042	1.18646 5978	1.19068 3084	1.19484 3365	1.19893 6398	1.20295 1356
59	1.20970 0852	1.21429 7610	1.21884 9049	1.22334 4313	1.22777 2028	1.23212 0327
60	1.23764 2104	1.24259 5762	1.24750 6441	1.25236 2377	1.25715 1185	1.26185 9883
61	1.26603 8745	1.27137 5059	1.27667 1716	1.28191 6001	1.28709 4459	1.29219 2916
62	1.29490 3602	1.30065 0116	1.30636 1442	1.31202 3883	1.31762 2862	1.32314 2942
63	1.32424 9318	1.33043 5449	1.33659 2208	1.34270 4891	1.34875 7756	1.35473 4035
64	1.35408 8229	1.36074 5367	1.36738 0518	1.37397 7958	1.38052 0751	1.38699 0740
65	1.38443 2245	1.39159 3844	1.39874 2659	1.40586 1954	1.41293 3583	1.41993 7958
66	1.41529 2712	1.42299 4372	1.43069 4549	1.43837 5527	1.44601 7957	1.45360 0800
67	1.44668 0252	1.45495 9792	1.46325 1558	1.47153 6919	1.47979 5361	1.48800 4402
68	1.47860 4385	1.48750 2095	1.49642 8297	1.50536 3743	1.51428 6834	1.52317 3691
69	1.51107 4325	1.52063 2204	1.53023 8376	1.53987 2725	1.54951 2693	1.55913 3104
70	1.54409 6762	1.55435 9723	1.56469 4129	1.57507 9400	1.58549 2209	1.59590 6244
71	1.57767 7616	1.58869 2661	1.59980 6301	1.61099 7766	1.62224 3223	1.63351 5471
72	1.61182 0772	1.62363 7127	1.63558 3701	1.64763 9889	1.65978 1708	1.67198 1413
73	1.64652 7998	1.65919 6998	1.67203 2816	1.68501 5461	1.69812 1264	1.71132 2402
74	1.68179 8648	1.69537 3565	1.70915 7392	1.72313 1307	1.73727 2545	1.75155 3820
75	1.71762 9353	1.73216 5161	1.74695 7987	1.76199 0854	1.77724 2632	1.79268 7358
76	1.75401 3710	1.76956 6777	1.78543 1501	1.80159 3555	1.81803 4340	1.83473 0190
77	1.79094 1976	1.80756 9677	1.82457 0692	1.84193 4295	1.85964 5481	1.87768 4075
78	1.82840 0773	1.84616 1019	1.86436 3702	1.88300 2781	1.90206 8096	1.92154 4391
79	1.86637 2827	1.88532 3510	1.90479 3590	1.92478 2941	1.94528 7682	1.96629 9145
80	1.90483 6739	1.92503 5093	1.94583 7919	1.96725 2367	1.98928 2444	2.01192 7981
81	1.94376 6816	1.96526 8703	1.98746 8403	2.01038 1817	2.03402 2611	2.05840 1245
82	1.98313 2981	2.00599 2101	2.02965 0648	2.05413 4828	2.07946 9864	2.10567 9166
83	2.02290 0744	2.04716 7808	2.07234 4013	2.09846 7470	2.12557 6934	2.15371 1219
84	2.06303 1293	2.08875 3163	2.11550 1620	2.14332 8296	2.17228 7413	2.20243 5751
85	2.10348 1685	2.13070 0515	2.15907 0534	2.18865 8393	2.21953 5835	2.25177 9950
86	2.14420 5151	2.17295 7558	2.20299 2130	2.23439 1967	2.26724 8070	2.30166 0207
87	2.18515 1512	2.21546 7819	2.24720 2653	2.28045 6787	2.31534 2053	2.35198 2931
88	2.22626 7708	2.25817 1284	2.29163 3966	2.32677 5180	2.36372 8853	2.40264 5825
89	2.26749 8425	2.30100 5177	2.33621 4474	2.37326 5140	2.41231 4063	2.45353 9601
90	2.30878 6798	2.34390 4724	2.38087 0191	2.41984 1654	2.46099 9458	2.50455 0079

TABLE IX.

ϕ .	E(70°).	E(71°).	E(72°).	E(73°).	E(74°).	E(75°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2510	0.01745 2500	0.01745 2491	0.01745 2482	0.01745 2474	0.01745 2465
2	0.03490 0326	0.03490 0248	0.03490 0174	0.03490 0102	0.03490 0036	0.03489 9970
3	0.05233 8756	0.05233 8493	0.05233 8242	0.05233 8001	0.05233 7775	0.05233 7558
4	0.06976 3111	0.06976 2488	0.06976 1892	0.06976 1323	0.06976 0785	0.06976 0273
5	0.08716 8708	0.08716 7491	0.08716 6327	0.08716 5217	0.08716 4164	0.08716 3166
6	0.10455 0873	0.10454 8770	0.10454 6758	0.10454 4840	0.10454 3019	0.10454 1295
7	0.12190 4941	0.12190 1600	0.12189 8404	0.12189 5358	0.12189 2466	0.12188 9728
8	0.13922 6258	0.13922 1269	0.13921 6497	0.13921 1949	0.13920 7630	0.13920 3543
9	0.15651 0184	0.15650 3078	0.15649 6281	0.15648 9803	0.15648 3651	0.15647 7831
10	0.17375 2095	0.17374 2343	0.17373 3015	0.17372 4126	0.17371 5683	0.17370 7697
11	0.19094 7383	0.19093 4398	0.19092 1977	0.19091 0140	0.19089 8897	0.19088 8263
12	0.20809 1462	0.20807 4595	0.20805 8462	0.20804 3086	0.20802 8482	0.20801 4669
13	0.22517 9765	0.22515 8309	0.22513 7786	0.22511 8226	0.22509 9647	0.22508 2075
14	0.24220 7750	0.24218 0937	0.24215 5289	0.24213 0844	0.24210 7624	0.24208 5663
15	0.25917 0899	0.25913 7900	0.25910 6335	0.25907 6248	0.25904 7669	0.25902 0638
16	0.27606 4723	0.27602 4648	0.27598 6314	0.27594 9773	0.27591 5063	0.27588 2233
17	0.29288 4762	0.29283 6660	0.29279 0646	0.29274 6782	0.29270 5116	0.29266 5706
18	0.30962 6586	0.30956 9444	0.30951 4781	0.30946 2669	0.30941 3168	0.30936 6345
19	0.32628 5801	0.32621 8544	0.32615 4202	0.32609 2859	0.32603 4589	0.32597 9469
20	0.34285 8048	0.34277 9537	0.34270 4426	0.34263 2812	0.34256 4784	0.34250 0431
21	0.35933 9005	0.35924 8038	0.35916 1007	0.35907 8024	0.35899 9193	0.35892 4619
22	0.37572 4391	0.37561 9702	0.37551 9538	0.37542 4029	0.37533 3295	0.37524 7456
23	0.39200 9966	0.39189 0224	0.39177 5653	0.39166 6400	0.39156 2606	0.39146 4406
24	0.40819 1534	0.40805 5344	0.40792 5028	0.40780 0755	0.40768 2685	0.40757 0974
25	0.42426 4948	0.42411 0847	0.42396 3385	0.42382 2753	0.42368 9134	0.42356 2706
26	0.44022 6107	0.44005 2567	0.43988 6493	0.43972 8102	0.43957 7602	0.43943 5193
27	0.45607 0963	0.45587 6387	0.45569 0170	0.45551 2558	0.45534 3784	0.45518 4075
28	0.47179 5521	0.47157 8243	0.47137 0287	0.47117 1927	0.47098 3426	0.47080 5039
29	0.48739 5841	0.48715 4127	0.48692 2767	0.48670 2068	0.48649 2326	0.48629 3825
30	0.50286 8042	0.50260 0087	0.50234 3590	0.50209 8896	0.50186 6334	0.50164 6223
31	0.51820 8304	0.51791 2230	0.51762 8795	0.51735 8383	0.51710 1359	0.51685 8080
32	0.53341 2871	0.53308 6728	0.53277 4482	0.53247 6560	0.53219 3368	0.53192 5301
33	0.54847 8051	0.54811 9815	0.54777 6815	0.54744 9522	0.54713 8388	0.54684 3850
34	0.56340 0223	0.56300 7795	0.56263 2023	0.56227 3428	0.56193 2511	0.56160 9752
35	0.57817 5837	0.57774 7040	0.57733 6405	0.57694 4505	0.57657 1893	0.57621 9098
36	0.59280 1418	0.59233 3997	0.59188 6331	0.59145 9048	0.59105 2759	0.59066 8046
37	0.60727 3567	0.60676 5188	0.60627 8245	0.60581 3427	0.60537 1407	0.60495 2822
38	0.62158 8967	0.62103 7214	0.62050 8668	0.62000 4087	0.61952 4206	0.61906 9724
39	0.63574 4384	0.63514 6758	0.63457 4203	0.63402 7550	0.63350 7602	0.63301 5125
40	0.64973 6673	0.64909 0590	0.64847 1536	0.64788 0422	0.64731 8123	0.64678 5476
41	0.66356 2779	0.66286 5567	0.66219 7440	0.66155 9391	0.66095 2376	0.66037 7308
42	0.67721 9742	0.67646 8639	0.67574 8777	0.67506 1235	0.67440 7056	0.67378 7235
43	0.69070 4700	0.68989 6854	0.68912 2504	0.68838 2824	0.68767 8947	0.68701 1957
44	0.70401 4894	0.70314 7359	0.70231 5677	0.70152 1122	0.70076 4925	0.70004 8265
45	0.71714 7672	0.71621 7407	0.71532 5452	0.71447 3192	0.71366 1962	0.71289 3043

TABLE IX.

ϕ .	F(70°).	F(71°).	F(72°).	F(73°).	F(74°).	F(75°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4075	0.01745 4085	0.01745 4094	0.01745 4103	0.01745 4111	0.01745 4120
2	0.03491 2846	0.03491 2924	0.03491 2998	0.03491 3070	0.03491 3137	0.03491 3201
3	0.05238 1015	0.05238 1278	0.05238 1529	0.05238 1770	0.05238 1998	0.05238 2214
4	0.06986 3295	0.06986 3919	0.06986 4516	0.06986 5086	0.06986 5627	0.06986 6139
5	0.08736 4416	0.08736 5637	0.08736 6805	0.08736 7920	0.08736 8978	0.08736 9980
6	0.10488 9130	0.10489 1245	0.10489 3268	0.10489 5198	0.10489 7030	0.10489 8764
7	0.12244 2219	0.12244 5586	0.12244 8807	0.12245 1879	0.12245 4795	0.12245 7555
8	0.14002 8499	0.14003 3539	0.14003 8361	0.14004 2959	0.14004 7324	0.14005 1456
9	0.15765 2825	0.15766 0025	0.15766 6912	0.15767 3480	0.15767 9715	0.15768 5617
10	0.17532 0101	0.17533 0012	0.17533 9493	0.17534 8535	0.17535 7119	0.17536 5245
11	0.19303 5281	0.19304 8524	0.19306 1193	0.19307 3276	0.19308 4748	0.19309 5607
12	0.21080 3379	0.21082 0646	0.21083 7165	0.21085 2920	0.21086 7881	0.21088 2042
13	0.22862 9474	0.22865 1530	0.22867 2632	0.22869 2758	0.22871 1873	0.22872 9965
14	0.24651 8717	0.24654 6404	0.24657 2895	0.24659 8162	0.24662 2163	0.24664 4878
15	0.26447 6339	0.26451 0577	0.26454 3340	0.26457 4591	0.26460 4279	0.26463 2377
16	0.28250 7655	0.28254 9449	0.28258 9446	0.28262 7601	0.28266 3851	0.28269 8161
17	0.30061 8074	0.30066 8515	0.30071 6793	0.30076 2852	0.30080 6616	0.30084 8040
18	0.31881 3104	0.31887 3376	0.31893 1071	0.31898 6118	0.31903 8429	0.31908 7947
19	0.33709 8363	0.33716 9746	0.33723 8085	0.33730 3294	0.33736 5270	0.33742 3942
20	0.35547 9585	0.35556 3460	0.35564 3769	0.35572 0408	0.35579 3258	0.35586 2230
21	0.37396 2628	0.37406 0484	0.37415 4193	0.37424 3629	0.37432 8656	0.37440 9165
22	0.39255 3483	0.39266 6922	0.39277 5570	0.39287 9278	0.39297 7886	0.39307 1267
23	0.41125 8283	0.41138 9028	0.41151 4271	0.41163 3836	0.41174 7539	0.41185 5228
24	0.43008 3313	0.43023 3215	0.43037 6832	0.43051 3959	0.43064 4384	0.43076 7927
25	0.44903 5019	0.44920 6064	0.44936 9967	0.44952 6488	0.44967 5384	0.44981 6445
26	0.46812 0019	0.46831 4339	0.46850 0579	0.46867 8462	0.46884 7709	0.46900 8074
27	0.48734 5112	0.48756 4993	0.48777 5771	0.48797 7129	0.48816 8747	0.48835 0338
28	0.50671 7292	0.50696 5183	0.50720 2862	0.50742 9962	0.50764 6120	0.50785 1001
29	0.52624 3756	0.52652 2284	0.52678 9397	0.52704 4673	0.52728 7699	0.52751 8090
30	0.54593 1919	0.54624 3899	0.54654 3163	0.54682 9228	0.54710 1623	0.54735 9908
31	0.56578 9425	0.56613 7875	0.56647 2204	0.56679 1861	0.56709 6312	0.56738 5053
32	0.58582 4162	0.58621 2317	0.58658 4836	0.58694 1096	0.58728 0488	0.58760 2439
33	0.60604 4275	0.60647 5601	0.60688 9665	0.60728 5759	0.60766 3193	0.60802 1316
34	0.62645 8180	0.62693 6395	0.62739 5603	0.62783 5002	0.62825 3811	0.62865 1291
35	0.64707 4580	0.64760 3672	0.64811 1888	0.64859 8321	0.64906 2089	0.64950 2354
36	0.66790 2481	0.66848 6729	0.66904 8102	0.66958 5577	0.67009 8160	0.67058 4901
37	0.68895 1210	0.68959 5205	0.69021 4193	0.69080 7021	0.69137 2568	0.69190 9761
38	0.71023 0429	0.71093 9102	0.71162 0496	0.71227 3315	0.71289 6295	0.71348 8227
39	0.73175 0156	0.73252 8804	0.73327 7758	0.73399 5560	0.73468 0790	0.73533 2083
40	0.75352 0784	0.75437 5101	0.75519 7159	0.75598 5322	0.75673 7995	0.75745 3639
41	0.77555 3101	0.77648 9208	0.77739 0339	0.77825 4661	0.77908 0381	0.77986 5766
42	0.79785 8308	0.79888 2792	0.79986 9428	0.80081 6161	0.80172 0981	0.80258 1934
43	0.82044 8042	0.82156 7996	0.82264 7070	0.82368 2964	0.82467 3424	0.82561 6255
44	0.84333 4399	0.84455 7463	0.84573 6455	0.84686 8802	0.84795 1978	0.84898 3517
45	0.86652 9957	0.86786 4366	0.86915 1352	0.87038 8035	0.87157 1586	0.87269 9237

TABLE IX.

ϕ .	E (70°).	E (71°).	E (72°).	E (73°).	E (74°).	E (75°).
45°	0.71714 7672	0.71621 7407	0.71532 5452	0.71447 3192	0.71366 1962	0.71289 3043
46	0.73010 0495	0.72910 4358	0.72814 9093	0.72723 6202	0.72636 7131	0.72554 3272
47	0.74287 0939	0.74180 5687	0.74078 3974	0.73980 7426	0.73887 7610	0.73799 6034
48	0.75545 6701	0.75431 8987	0.75322 7585	0.75218 4252	0.75119 0685	0.75024 8517
49	0.76785 5608	0.76664 1977	0.76547 7537	0.76436 4184	0.76330 3756	0.76229 8019
50	0.78006 5617	0.77877 2505	0.77753 1567	0.77634 4851	0.77521 4342	0.77414 1952
51	0.79208 4827	0.79070 8555	0.78938 7545	0.78812 4008	0.78692 0087	0.78577 7848
52	0.80391 1481	0.80244 8253	0.80104 3480	0.79969 9547	0.79841 8765	0.79720 3366
53	0.81554 3977	0.81398 9876	0.81249 7527	0.81106 9500	0.80970 8286	0.80841 6296
54	0.82698 0873	0.82533 1858	0.82374 7994	0.82223 2048	0.82078 6705	0.81941 4566
55	0.83822 0896	0.83647 2798	0.83479 3351	0.83318 5529	0.83165 2227	0.83019 6249
56	0.84926 2952	0.84741 1471	0.84563 2237	0.84392 8447	0.84230 3218	0.84075 9573
57	0.86010 6134	0.85814 6834	0.85626 3471	0.85445 9479	0.85273 8212	0.85110 2028
58	0.87074 9735	0.86867 8041	0.86668 6062	0.86477 7487	0.86295 5921	0.86122 4876
59	0.88119 3256	0.87900 4450	0.87689 9221	0.87488 1529	0.87295 5248	0.87112 4160
60	0.89143 6420	0.88912 5638	0.88690 2372	0.88477 0871	0.88273 5296	0.88079 9718
61	0.90147 9185	0.89904 1413	0.89669 5166	0.89444 5001	0.89229 5384	0.89025 0696
62	0.91132 1758	0.90875 1830	0.90627 7498	0.90390 3643	0.90163 5059	0.89947 6458
63	0.92096 4611	0.91825 7205	0.91564 9517	0.91314 6772	0.91075 4115	0.90847 6609
64	0.93040 8497	0.92755 8134	0.92481 1650	0.92217 4636	0.91965 2608	0.91725 1007
65	0.93965 4467	0.93665 5510	0.93376 4619	0.93098 7771	0.92833 0878	0.92579 9784
66	0.94870 3890	0.94555 0543	0.94250 9460	0.93958 7025	0.93678 9570	0.93412 3370
67	0.95755 8474	0.95424 4784	0.95104 7549	0.94797 3582	0.94502 9660	0.94222 2516
68	0.96622 0288	0.96274 0147	0.95938 0624	0.95614 8986	0.95305 2479	0.95009 8324
69	0.97469 1785	0.97103 8933	0.96751 0816	0.96411 5174	0.96085 9747	0.95775 2274
70	0.98297 5826	0.97914 3861	0.97544 0676	0.97187 4503	0.96845 3603	0.96518 6263
71	0.99107 5708	0.98705 8094	0.98317 3205	0.97942 9786	0.97583 6644	0.97240 2640
72	0.99899 5189	0.99478 2569	0.99071 1890	0.98678 4330	0.98301 1962	0.97940 4252
73	1.00673 8518	1.00232 9530	0.99806 0740	0.99394 1973	0.98998 3191	0.98619 4489
74	1.01431 0462	1.00969 5562	1.00522 4323	1.00090 7131	0.99675 4553	0.99277 7339
75	1.02171 6335	1.01688 8622	1.01220 7806	1.00768 4840	1.00333 0910	0.99915 7443
76	1.02896 2025	1.02391 4574	1.01901 6992	1.01428 0801	1.00971 7817	1.00534 0157
77	1.03605 4022	1.03077 9921	1.02565 8362	1.02070 1433	1.01592 1580	1.01133 1618
78	1.04299 9438	1.03749 1835	1.03213 9113	1.02695 3915	1.02194 9312	1.01713 8816
79	1.04980 6030	1.04405 8185	1.03846 7192	1.03304 6235	1.02780 8991	1.02276 9661
80	1.05648 2213	1.05048 7556	1.04465 1329	1.03898 7228	1.03350 9514	1.02823 3053
81	1.06303 7067	1.05678 9265	1.05070 1056	1.04478 6614	1.03906 0746	1.03353 8948
82	1.06948 0336	1.06297 3367	1.05662 6724	1.05045 5017	1.04447 3555	1.03869 8415
83	1.07582 2418	1.06905 0647	1.06243 9502	1.05600 3980	1.04975 9838	1.04372 3676
84	1.08207 4341	1.07503 2601	1.06815 1362	1.06144 5955	1.05493 2525	1.04862 8125
85	1.08824 7730	1.08093 1400	1.07377 5045	1.06679 4274	1.06000 5555	1.05342 6318
86	1.09435 4753	1.08675 9840	1.07932 4010	1.07206 3097	1.06499 3828	1.05813 3931
87	1.10040 8061	1.09253 1271	1.08481 2357	1.07726 7331	1.06991 3118	1.06276 7670
88	1.10642 0711	1.09825 9511	1.09025 4733	1.08242 2523	1.07477 9955	1.06734 5141
89	1.11240 6074	1.10395 8746	1.09566 6213	1.08754 4727	1.07961 1471	1.07188 4677
90	1.11837 7738	1.10964 3214	1.10106 2169	1.09265 0346	1.08442 5219	1.07640 5113

TABLE IX.

ϕ .	F (70°).	F (71°).	F (72°).	F (73°).	F (74°).	F (75°).
45°	0.86652 9957	0.86786 4366	0.86915 1352	0.87038 8035	0.87157 1586	0.87269 9237
46	0.89004 7795	0.89150 2434	0.89290 6138	0.89425 5687	0.89554 7914	0.89677 9712
47	0.91390 1521	0.91548 5981	0.91701 5836	0.91848 7489	0.91989 7394	0.92124 2067
48	0.93810 5295	0.93982 9936	0.94149 6150	0.94309 9919	0.94463 7277	0.94610 4317
49	0.96267 3852	0.96454 9873	0.96636 3500	0.96811 0250	0.96978 5683	0.97138 5421
50	0.98762 2528	0.98966 2043	0.99163 5065	0.99353 6591	0.99536 1657	0.99710 5354
51	1.01296 7279	1.01518 3403	1.01732 8818	1.01939 7943	1.02138 5227	1.02328 5169
52	1.03872 4708	1.04113 1650	1.04346 3569	1.04571 4243	1.04787 7468	1.04994 7077
53	1.06491 2084	1.06752 5248	1.07005 9005	1.07250 6421	1.07486 0563	1.07711 4521
54	1.09154 7362	1.09438 3459	1.09713 5729	1.09979 6449	1.10235 7873	1.10481 2258
55	1.11864 9198	1.12172 6370	1.12471 5303	1.12760 7400	1.13039 4008	1.13306 6451
56	1.14623 6961	1.14957 4918	1.15282 0285	1.15596 3499	1.15899 4895	1.16190 4755
57	1.17433 0743	1.17795 0908	1.18147 4264	1.18489 0177	1.18818 7856	1.19135 6415
58	1.20295 1356	1.20687 7032	1.21070 1894	1.21441 4122	1.21800 1677	1.22145 2366
59	1.23212 0327	1.23637 6874	1.24052 8916	1.24456 3329	1.24846 6686	1.25222 5332
60	1.26185 9883	1.26647 4909	1.27098 2182	1.27536 7139	1.27961 4817	1.28370 9928
61	1.29219 2916	1.29779 6493	1.30208 9659	1.30685 6276	1.31147 9680	1.31594 2763
62	1.32314 2942	1.32856 7829	1.33388 0425	1.33906 2867	1.34409 6615	1.34896 2535
63	1.35473 4035	1.36061 5928	1.36638 4646	1.37202 0451	1.37750 2737	1.38281 0121
64	1.38699 0740	1.39336 8532	1.39963 3530	1.40576 3962	1.41173 6962	1.41752 8656
65	1.41993 7958	1.42685 4020	1.43365 9251	1.44032 9692	1.44684 0011	1.45316 3588
66	1.45360 0800	1.46110 1275	1.46849 4844	1.47575 5213	1.48285 4380	1.48976 2713
67	1.48800 4402	1.49613 9508	1.50417 4047	1.51207 9256	1.51982 4267	1.52737 6164
68	1.52317 3691	1.53199 8034	1.54073 1095	1.54934 1536	1.55779 5445	1.56605 6353
69	1.55913 3104	1.56870 5989	1.57820 0447	1.58758 2505	1.59681 5059	1.60585 7841
70	1.59590 6244	1.60629 1974	1.61661 6435	1.62684 3018	1.63693 1336	1.64683 7113
71	1.63351 5471	1.64478 3625	1.65601 2820	1.66716 3897	1.67819 3176	1.68905 2235
72	1.67198 1413	1.68420 7087	1.69642 2238	1.70858 5365	1.72064 9602	1.73256 2353
73	1.71132 2402	1.72458 6386	1.73787 5521	1.75114 6331	1.76434 9036	1.77742 6998
74	1.75155 3820	1.76594 2692	1.78040 0878	1.79488 3503	1.80933 8364	1.82370 5143
75	1.79268 7358	1.80829 3463	1.82402 2922	1.83983 0298	1.85566 1752	1.87145 3964
76	1.83473 0190	1.85165 1468	1.86876 1528	1.88601 5535	1.90335 9180	1.92072 7240
77	1.87768 4075	1.89602 3695	1.91463 0525	1.93346 1893	1.95246 4654	1.97157 3334
78	1.92154 4391	1.94141 0158	1.96163 6234	1.98218 4137	2.00300 4082	2.02403 2706
79	1.96629 9145	1.98780 2630	2.00977 5863	2.03218 7098	2.05499 2806	2.07813 4920
80	2.01192 7981	2.03518 3347	2.05903 5819	2.08346 3518	2.10843 2818	2.13389 5144
81	2.05840 1245	2.08352 3731	2.10938 9994	2.13599 1750	2.16330 9741	2.19131 0204
82	2.10567 9166	2.13278 3232	2.16079 8135	2.18973 3489	2.21958 9703	2.25035 4329
83	2.15371 1219	2.18290 8361	2.21320 4408	2.24463 1678	2.27721 6310	2.31097 4823
84	2.20243 5751	2.23383 2036	2.26653 6322	2.30060 8799	2.33610 7997	2.37308 8039
85	2.25177 9950	2.28547 3348	2.32070 4164	2.35756 5779	2.39615 7101	2.43657 6136
86	2.30166 0207	2.33773 7842	2.37560 1108	2.41538 1760	2.45722 4027	2.50128 5197
87	2.35198 2931	2.39051 8402	2.43110 4124	2.47391 4954	2.51914 7864	2.56702 5290
88	2.40264 5825	2.44369 6766	2.48707 5763	2.53300 4706	2.58173 8723	2.63357 2959
89	2.45353 9601	2.49714 5656	2.54336 6813	2.59247 4820	2.64478 6880	2.70067 6392
90	2.50455 0079	2.55073 1450	2.59981 9730	2.65213 8005	2.70806 7615	2.76806 3145

TABLE IX.

ϕ .	E(75°).	E(76°).	E(77°).	E(78°).	E(79°).	E(80°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2465	0.01745 2458	0.01745 2451	0.01745 2445	0.01745 2439	0.01745 2433
2	0.03489 9970	0.03489 9912	0.03489 9855	0.03489 9803	0.03489 9755	0.03489 9711
3	0.05233 7558	0.05233 7357	0.05233 7167	0.05233 6991	0.05233 6828	0.05233 6678
4	0.06976 0273	0.06975 9794	0.06975 9345	0.06975 8926	0.06975 8539	0.06975 8185
5	0.08716 3166	0.08716 2230	0.08716 1352	0.08716 0534	0.08715 9778	0.08715 9085
6	0.10454 1295	0.10453 9676	0.10453 8158	0.10453 6745	0.10453 5439	0.10453 4241
7	0.12188 9728	0.12188 7156	0.12188 4745	0.12188 2500	0.12188 0425	0.12187 8521
8	0.13920 5543	0.13919 9701	0.13919 6100	0.13919 2748	0.13918 9649	0.13918 6807
9	0.15647 7831	0.15647 2357	0.15646 7228	0.15646 2453	0.15645 8039	0.15645 3990
10	0.17370 7697	0.17370 0183	0.17369 3144	0.17368 6591	0.17368 0533	0.17367 4975
11	0.19088 8263	0.19087 8256	0.19086 8882	0.19086 0155	0.19085 2087	0.19084 4685
12	0.20801 4669	0.20800 1668	0.20798 9492	0.20797 8155	0.20796 7673	0.20795 8058
13	0.22508 2075	0.22506 5535	0.22505 0043	0.22503 5620	0.22502 2283	0.22501 0050
14	0.24208 5663	0.24206 4990	0.24204 5627	0.24202 7600	0.24201 0930	0.24199 5640
15	0.25902 0638	0.25899 5193	0.25897 1359	0.25894 9169	0.25892 8649	0.25890 9827
16	0.27588 2233	0.27585 1326	0.27582 2377	0.27579 5424	0.27577 0499	0.27574 7635
17	0.29266 5706	0.29262 8602	0.29259 3848	0.29256 1489	0.29253 1565	0.29250 4115
18	0.30936 6345	0.30932 2260	0.30928 0966	0.30924 2516	0.30920 6960	0.30917 4342
19	0.32597 9469	0.32592 7570	0.32587 8956	0.32583 3689	0.32579 1827	0.32575 3423
20	0.34250 0431	0.34243 9836	0.34238 3074	0.34233 0219	0.34228 1339	0.34223 6495
21	0.35892 4619	0.35885 4395	0.35878 8613	0.35872 7355	0.35867 0703	0.35861 8728
22	0.37524 7456	0.37516 6622	0.37509 0897	0.37502 0379	0.37495 5160	0.37489 5325
23	0.39146 4406	0.39137 1928	0.39128 5292	0.39120 4611	0.39112 9989	0.39106 1525
24	0.40757 0974	0.40746 5767	0.40736 7202	0.40727 5408	0.40719 0506	0.40711 2606
25	0.42356 2706	0.42344 3632	0.42333 2072	0.42322 8170	0.42313 2066	0.42304 3885
26	0.43943 5193	0.43930 1063	0.43917 5389	0.43905 8339	0.43895 0068	0.43885 0721
27	0.45518 4075	0.45503 3644	0.45489 2689	0.45476 1401	0.45463 9954	0.45452 8513
28	0.47080 5039	0.47063 7007	0.47047 9552	0.47033 2887	0.47019 7211	0.47007 2707
29	0.48629 3825	0.48610 6836	0.48593 1607	0.48576 8379	0.48561 7373	0.48547 8796
30	0.50164 6223	0.50143 8864	0.50124 4536	0.50106 3506	0.50089 6024	0.50074 2319
31	0.51685 8080	0.51662 8881	0.51641 4072	0.51621 3952	0.51602 8799	0.51585 8868
32	0.53192 5301	0.53167 2731	0.53143 6004	0.53121 5453	0.53101 7384	0.53082 4084
33	0.54684 3850	0.54656 6319	0.54630 6180	0.54606 3801	0.54583 9523	0.54563 3663
34	0.56160 9752	0.56130 5608	0.56102 0503	0.56075 4846	0.56050 9014	0.56028 3357
35	0.57621 9098	0.57588 6625	0.57557 4942	0.57528 4500	0.57501 5714	0.57476 8973
36	0.59066 8046	0.59030 5463	0.58996 5527	0.58964 8734	0.58935 5542	0.58908 6381
37	0.60495 2822	0.60455 8281	0.60418 8354	0.60384 3585	0.60352 4480	0.60323 1509
38	0.61906 9724	0.61864 1309	0.61823 9588	0.61786 5157	0.61751 8572	0.61720 0350
39	0.63301 5125	0.63255 0851	0.63211 5465	0.63170 9622	0.63133 3932	0.63098 8961
40	0.64678 5476	0.64628 3283	0.64581 2293	0.64537 3224	0.64496 6742	0.64459 3468
41	0.66037 7308	0.65983 5062	0.65932 6458	0.65885 2279	0.65841 3255	0.65801 0066
42	0.67378 7235	0.67320 2725	0.67265 4422	0.67214 3182	0.67166 9800	0.67123 5019
43	0.68701 1957	0.68638 2892	0.68579 2730	0.68524 2403	0.68473 2779	0.68426 4670
44	0.70004 8265	0.69937 2272	0.69873 8011	0.69814 6496	0.69759 8675	0.69709 5433
45	0.71289 3043	0.71216 7663	0.71148 6981	0.71085 2100	0.71026 4054	0.70972 3805

fff

TABLE IX.

ϕ .	F (75°).	F (76°).	F (77°).	F (78°).	F (79°).	F (80°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4120	0.01745 4127	0.01745 4134	0.01745 4140	0.01745 4146	0.01745 4152
2	0.03491 3201	0.03491 3261	0.03491 3317	0.03491 3369	0.03491 3418	0.03491 3462
3	0.05238 2214	0.05238 2416	0.05238 2606	0.05238 2782	0.05238 2946	0.05238 3096
4	0.06986 6139	0.06986 6620	0.06986 7071	0.06986 7490	0.06986 7878	0.06986 8234
5	0.08736 9980	0.08737 0920	0.08737 1802	0.08737 2623	0.08737 3382	0.08737 4079
6	0.10489 8764	0.10490 0393	0.10490 1921	0.10490 3343	0.10490 4657	0.10490 5863
7	0.12245 7555	0.12246 0149	0.12246 2581	0.12246 4845	0.12246 6938	0.12246 8858
8	0.14005 1456	0.14005 5341	0.14005 8981	0.14006 2371	0.14006 5505	0.14006 8380
9	0.15768 5617	0.15769 1168	0.15769 6369	0.15770 1212	0.15770 5690	0.15770 9798
10	0.17536 5245	0.17537 2888	0.17538 0050	0.17538 6719	0.17539 2886	0.17539 8543
11	0.19309 5607	0.19310 5824	0.19311 5397	0.19312 4310	0.19313 2554	0.19314 0116
12	0.21088 2042	0.21089 5368	0.21090 7853	0.21091 9480	0.21093 0233	0.21094 0098
13	0.22872 9965	0.22874 6993	0.22876 2948	0.22877 7806	0.22879 1548	0.22880 4156
14	0.24664 4878	0.24666 6262	0.24668 6299	0.24670 4959	0.24672 2218	0.24673 8054
15	0.26463 2377	0.26465 8833	0.26468 3623	0.26470 6712	0.26472 8068	0.26474 7663
16	0.28269 8161	0.28273 0471	0.28276 0748	0.28278 8948	0.28281 5034	0.28283 8971
17	0.30084 8040	0.30088 7055	0.30092 3616	0.30095 7673	0.30098 9179	0.30101 8092
18	0.31908 7947	0.31913 4589	0.31917 8303	0.31921 9025	0.31925 6700	0.31929 1276
19	0.33742 3942	0.33747 9213	0.33753 1019	0.33757 9283	0.33762 3940	0.33766 4926
20	0.35586 2230	0.35592 7212	0.35598 8126	0.35604 4881	0.35609 7398	0.35614 5602
21	0.37440 9165	0.37448 5028	0.37455 6147	0.37462 2418	0.37468 3745	0.37474 0041
22	0.39307 1267	0.39315 9270	0.39324 1779	0.39331 8671	0.39338 9835	0.39345 5166
23	0.41185 5228	0.41195 6728	0.41205 1904	0.41214 0610	0.41222 2717	0.41229 8101
24	0.43076 7927	0.43088 4387	0.43099 3604	0.43109 5409	0.43118 9651	0.43127 6186
25	0.44981 6445	0.44994 9437	0.45007 4175	0.45019 0464	0.45029 8125	0.45039 6993
26	0.46900 8074	0.46915 9292	0.46930 1144	0.46943 3404	0.46955 5868	0.46966 8343
27	0.48835 0338	0.48852 1600	0.48868 2279	0.48883 2115	0.48897 0870	0.48909 8324
28	0.50785 1001	0.50804 4264	0.50822 5613	0.50839 4749	0.50855 1400	0.50869 5310
29	0.52751 8090	0.52773 5457	0.52793 9457	0.52812 9751	0.52830 6023	0.52846 7980
30	0.54735 9908	0.54760 3639	0.54783 2424	0.54804 5873	0.54824 3625	0.54842 5345
31	0.56738 5053	0.56765 7580	0.56791 3444	0.56815 2199	0.56837 3433	0.56857 6763
32	0.58760 2439	0.58790 6378	0.58819 1789	0.58845 8167	0.58870 5040	0.58893 1971
33	0.60802 1316	0.60835 9480	0.60867 7098	0.60897 3594	0.60924 8431	0.60950 1111
34	0.62865 1291	0.62902 6710	0.62937 9398	0.62970 8701	0.63001 4010	0.63029 4756
35	0.64950 2354	0.64991 8290	0.65030 9134	0.65067 4145	0.65101 2531	0.65132 3944
36	0.67058 4901	0.67104 4869	0.67147 7196	0.67188 1044	0.67225 5629	0.67260 0213
37	0.69190 9761	0.69241 7551	0.69289 4952	0.69334 1017	0.69375 4856	0.69413 5633
38	0.71348 8227	0.71404 7926	0.71457 4278	0.71506 6212	0.71552 2718	0.71594 2851
39	0.73533 2083	0.73594 8106	0.73652 7597	0.73706 9348	0.73757 2216	0.73803 5130
40	0.75745 3639	0.75813 0755	0.75876 7917	0.75936 3760	0.75991 6991	0.76042 6398
41	0.77986 5766	0.78060 9133	0.78130 8870	0.78196 3435	0.78257 1369	0.78313 1298
42	0.80258 1934	0.80339 7135	0.80416 4759	0.80488 3068	0.80555 0414	0.80616 5242
43	0.82561 6255	0.82650 9334	0.82735 0606	0.82813 8112	0.82886 9987	0.82954 4475
44	0.84898 3517	0.84996 1030	0.85088 2206	0.85174 4832	0.85254 6804	0.85328 6135
45	0.87269 9237	0.87376 8302	0.87477 6178	0.87572 0371	0.87659 8504	0.87740 8330

TABLE IX.

ϕ .	E (75°).	E (76°).	E (77°).	E (78°).	E (79°).	E (80°).
45°	0.71289 3043	0.71216 7663	0.71148 6981	0.71085 2100	0.71026 4054	0.70972 3805
46	0.72554 3272	0.72476 5957	0.72403 6448	0.72335 5941	0.72272 5563	0.72214 6362
47	0.73799 6034	0.73716 4145	0.73638 3311	0.73565 4835	0.73497 9939	0.73435 9765
48	0.75024 8517	0.74935 9318	0.74852 4572	0.74774 5692	0.74702 4008	0.74636 0761
49	0.76229 8019	0.76134 8674	0.76045 7330	0.75962 5522	0.75885 4692	0.75814 6189
50	0.77414 1952	0.77312 9521	0.77217 8794	0.77129 1434	0.77046 9008	0.76971 2979
51	0.78577 7848	0.78469 9284	0.78368 6281	0.78274 0646	0.78186 4075	0.78105 8159
52	0.79720 3366	0.79605 5506	0.79497 7226	0.79397 0483	0.79303 7119	0.79217 8858
53	0.80841 6296	0.80719 5858	0.80604 9184	0.80497 8390	0.80398 5473	0.80307 2307
54	0.81941 4566	0.81811 8144	0.81689 9835	0.81576 1929	0.81470 6589	0.81373 5849
55	0.83019 6249	0.82882 0309	0.82752 6996	0.82631 8790	0.82519 8036	0.82416 6939
56	0.84075 9573	0.83930 0442	0.83792 8622	0.83664 6798	0.83545 7510	0.83436 3151
57	0.85110 2928	0.84955 6788	0.84810 2816	0.84674 3916	0.84548 2840	0.84432 2183
58	0.86122 4876	0.85958 7759	0.85804 7838	0.85660 8256	0.85527 1993	0.85404 1866
59	0.87112 4160	0.86939 1939	0.86776 2115	0.86623 8088	0.86482 3087	0.86352 0168
60	0.88079 9718	0.87896 8098	0.87724 4249	0.87563 1847	0.87413 4394	0.87275 5204
61	0.89025 0696	0.88831 5205	0.88649 3031	0.88478 8149	0.88320 4354	0.88174 5244
62	0.89947 6458	0.89743 2440	0.89550 7453	0.89370 5796	0.89203 1584	0.89048 8724
63	0.90847 6609	0.90631 9212	0.90428 6724	0.90238 3798	0.90061 4894	0.89898 4258
64	0.91725 1007	0.91497 5171	0.91283 0285	0.91082 1383	0.90895 3300	0.90723 0649
65	0.92579 9784	0.92340 0236	0.92113 7832	0.91901 8017	0.91704 6037	0.91522 6908
66	0.93412 3370	0.93159 4609	0.92920 9330	0.92697 3425	0.92489 2585	0.92297 2268
67	0.94222 2516	0.93955 8804	0.93704 5045	0.93468 7614	0.93249 2688	0.93046 6207
68	0.95009 8324	0.94729 3674	0.94464 5566	0.94216 0899	0.93984 6379	0.93770 8471
69	0.95775 2274	0.95480 0442	0.95201 1841	0.94939 3937	0.94695 4009	0.94469 9102
70	0.96518 6263	0.96208 0737	0.95914 5210	0.95638 7757	0.95381 6285	0.95143 8469
71	0.97240 2640	0.96913 6634	0.96604 7445	0.96314 3808	0.96043 4306	0.95792 7312
72	0.97940 4252	0.97597 0700	0.97272 0802	0.96966 3999	0.96680 9614	0.96416 6778
73	0.98619 4489	0.98258 6044	0.97916 8068	0.97595 0763	0.97294 4248	0.97015 8485
74	0.99277 7339	0.98898 6372	0.98539 2625	0.98200 7109	0.97884 0804	0.97590 4579
75	0.99915 7443	0.99517 6055	0.99139 8518	0.98783 6704	0.98450 2519	0.98140 7814
76	1.00534 0157	1.00116 0193	0.99719 0531	0.99344 3953	0.98993 3351	0.98667 1642
77	1.01133 1618	1.00694 4694	1.00277 4275	0.99883 4092	0.99513 8086	0.99170 0319
78	1.01713 8816	1.01253 6356	1.00815 6278	1.00401 3299	1.00012 2457	0.99649 9035
79	1.02276 9661	1.01794 2950	1.01334 4091	1.00898 8807	1.00489 3275	1.00107 4067
80	1.02823 3053	1.02317 3309	1.01834 6395	1.01376 9041	1.00945 8588	1.00543 2947
81	1.03353 8948	1.02823 7415	1.02317 3109	1.01836 3751	1.01382 7847	1.00958 4670
82	1.03869 8415	1.03314 6476	1.02783 5499	1.02278 4156	1.01801 2086	1.01353 9916
83	1.04372 3676	1.03791 2989	1.03234 6271	1.02704 3075	1.02202 4105	1.01731 1292
84	1.04862 8125	1.04255 0787	1.03671 9648	1.03115 5044	1.02587 8644	1.02091 3574
85	1.05342 6318	1.04707 5042	1.04097 1402	1.03513 6398	1.02959 2518	1.02436 3932
86	1.05813 3931	1.05150 2238	1.04511 8851	1.03900 5290	1.03318 4698	1.02768 2086
87	1.06276 7670	1.05585 0083	1.04918 0771	1.04278 1633	1.03667 6290	1.03089 0362
88	1.06734 5141	1.06013 7366	1.05317 7252	1.04648 6951	1.04009 0390	1.03401 3579
89	1.07188 4677	1.06438 3754	1.05712 9461	1.05014 4104	1.04345 1785	1.03707 8722
90	1.07640 5113	1.06860 9533	1.06105 9334	1.05377 6920	1.04678 6499	1.04011 4396

φ.	F (75°).	F (76°).	F (77°).	F (78°).	F (79°).	F (80°).
45°	0.87269 9237	0.87376 8302	0.87477 6178	0.87572 0371	0.87659 8504	0.87740 8330
46	0.89677 9712	0.89794 8062	0.89905 0034	0.90008 2817	0.90104 3724	0.90193 0214
47	0.92124 2067	0.92251 8115	0.92372 2240	0.92485 1270	0.92590 2173	0.92687 2074
48	0.94610 4317	0.94749 7224	0.94881 2288	0.95004 5931	0.95119 4727	0.95225 5424
49	0.97138 5421	0.97290 5177	0.97434 0775	0.97568 8179	0.97694 3518	0.97810 3110
50	0.99710 5354	0.99876 2865	1.00032 9490	1.00180 0674	1.00317 2141	1.00443 9424
51	1.02328 5169	1.02509 2357	1.02680 1498	1.02840 7452	1.02990 5270	1.03129 0230
52	1.04994 7077	1.05191 6991	1.05378 1248	1.05553 4044	1.05716 9781	1.05868 3104
53	1.07711 4521	1.07926 1463	1.08129 4672	1.08320 7594	1.08499 3891	1.08664 7488
54	1.10481 2258	1.10715 1926	1.10936 9307	1.11145 6996	1.11340 7813	1.11521 4858
55	1.13306 6451	1.13561 6079	1.13803 4419	1.14031 3039	1.14244 3819	1.14441 8918
56	1.16190 4755	1.16468 3555	1.16732 1134	1.16980 8563	1.17213 6425	1.17429 5801
57	1.19135 6415	1.19438 4925	1.19726 2593	1.19997 8638	1.20252 2598	1.20488 4311
58	1.22145 2366	1.22475 3902	1.22789 4097	1.23086 0751	1.23364 1971	1.23622 6172
59	1.25222 5332	1.25582 5454	1.25925 3285	1.26249 5009	1.26553 7094	1.26836 6318
60	1.28370 9928	1.28763 6943	1.29138 0307	1.29492 4363	1.29825 3702	1.30135 3213
61	1.31594 2763	1.32022 8066	1.32431 8014	1.32819 4848	1.33184 1007	1.33523 9202
62	1.34896 2535	1.35364 1002	1.35811 2155	1.36235 5840	1.36635 2025	1.37008 0904
63	1.38281 0121	1.38792 0552	1.39281 1583	1.39746 0332	1.40184 3927	1.40593 9647
64	1.41752 8656	1.42311 4279	1.42846 8466	1.43356 5223	1.43837 8420	1.44288 1952
65	1.45316 3588	1.45927 2632	1.46513 8489	1.47073 1625	1.47602 2157	1.48098 0063
66	1.48976 2713	1.49644 9058	1.50288 1064	1.50902 5169	1.51484 7183	1.52031 2532
67	1.52737 6164	1.53470 0075	1.54175 9503	1.54851 6323	1.55493 1393	1.56096 4856
68	1.56605 6353	1.57408 5305	1.58184 1181	1.58928 0688	1.59635 9013	1.60303 0167
69	1.60585 7841	1.61466 7446	1.62319 7628	1.63139 9276	1.63922 1089	1.64660 9966
70	1.64683 7113	1.65651 2149	1.66590 4562	1.67495 8726	1.68361 5948	1.69181 4892
71	1.68905 2235	1.69968 7781	1.71004 1803	1.72005 1438	1.72964 9618	1.73876 5505
72	1.73256 2353	1.74426 5022	1.75569 3034	1.76677 5575	1.77743 6159	1.78759 3036
73	1.77742 6998	1.79031 6254	1.80294 5345	1.81523 4854	1.82709 7825	1.83844 0066
74	1.82370 5143	1.83791 4673	1.85188 8487	1.86553 8061	1.87876 4978	1.89146 1010
75	1.87145 3964	1.88713 3051	1.90261 3730	1.91779 8142	1.93257 5604	1.94682 2305
76	1.92072 7240	1.93804 2064	1.95521 2223	1.97213 0750	1.98867 4269	2.00470 2066
77	1.97157 3334	1.99070 8091	2.00977 2696	2.02865 2019	2.04721 0233	2.06528 8939
78	2.02403 2706	2.04519 0371	2.06637 8355	2.08747 5353	2.10833 4427	2.12877 9715
79	2.07813 4920	2.10153 7463	2.12510 2807	2.14870 6952	2.17219 4857	2.19537 5155
80	2.13389 5144	2.15978 2927	2.18600 4861	2.21243 9773	2.23892 9961	2.26527 3261
81	2.19131 0204	2.21994 0244	2.24912 2128	2.27874 5684	2.30865 9371	2.33865 9082
82	2.25035 4329	2.28199 7092	2.31446 3442	2.34766 5656	2.38147 1626	2.41569 0023
83	2.31097 4823	2.34590 9231	2.38200 0341	2.41919 8096	2.45740 8567	2.49647 5729
84	2.37308 8040	2.41159 4470	2.45165 8139	2.49328 5824	2.53644 6712	2.58105 2135
85	2.43657 6137	2.47892 7378	2.52330 7475	2.56980 2810	2.61847 6760	2.66935 0448
86	2.50128 5198	2.54773 5614	2.59675 7647	2.64854 2513	2.70328 3726	2.76116 3994
87	2.56702 5291	2.61779 8834	2.67175 3276	2.72921 0333	2.79053 1625	2.85611 8747
88	2.63357 2960	2.68885 1060	2.74797 5893	2.81142 3003	2.87975 7703	2.95365 6298
89	2.70067 6392	2.76058 7039	2.82505 1583	2.89471 7290	2.97038 1101	3.05303 9141
90	2.76806 3145	2.83267 2583	2.90256 4941	2.97856 8952	3.06172 8612	3.15338 5252

TABLE IX.

ϕ .	E(80°).	E(81°).	E(82°).	E(83°).	E(84°).	E(85°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2433	0.01745 2428	0.01745 2424	0.01745 2420	0.01745 2416	0.01745 2413
2	0.03489 9711	0.03489 9670	0.03489 9634	0.03489 9602	0.03489 9574	0.03489 9551
3	0.05233 6678	0.05233 6542	0.05233 6420	0.05233 6312	0.05233 6218	0.05233 6138
4	0.06975 8185	0.06975 7862	0.06975 7573	0.06975 7316	0.06975 7094	0.06975 6905
5	0.08715 9085	0.08715 8455	0.08715 7890	0.08715 7389	0.08715 6954	0.08715 6585
6	0.10453 4241	0.10453 3152	0.10453 2174	0.10453 1309	0.10453 0557	0.10452 9919
7	0.12187 8521	0.12187 6792	0.12187 5239	0.12187 3864	0.12187 2669	0.12187 1656
8	0.13918 6807	0.13918 4224	0.13918 1905	0.13917 9852	0.13917 8067	0.13917 6554
9	0.15645 3990	0.15645 0311	0.15644 7007	0.15644 4082	0.15644 1540	0.15643 9384
10	0.17367 4975	0.17366 9926	0.17366 5392	0.17366 1378	0.17365 7889	0.17365 4929
11	0.19084 4685	0.19083 7961	0.19083 1922	0.19082 6576	0.19082 1931	0.19081 7987
12	0.20795 8058	0.20794 9322	0.20794 1477	0.20793 4531	0.20792 8496	0.20792 3373
13	0.22501 0050	0.22499 8935	0.22498 8953	0.22498 0116	0.22497 2437	0.22496 5919
14	0.24199 5640	0.24198 1747	0.24195 8269	0.24195 8223	0.24194 8624	0.24194 0477
15	0.25890 9827	0.25889 2725	0.25887 7365	0.25886 3767	0.25885 1949	0.25884 1920
16	0.27574 7635	0.27572 6861	0.27570 8203	0.27569 1684	0.27567 7327	0.27566 5144
17	0.29250 4115	0.29247 9173	0.29245 6770	0.29243 6937	0.29241 9698	0.29240 5071
18	0.30917 4342	0.30914 4704	0.30911 8083	0.30909 4514	0.30907 4028	0.30905 6646
19	0.32575 3423	0.32571 8528	0.32568 7184	0.32565 9433	0.32563 5311	0.32561 4844
20	0.34223 6495	0.34219 5747	0.34215 9146	0.34212 6739	0.34209 8570	0.34207 4669
21	0.35861 8728	0.35857 1498	0.35852 9074	0.35849 1511	0.35845 8859	0.35843 1155
22	0.37489 5325	0.37484 0950	0.37479 2107	0.37474 8859	0.37471 1265	0.37467 9368
23	0.39106 1525	0.39099 9307	0.39094 3418	0.39089 3930	0.39085 0910	0.39081 4409
24	0.40711 2606	0.40704 1812	0.40697 8217	0.40692 1904	0.40687 2951	0.40683 1415
25	0.42304 3885	0.42296 3746	0.42289 1753	0.42282 8003	0.42277 2582	0.42272 5558
26	0.43885 0721	0.43876 0429	0.43867 9314	0.43860 7484	0.43854 5037	0.43849 2051
27	0.45452 8513	0.45442 7226	0.45433 6230	0.45425 5648	0.45418 5591	0.45412 6146
28	0.47007 2707	0.46995 9544	0.46985 7875	0.46976 7838	0.46968 9559	0.46962 3137
29	0.48547 8796	0.48535 2836	0.48523 9667	0.48513 9442	0.48505 2303	0.48497 8361
30	0.50074 2319	0.50060 2604	0.50047 7070	0.50036 5893	0.50026 9227	0.50018 7200
31	0.51585 8868	0.51570 4397	0.51556 5600	0.51544 2671	0.51533 5784	0.51524 5082
32	0.53082 4084	0.53065 3816	0.53050 0818	0.53036 5307	0.53024 7475	0.53014 7484
33	0.54563 3663	0.54544 6514	0.54527 8339	0.54512 9381	0.54499 9849	0.54488 9930
34	0.56028 3357	0.56007 8198	0.55989 3833	0.55973 0526	0.55958 8512	0.55946 7998
35	0.57476 8973	0.57454 4634	0.57434 3022	0.57416 4430	0.57400 9119	0.57387 7315
36	0.58908 6381	0.58884 1643	0.58862 1686	0.58842 6836	0.58825 7379	0.58811 3565
37	0.60323 1509	0.60296 5106	0.60272 5665	0.60251 3544	0.60232 9058	0.60217 2485
38	0.61720 0350	0.61691 0967	0.61665 0857	0.61642 0413	0.61621 9983	0.61604 9870
39	0.63098 8961	0.63067 5232	0.63039 3223	0.63014 3363	0.62992 6036	0.62974 1574
40	0.64459 3468	0.64425 3976	0.64394 8789	0.64367 8377	0.64344 3162	0.64324 3509
41	0.65801 0066	0.65764 3338	0.65731 3644	0.65702 1501	0.65676 7369	0.65655 1650
42	0.67123 5019	0.67083 9527	0.67048 3947	0.67016 8848	0.66989 4730	0.66966 2034
43	0.68426 4670	0.68383 8825	0.68345 5927	0.68311 6596	0.68282 1381	0.68257 0763
44	0.69709 5433	0.69663 7587	0.69622 5883	0.69586 0997	0.69554 3529	0.69527 4004
45	0.70972 3805	0.70923 2245	0.70879 0187	0.70839 8370	0.70805 7448	0.70776 7994

TABLE IX.

ϕ .	F(80°).	F(81°).	F(82°).	F(83°).	F(84°).	F(85°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4152	0.01745 4157	0.01745 4162	0.01745 4165	0.01745 4169	0.01745 4172
2	0.03491 3462	0.03491 3502	0.03491 3539	0.03491 3571	0.03491 3599	0.03491 3622
3	0.05238 3096	0.05238 3232	0.05238 3354	0.05238 3463	0.05238 3557	0.05238 3636
4	0.06986 8234	0.06986 8557	0.06986 8847	0.06986 9104	0.06986 9328	0.06986 9517
5	0.08737 4079	0.08737 4711	0.08737 5279	0.08737 5782	0.08737 6219	0.08737 6590
6	0.10490 5863	0.10490 6959	0.10490 7943	0.10490 8814	0.10490 9571	0.10491 0213
7	0.12246 8858	0.12247 0603	0.12247 2170	0.12247 3557	0.12247 4762	0.12247 5785
8	0.14006 8380	0.14007 0992	0.14007 3338	0.14007 5415	0.14007 7220	0.14007 8752
9	0.15770 9798	0.15771 3530	0.15771 6882	0.15772 9850	0.15772 2429	0.15772 4618
10	0.17539 8543	0.17540 3682	0.17540 8299	0.17541 2387	0.17541 5940	0.17541 8953
11	0.19314 0116	0.19314 6987	0.19315 3159	0.19315 8624	0.19316 3374	0.19316 7403
12	0.21094 0098	0.21094 9061	0.21095 7113	0.21096 4242	0.21097 0440	0.21097 5697
13	0.22880 4156	0.22881 5612	0.22882 5904	0.22883 5016	0.22884 2938	0.22884 9658
14	0.24673 8054	0.24675 2444	0.24676 5372	0.24677 6819	0.24678 6771	0.24679 5213
15	0.26474 7663	0.26476 5472	0.26478 1471	0.26479 5637	0.26480 7954	0.26481 8403
16	0.28283 8971	0.28286 0727	0.28288 0272	0.28289 5780	0.28291 2629	0.28292 5396
17	0.30101 8092	0.30104 4371	0.30106 7981	0.30108 8890	0.30110 7070	0.30112 2494
18	0.31929 1276	0.31932 2705	0.31935 0944	0.31937 5953	0.31936 7699	0.31941 6149
19	0.33766 4926	0.33770 2184	0.33773 5662	0.33776 5313	0.33779 1097	0.33781 2974
20	0.35614 5602	0.35618 9425	0.35622 8805	0.35626 3685	0.35629 4017	0.35631 9755
21	0.37474 0041	0.37479 1225	0.37483 7222	0.37487 7966	0.37491 3399	0.37494 3468
22	0.39345 5166	0.39351 4569	0.39356 7958	0.39361 5252	0.39365 6383	0.39369 1289
23	0.41229 8101	0.41236 6651	0.41242 8265	0.41248 2850	0.41253 0325	0.41257 0616
24	0.43127 6186	0.43135 4883	0.43142 5623	0.43148 8297	0.43154 2812	0.43158 9081
25	0.45039 6993	0.45048 6914	0.45056 7751	0.45063 9378	0.45070 1683	0.45075 4568
26	0.46966 8343	0.46977 0650	0.46986 2631	0.46994 4139	0.47001 5045	0.47007 5234
27	0.48909 8324	0.48921 4270	0.48931 8522	0.48941 0913	0.48949 1292	0.48955 9528
28	0.50869 5310	0.50882 6242	0.50894 3982	0.50904 8335	0.50913 9130	0.50921 6213
29	0.52846 7980	0.52861 5352	0.52874 7890	0.52886 5370	0.52896 7596	0.52905 4390
30	0.54842 5345	0.54859 0721	0.54873 9469	0.54887 1333	0.54898 6084	0.54908 3523
31	0.56857 6763	0.56876 1831	0.56892 8313	0.56907 5915	0.56920 4375	0.56931 3462
32	0.58893 1971	0.58913 8552	0.58932 4411	0.58948 9213	0.58963 2657	0.58975 4481
33	0.60950 1111	0.60973 1168	0.60993 8178	0.61012 1758	0.61028 1565	0.61041 7299
34	0.63029 4756	0.63055 0408	0.63078 0487	0.63098 4551	0.63116 2210	0.63131 3123
35	0.65132 3944	0.65160 7483	0.65186 2699	0.65208 9091	0.65228 6215	0.65245 3680
36	0.67250 0213	0.67291 4114	0.67319 6706	0.67344 7422	0.67366 5754	0.67385 1258
37	0.69413 5633	0.69448 2573	0.69479 4967	0.69507 2186	0.69531 3597	0.69551 8751
38	0.71594 2851	0.71632 5730	0.71667 0550	0.71697 6576	0.71724 3154	0.71746 9707
39	0.73803 5130	0.73845 7091	0.73883 7185	0.73917 4579	0.73946 8527	0.73971 8377
40	0.76042 6398	0.76089 0850	0.76130 9309	0.76168 0829	0.76200 4566	0.76227 9775
41	0.78313 1298	0.78364 1943	0.78410 2125	0.78451 0774	0.78486 6928	0.78516 9743
42	0.80616 5242	0.80672 6105	0.80723 1666	0.80768 0709	0.80807 2144	0.80840 5013
43	0.82954 4475	0.83015 9936	0.83071 4856	0.83120 7854	0.83163 7695	0.83200 3287
44	0.85328 6135	0.85396 0969	0.85456 9589	0.85511 0430	0.85558 2087	0.85598 3323
45	0.87740 8330	0.87814 7747	0.87881 4810	0.87940 7742	0.87992 4947	0.88036 5019

TABLE IX.

ϕ .	E (80°).	E (81°).	E (82°).	E (83°).	E (84°).	E (85°).
45°	0.70972 3805	0.70923 2245	0.70879 0187	0.70839 8370	0.70805 7448	0.70776 7994
46	0.72214 6362	0.72161 9308	0.72114 5290	0.72072 5110	0.72035 9484	0.72004 9036
47	0.73435 9765	0.73379 5369	0.73328 7717	0.73283 7686	0.73244 6055	0.73211 3506
48	0.74636 0761	0.74575 7100	0.74521 4077	0.74473 2645	0.74431 3655	0.74395 7850
49	0.75814 6189	0.75750 1263	0.75692 1058	0.75640 6614	0.75595 8854	0.75557 8590
50	0.76971 2979	0.76902 4707	0.76840 5437	0.76785 6299	0.76737 8300	0.76697 2324
51	0.78105 8159	0.78032 4375	0.77966 4077	0.77907 8494	0.77856 8723	0.77813 5725
52	0.79217 8858	0.79139 7305	0.79069 3933	0.79007 0077	0.78952 6934	0.78906 5549
53	0.80307 2307	0.80224 0633	0.80149 2052	0.80082 8017	0.80024 9829	0.79975 8629
54	0.81373 5849	0.81285 1600	0.81205 5581	0.81134 9374	0.81073 4394	0.81021 1885
55	0.82416 6939	0.82322 7552	0.82238 1766	0.82163 1303	0.82097 7703	0.82042 2320
56	0.83436 3151	0.83336 5949	0.83246 7961	0.83167 1060	0.83097 6923	0.83038 7027
57	0.84432 2183	0.84326 4367	0.84231 1627	0.84146 6001	0.84072 9318	0.84010 3187
58	0.85404 1866	0.85292 0504	0.85191 0339	0.85101 3590	0.85023 2250	0.84956 8074
59	0.86352 0168	0.86233 2189	0.86126 1794	0.86031 1401	0.85948 5185	0.85877 9060
60	0.87275 5204	0.87149 7384	0.87036 3813	0.86935 7126	0.86847 9695	0.86773 3614
61	0.88174 5244	0.88041 4198	0.87921 4351	0.87814 8576	0.87721 9465	0.87642 9307
62	0.89048 8724	0.88908 0891	0.88781 1502	0.88668 3693	0.88570 0296	0.88486 3817
63	0.89898 4258	0.89749 5888	0.89615 3510	0.89496 0552	0.89392 0112	0.89303 4934
64	0.90723 0649	0.90565 7787	0.90423 8779	0.90297 7374	0.90187 6965	0.90094 0563
65	0.91522 6908	0.91356 5376	0.91206 5884	0.91073 2533	0.90956 9045	0.90857 8731
66	0.92297 2268	0.92121 7648	0.91963 3583	0.91822 4568	0.91699 4691	0.91594 7594
67	0.93046 6207	0.92861 3818	0.92694 0838	0.92545 2197	0.92415 2395	0.92304 5445
68	0.93770 8471	0.93575 3345	0.93398 6827	0.93241 4334	0.93104 0821	0.92987 0725
69	0.94469 9102	0.94263 5960	0.94077 0974	0.93911 0103	0.93765 8819	0.93642 2030
70	0.95143 8469	0.94926 1692	0.94729 2968	0.94553 8867	0.94400 5439	0.94269 8131
71	0.95792 7312	0.95565 0906	0.95355 2802	0.95170 0253	0.95007 9961	0.94869 7987
72	0.96416 6778	0.96174 4346	0.95955 0807	0.95759 4182	0.95588 1917	0.95442 0768
73	0.97015 8485	0.96760 3183	0.96528 7699	0.96322 0916	0.96141 1124	0.95986 5880
74	0.97590 4579	0.97320 9083	0.97076 4640	0.96858 1107	0.96666 7733	0.96503 3000
75	0.98140 7814	0.97856 4276	0.97598 3305	0.97367 5856	0.97165 2278	0.96992 2118
76	0.98667 1642	0.98367 1649	0.98094 5969	0.97850 6800	0.97636 5744	0.97453 3589
77	0.99170 0319	0.98853 4854	0.98565 5618	0.98307 6205	0.98080 9660	0.97886 8210
78	0.99649 9035	0.99315 8446	0.99011 6078	0.98738 7102	0.98498 6210	0.98292 7314
79	1.00107 4067	0.99754 8039	0.99433 2188	0.99144 3443	0.98889 8385	0.98671 2895
80	1.00543 2947	1.00171 0505	0.99831 0002	0.99525 0318	0.99255 0186	0.99022 7789
81	1.00958 4670	1.00565 4204	1.00205 7047	0.99881 4222	0.99594 6887	0.99347 5913
82	1.01353 9916	1.00938 9254	1.00558 2639	1.00214 3399	0.99909 5396	0.99646 2601
83	1.01731 1292	1.01292 7841	1.00889 8258	1.00524 8285	1.00200 4731	0.99919 5089
84	1.02091 3574	1.01628 4549	1.01201 7982	1.00814 2050	1.00468 6656	1.00168 3193
85	1.02436 3932	1.01947 6693	1.01495 8964	1.01084 1239	1.00715 6504	1.00394 0267
86	1.02768 2086	1.02252 4606	1.01774 1901	1.01336 6486	1.00943 4185	1.00598 4534
87	1.03089 0362	1.02545 1813	1.02039 1392	1.01574 3186	1.01154 5314	1.00784 0791
88	1.03401 3579	1.02828 4991	1.02293 6078	1.01800 1931	1.01352 2194	1.00954 2324
89	1.03707 8722	1.03105 3651	1.02540 8362	1.02017 8426	1.01540 4202	1.01113 2321
90	1.04011 4396	1.03378 9462	1.02784 3620	1.02231 2588	1.01723 6918	1.01266 3506

TABLE IX.

ϕ .	F (80°).	F (81°).	F (82°).	F (83°).	F (84°).	F (85°).
45°	0.87740 8330	0.87814 7747	0.87881 4810	0.87940 7742	0.87992 4947	0.88036 5019
46	0.90193 0214	0.90273 9909	0.90347 0601	0.90412 0274	0.90468 7115	0.90516 9526
47	0.92687 2074	0.92775 8278	0.92855 8281	0.92926 9795	0.92989 0758	0.93041 9350
48	0.95225 5424	0.95322 4967	0.95410 0517	0.95487 9471	0.95555 9486	0.95613 8489
49	0.97810 3110	0.97916 3492	0.98012 1440	0.98097 3996	0.98171 8491	0.98235 2565
50	1.00443 9424	1.00559 8892	1.00664 6783	1.00757 9731	1.00839 4696	1.00908 8985
51	1.03129 0230	1.03255 7870	1.03370 4026	1.03472 4866	1.03561 6921	1.03637 7118
52	1.05868 3104	1.06006 8945	1.06132 2565	1.06243 9595	1.06341 6074	1.06424 8490
53	1.08664 7488	1.08816 2621	1.08953 3891	1.09075 6313	1.09182 5360	1.09273 7010
54	1.11521 4858	1.11687 1573	1.11837 1800	1.11970 9843	1.12088 0519	1.12187 9217
55	1.14441 8918	1.14623 0863	1.14787 2624	1.14933 7682	1.15062 0095	1.15171 4570
56	1.17429 5801	1.17627 8168	1.17807 5486	1.17968 0285	1.18108 5743	1.18228 5770
57	1.20488 4311	1.20705 4046	1.20902 2695	1.21078 1385	1.21232 2569	1.21363 9126
58	1.23622 6172	1.23860 2225	1.24075 9572	1.24268 8355	1.24437 9527	1.24582 4981
59	1.26836 6318	1.27096 9937	1.27333 5822	1.27545 2615	1.27730 9868	1.27889 8194
60	1.30135 3213	1.30420 8282	1.30680 4951	1.30913 0106	1.31117 1655	1.31291 8700
61	1.33523 9202	1.33837 2644	1.34122 5241	1.34378 1821	1.34602 8352	1.34795 2151
62	1.37008 0904	1.37352 3156	1.37666 0192	1.37947 4421	1.38194 9512	1.38407 0664
63	1.40503 9647	1.40972 5223	1.41317 9134	1.41628 0932	1.41901 1563	1.42135 3695
64	1.44288 1952	1.44705 0110	1.45085 7925	1.45428 1565	1.45729 8729	1.45988 9057
65	1.48098 0063	1.48557 5605	1.48977 9749	1.49356 4640	1.49690 4097	1.49977 4115
66	1.52031 2532	1.52538 6760	1.53003 6023	1.53422 7676	1.53793 0873	1.54111 7203
67	1.56096 4856	1.56657 6719	1.57172 7440	1.57637 8640	1.58049 3849	1.58403 9299
68	1.60303 0167	1.60924 7648	1.61496 5146	1.62013 7403	1.62472 1135	1.62867 6027
69	1.64660 9966	1.65351 1755	1.65987 2092	1.66563 7435	1.67075 6206	1.67518 0049
70	1.69181 4892	1.69949 2418	1.70658 4561	1.71302 7771	1.71876 0333	1.72372 3953
71	1.73876 5505	1.74732 5402	1.75525 3889	1.76247 5299	1.76891 5468	1.77450 3742
72	1.78759 3036	1.79716 0147	1.80604 8399	1.81416 7416	1.82142 7683	1.82774 3083
73	1.83844 0066	1.84916 1091	1.85915 5518	1.86831 5087	1.87653 1276	1.88369 8506
74	1.89145 1010	1.90350 8955	1.91478 4071	1.92525 6351	1.93449 3662	1.94266 5774
75	1.94682 2305	1.96040 1862	1.97316 6655	1.98496 0272	1.99562 1183	2.00498 7756
76	2.00470 2066	2.02005 6097	2.03456 1958	2.04803 1301	2.06026 5968	2.07106 4130
77	2.06528 8939	2.08270 6204	2.09925 6741	2.11471 3882	2.12883 3920	2.14136 3376
78	2.12877 9715	2.14860 3925	2.16756 7010	2.18539 6970	2.20179 3780	2.21643 7516
79	2.19537 5155	2.21801 5285	2.23983 7607	2.26051 7772	2.27968 6976	2.29694 0029
80	2.26527 3261	2.29121 4789	2.31643 8965	2.34056 3450	2.36313 7361	2.38364 7090
81	2.33865 9082	2.36847 5306	2.39775 9091	2.42606 8530	2.45285 8880	2.47748 1512
82	2.41569 0023	2.45005 1818	2.48418 7936	2.51760 4238	2.54965 7120	2.57953 6804
83	2.49647 5729	2.53615 6904	2.57609 0247	2.61575 3683	2.65441 6992	2.69109 4397
84	2.58105 2135	2.62692 6038	2.67376 2203	2.72106 3915	2.76806 2632	2.81361 7754
85	2.66935 0448	2.72237 2007	2.77736 7475	2.83396 3302	2.89146 6641	2.94868 8755
86	2.76116 3994	2.82233 0812	2.88685 1750	2.95463 3512	3.02527 6781	3.09782 0285
87	2.85611 8747	2.92640 6812	3.00184 3391	3.08283 5807	3.16963 0126	3.26197 9246
88	2.95365 6298	3.03393 1831	3.12156 2966	3.21771 9649	3.32376 4936	3.44116 0392
89	3.05303 9141	3.14395 8147	3.24478 1053	3.35768 7267	3.48564 2253	3.63279 2864
90	3.15338 5252	3.25530 2942	3.36986 8027	3.50042 2499	3.65185 5969	3.83174 2000

TABLE IX.

ϕ .	E(85°).	E(86°).	E(87°).	E(88°).	E(89°).	E(90°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 2413	0.01745 2411	0.01745 2409	0.01745 2408	0.01745 2407	0.01745 2406
2	0.03489 9551	0.03489 9551	0.03489 9516	0.03489 9505	0.03489 9498	0.03489 9497
3	0.05233 6138	0.05233 6073	0.05233 6022	0.05233 5985	0.05233 5963	0.05233 5956
4	0.06975 6905	0.06975 6750	0.06975 6629	0.06975 6543	0.06975 6491	0.06975 6474
5	0.08715 6585	0.08715 6282	0.08715 6046	0.08715 5878	0.08715 5776	0.08715 5743
6	0.10452 9919	0.10452 9396	0.10452 8988	0.10452 8697	0.10452 8521	0.10452 8463
7	0.12187 1656	0.12187 0825	0.12187 0177	0.12186 9714	0.12186 9436	0.12186 9343
8	0.13917 6554	0.13917 5313	0.13917 4346	0.13917 3655	0.13917 3239	0.13917 3101
9	0.15643 9384	0.15643 7616	0.15643 6239	0.15643 5254	0.15643 4662	0.15643 4465
10	0.17365 4929	0.17365 2503	0.17365 0612	0.17364 9261	0.17364 8448	0.17364 8178
11	0.19081 7987	0.19081 4756	0.19081 2238	0.19081 0438	0.19080 9356	0.19080 8995
12	0.20792 3373	0.20791 9175	0.20791 5903	0.20791 3564	0.20791 2159	0.20791 1691
13	0.22496 5919	0.22496 0577	0.22495 6414	0.22495 3438	0.22495 1650	0.22495 1054
14	0.24194 0477	0.24193 3799	0.24192 8596	0.24192 4875	0.24192 2641	0.24192 1896
15	0.25884 1920	0.25883 3699	0.25882 7294	0.25882 2713	0.25881 9962	0.25881 9045
16	0.27566 5144	0.27565 5157	0.27564 7377	0.27564 1812	0.27563 8470	0.27563 7356
17	0.29240 5071	0.29239 3079	0.29238 3737	0.29237 7055	0.29237 3043	0.29237 1705
18	0.30905 6646	0.30904 2396	0.30903 1293	0.30902 3353	0.30901 8585	0.30901 6994
19	0.32561 4844	0.32559 8065	0.32558 4992	0.32557 5642	0.32557 0027	0.32556 8154
20	0.34207 4669	0.34205 5074	0.34203 9807	0.34202 8887	0.34202 2330	0.34202 0143
21	0.35843 1155	0.35840 8440	0.35839 0743	0.35837 8085	0.35837 0484	0.35836 7950
22	0.37467 9368	0.37465 3214	0.37463 2838	0.37461 8264	0.37460 9512	0.37460 6593
23	0.39081 4409	0.39078 4480	0.39076 1162	0.39074 4484	0.39073 4468	0.39073 1128
24	0.40683 1415	0.40679 7357	0.40677 0821	0.40675 1842	0.40674 0444	0.40673 6643
25	0.42272 5558	0.42268 7000	0.42265 6957	0.42263 5470	0.42262 2565	0.42261 8262
26	0.43849 2051	0.43844 8604	0.43841 4751	0.43839 0537	0.43837 5996	0.43837 1147
27	0.45412 6146	0.45407 7402	0.45403 9421	0.45401 2255	0.45399 5940	0.45399 0500
28	0.46962 3137	0.46956 8670	0.46952 6229	0.46949 5873	0.46947 7642	0.46947 1563
29	0.48497 8361	0.48491 7726	0.48487 0479	0.48483 6684	0.48481 6389	0.48480 9620
30	0.50018 7200	0.50011 9933	0.50006 7517	0.50003 0026	0.50000 7509	0.50000 0000
31	0.51524 5082	0.51517 0699	0.51511 2737	0.51507 1278	0.51504 6379	0.51503 8075
32	0.53014 7484	0.53006 5480	0.53000 1579	0.52995 5871	0.52992 8419	0.52991 9264
33	0.54488 9930	0.54479 9781	0.54472 9530	0.54467 9280	0.54464 9100	0.54463 9035
34	0.55946 7998	0.55936 9155	0.55929 2129	0.55923 7031	0.55920 3939	0.55919 2903
35	0.57387 7315	0.57376 9210	0.57368 4965	0.57362 4701	0.57358 8507	0.57357 6436
36	0.58811 3565	0.58799 5606	0.58790 3679	0.58783 7919	0.58779 8424	0.58778 5252
37	0.60217 2485	0.60204 4057	0.60194 3968	0.60187 2368	0.60182 9365	0.60181 5023
38	0.61604 9870	0.61591 0332	0.61580 1582	0.61572 3785	0.61567 7058	0.61566 1475
39	0.62974 1574	0.62959 0260	0.62947 2330	0.62938 7963	0.62933 7290	0.62932 0391
40	0.64324 3509	0.64307 9728	0.64295 2077	0.64286 0754	0.64280 5903	0.64278 7610
41	0.65655 1650	0.65637 4682	0.65623 6749	0.65613 8068	0.65607 8797	0.65605 9029
42	0.66966 2034	0.66947 1132	0.66932 2333	0.66921 5876	0.66915 1932	0.66913 0606
43	0.68257 0763	0.68236 5149	0.68220 4877	0.68209 0208	0.68202 1331	0.68199 8360
44	0.69527 4004	0.69505 2870	0.69488 0493	0.69475 7160	0.69468 3078	0.69465 8370
45	0.70776 7994	0.70753 0497	0.70734 5358	0.70721 2890	0.70713 3320	0.70710 6781

hhh

ϕ .	F(85°).	F(86°).	F(87°).	F(88°).	F(89°).	F(90°).
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000
1	0.01745 4172	0.01745 4174	0.01745 4176	0.01745 4178	0.01745 4178	0.01745 4179
2	0.03491 3622	0.03491 3641	0.03491 3657	0.03491 3667	0.03491 3674	0.03491 3676
3	0.05238 3636	0.05238 3702	0.05238 3753	0.05238 3789	0.05238 3811	0.05238 3819
4	0.06986 9517	0.06986 9673	0.06986 9794	0.06986 9880	0.06986 9932	0.06986 9949
5	0.08737 6590	0.08737 6894	0.08737 7131	0.08737 7300	0.08737 7402	0.08737 7436
6	0.10491 0213	0.10491 0740	0.10491 1150	0.10491 1443	0.10491 1620	0.10491 1678
7	0.12247 5785	0.12247 6623	0.12247 7277	0.12247 7743	0.12247 8025	0.12247 8118
8	0.14007 8752	0.14008 0007	0.14008 0986	0.14008 1685	0.14008 2105	0.14008 2245
9	0.15772 4618	0.15772 6412	0.15772 7810	0.15772 8810	0.15772 9410	0.15772 9610
10	0.17541 8953	0.17542 1425	0.17542 3350	0.17542 4727	0.17542 5554	0.17542 5830
11	0.19316 7403	0.19317 0707	0.19317 3282	0.19317 5123	0.19317 6229	0.19317 6597
12	0.21097 5697	0.21098 0008	0.21098 3367	0.21098 5769	0.21098 7212	0.21098 7693
13	0.22884 9658	0.22885 5168	0.22885 9462	0.22886 2533	0.22886 4377	0.22886 4992
14	0.24679 5213	0.24680 2136	0.24680 7530	0.24681 1388	0.24681 3704	0.24681 4477
15	0.26481 8403	0.26482 6972	0.26483 3648	0.26483 8424	0.26484 1291	0.26484 2248
16	0.28292 5396	0.28293 5866	0.28294 4024	0.28294 9859	0.28295 3362	0.28295 4531
17	0.30112 2494	0.30113 5143	0.30114 5000	0.30115 2050	0.30115 6283	0.30115 7695
18	0.31941 6149	0.31943 1281	0.31944 3072	0.31945 1506	0.31945 6570	0.31945 8259
19	0.33781 2974	0.33783 0916	0.33784 4898	0.33785 4899	0.33786 0905	0.33786 2908
20	0.35631 9755	0.35634 0864	0.35635 7315	0.35636 9081	0.35637 6148	0.35637 8505
21	0.37494 3468	0.37496 8129	0.37498 7348	0.37500 1096	0.37500 9352	0.37501 2106
22	0.39369 1289	0.39371 9920	0.39374 2232	0.39375 8194	0.39376 7780	0.39377 0977
23	0.41257 0616	0.41260 3666	0.41262 9423	0.41264 7849	0.41265 8916	0.41266 2606
24	0.43158 9081	0.43162 7035	0.43165 6616	0.43167 7779	0.43169 0488	0.43169 4727
25	0.45075 4568	0.45079 7951	0.45083 1765	0.45085 5956	0.45087 0485	0.45087 5330
26	0.47007 5234	0.47012 4611	0.47016 3099	0.47019 0634	0.47020 7173	0.47021 2688
27	0.48955 9528	0.48961 5510	0.48965 9147	0.48969 0368	0.48970 9121	0.48971 5374
28	0.50921 6213	0.50927 9438	0.50932 8759	0.50936 4033	0.50938 5220	0.50939 2286
29	0.52905 4390	0.52912 5608	0.52918 1126	0.52922 0850	0.52924 4711	0.52925 2670
30	0.54908 3523	0.54916 3479	0.54922 5813	0.54927 0416	0.54929 7208	0.54930 6144
31	0.56931 3462	0.56940 2984	0.56947 2781	0.56952 2725	0.56955 2727	0.56956 2733
32	0.58975 4481	0.58985 4462	0.58993 2418	0.58998 8204	0.59002 1715	0.59003 2893
33	0.61041 7299	0.61052 8706	0.61061 5576	0.61067 7743	0.61071 5090	0.61072 7547
34	0.63131 3123	0.63143 7000	0.63153 3599	0.63160 2733	0.63164 4266	0.63165 8120
35	0.65245 3680	0.65259 1156	0.65269 8368	0.65277 5101	0.65282 1202	0.65283 6580
36	0.67385 1258	0.67400 3557	0.67412 2339	0.67420 7358	0.67425 8438	0.67427 5478
37	0.69551 8751	0.69568 7201	0.69581 8589	0.69591 2638	0.69596 9145	0.69598 7996
38	0.71746 9707	0.71765 5746	0.71780 0868	0.71790 4753	0.71796 7174	0.71798 7998
39	0.73971 8377	0.73992 3570	0.74008 3648	0.74019 8248	0.74026 7111	0.74029 0084
40	0.76227 9775	0.76250 5824	0.76268 2190	0.76280 8459	0.76288 4339	0.76290 9652
41	0.78516 9743	0.78541 8499	0.78561 2602	0.78575 1581	0.78583 5103	0.78586 2967
42	0.80840 5013	0.80867 8496	0.80889 1916	0.80904 4740	0.80913 6587	0.80916 7229
43	0.83200 3287	0.83230 3701	0.83253 8165	0.83270 6074	0.83280 6993	0.83284 0663
44	0.85598 3325	0.85631 3077	0.85657 0473	0.85675 4823	0.85686 5631	0.85690 2601
45	0.88036 5019	0.88072 6753	0.88100 9150	0.88121 1426	0.88133 3019	0.88137 3587

TABLE IX.

ϕ .	E (85°).	E (86°).	E (87°).	E (88°).	E (89°).	E (90°).
45°	0.70776 7994	0.70753 0497	0.70734 5358	0.70721 2890	0.70713 3320	0.70710 6781
46	0.72004 9036	0.71979 4301	0.71959 5715	0.71945 3622	0.71936 8268	0.71933 9800
47	0.73211 3506	0.73184 0620	0.73162 7875	0.73147 5646	0.73138 4201	0.73135 3702
48	0.74395 7850	0.74366 5863	0.74343 8217	0.74327 5319	0.74317 7464	0.74314 4825
49	0.75557 8590	0.75526 6512	0.75502 3191	0.75484 9069	0.75474 4468	0.75470 9580
50	0.76697 2324	0.76663 9122	0.76637 9317	0.76619 3392	0.76608 1698	0.76604 4443
51	0.77813 5725	0.77778 0321	0.77750 3189	0.77730 4856	0.77718 5704	0.77714 5961
52	0.78906 5549	0.78868 6816	0.78839 1475	0.78818 0102	0.78805 3112	0.78801 0754
53	0.79975 8629	0.79935 5390	0.79904 0919	0.79881 5843	0.79868 0616	0.79863 5510
54	0.81021 1885	0.80978 2907	0.80944 8340	0.80920 8869	0.80906 4988	0.80901 6994
55	0.82042 2320	0.81996 6312	0.81961 0637	0.81935 6044	0.81920 3071	0.81915 2044
56	0.83038 7027	0.82990 2634	0.82952 4789	0.82925 4310	0.82909 1787	0.82903 7573
57	0.84010 3187	0.83958 8986	0.83918 7855	0.83890 0689	0.83872 8131	0.83867 0568
58	0.84956 8074	0.84902 2568	0.84859 6977	0.84829 2279	0.84810 9177	0.84804 8096
59	0.85877 9060	0.85820 0672	0.85774 9383	0.85742 6262	0.85723 2080	0.85716 7301
60	0.86773 3614	0.86712 0680	0.86664 2385	0.86629 9901	0.86609 4071	0.86602 5404
61	0.87642 9307	0.87578 0069	0.87527 3385	0.87491 0541	0.87469 2462	0.87461 9707
62	0.88486 3817	0.88417 6413	0.88363 9875	0.88325 5615	0.88302 4650	0.88294 7593
63	0.89303 4934	0.89230 7387	0.89173 9438	0.89133 2640	0.89108 8109	0.89100 6524
64	0.90094 0563	0.90017 0771	0.89956 9753	0.89913 9220	0.89888 0402	0.89879 4046
65	0.90857 8731	0.90776 4453	0.90712 8597	0.90667 3050	0.90639 9172	0.90630 7787
66	0.91594 7594	0.91508 6434	0.91441 3847	0.91393 1915	0.91364 2149	0.91354 5458
67	0.92304 5445	0.92213 4836	0.92142 3483	0.92091 3696	0.92060 7149	0.92050 4853
68	0.92987 0725	0.92890 7905	0.92815 5597	0.92761 6367	0.92729 2077	0.92718 3855
69	0.93642 2030	0.93540 4021	0.93460 8391	0.93403 8000	0.93369 4925	0.93358 0426
70	0.94269 8131	0.94162 1709	0.94078 0190	0.94017 6771	0.93981 3776	0.93969 2621
71	0.94869 7987	0.94755 9650	0.94666 9444	0.94603 0957	0.94564 6804	0.94551 8576
72	0.95442 0768	0.95321 6693	0.95227 4739	0.95159 8949	0.95119 2275	0.95105 6516
73	0.95986 5880	0.95859 1877	0.95759 4809	0.95687 9250	0.95644 8551	0.95630 4756
74	0.96503 3000	0.96368 4455	0.96262 8550	0.96187 0488	0.96141 4090	0.96126 1696
75	0.96992 2118	0.96849 3922	0.96737 5038	0.96657 1419	0.96608 7451	0.96592 5826
76	0.97453 3589	0.97302 0056	0.97183 3557	0.97098 0945	0.97046 7294	0.97029 5726
77	0.97886 8210	0.97726 2969	0.97600 3626	0.97509 8127	0.97455 2389	0.97437 0065
78	0.98292 7314	0.98122 3183	0.97988 5052	0.97892 2209	0.97834 1619	0.97814 7601
79	0.98671 2895	0.98490 1722	0.98347 7986	0.98245 2646	0.98183 3989	0.98162 7183
80	0.99022 7789	0.98830 0253	0.98678 3019	0.98568 9154	0.98502 8639	0.98480 7753
81	0.99347 5913	0.99142 1280	0.98980 1315	0.98863 1775	0.98792 4865	0.98768 8341
82	0.99646 2601	0.99426 8427	0.99253 4806	0.99128 0984	0.99052 2144	0.99026 8069
83	0.99919 5089	0.99684 6868	0.99498 6513	0.99363 7860	0.99282 0186	0.99254 6152
84	1.00168 3193	0.99916 3963	0.99716 1043	0.99570 4376	0.99481 9019	0.99452 1895
85	1.00394 0267	1.00123 0255	0.99906 5441	0.99748 3920	0.99651 9150	0.99619 4698
86	1.00598 4534	1.00306 1007	1.00071 0653	0.99898 2297	0.99792 1898	0.99756 4050
87	1.00784 0791	1.00467 8521	1.00211 4143	1.00020 9815	0.99903 0177	0.99862 9535
88	1.00954 2324	1.00611 5371	1.00330 4480	1.00118 5988	0.99985 0703	0.99939 0827
89	1.01113 2321	1.00741 7952	1.00432 8539	1.00195 0492	1.00040 1985	0.99984 7695
90	1.01266 3506	1.00864 7957	1.00525 8587	1.00258 4086	1.00075 1578	1.00000 0000

ϕ .	F (85°).	F (86°).	F (87°).	F (88°).	F (89°).	F (90°).
45°	0.88036 5019	0.88072 6753	0.88100 9150	0.88121 1426	0.88133 3019	0.88137 3587
46	0.90516 9526	0.90556 6132	0.90587 5799	0.90609 7633	0.90623 0991	0.90627 5488
47	0.93041 9350	0.93085 4010	0.93119 3440	0.93143 6625	0.93158 2830	0.93163 1615
48	0.95613 8489	0.95661 4700	0.95698 6641	0.95725 3151	0.95741 3393	0.95746 6865
49	0.98235 2565	0.98287 4185	0.98338 1667	0.98357 3683	0.98374 9276	0.98380 7873
50	1.00908 8985	1.00966 0278	1.01010 6650	1.01042 6582	1.01061 8981	1.01068 3189
51	1.03637 7118	1.03700 2804	1.03749 1776	1.03784 2297	1.03805 3114	1.03812 3471
52	1.06424 8490	1.06493 3807	1.06546 9501	1.06585 3579	1.06608 4604	1.06616 1711
53	1.09273 7010	1.09348 7784	1.09407 4785	1.09449 5727	1.09474 8956	1.09483 3479
54	1.12187 9217	1.12270 1945	1.12334 5372	1.12380 6868	1.12408 4532	1.12417 7216
55	1.15171 4570	1.15261 6515	1.15332 2095	1.15382 8279	1.15413 2874	1.15423 4554
56	1.18228 5770	1.18327 5074	1.18404 9233	1.18460 4745	1.18493 9075	1.18505 0691
57	1.21363 9126	1.21472 4946	1.21557 4917	1.21618 4984	1.21655 2208	1.21667 4818
58	1.24582 4981	1.24701 7646	1.24795 1595	1.24862 2122	1.24902 5815	1.24916 0615
59	1.27889 8194	1.28020 9391	1.28123 6571	1.28197 4257	1.28241 8475	1.28256 6819
60	1.31291 8700	1.31436 1702	1.31549 2633	1.31630 5100	1.31679 4462	1.31695 7897
61	1.34795 2151	1.34954 2088	1.35078 8778	1.35168 4737	1.35222 4519	1.35240 4817
62	1.38407 0664	1.38582 4852	1.38720 1066	1.38819 0511	1.38878 6777	1.38898 5969
63	1.42135 3695	1.42329 2035	1.42481 3618	1.42590 8069	1.42656 7815	1.42678 8247
64	1.45988 9057	1.46203 4523	1.46371 9803	1.46493 2605	1.46566 3941	1.46590 8333
65	1.49977 4115	1.50215 3360	1.50402 3643	1.50537 0333	1.50618 2712	1.50645 4237
66	1.54111 7203	1.54376 1310	1.54584 1498	1.54734 0269	1.54824 4773	1.54854 7153
67	1.58403 9299	1.58698 4715	1.58930 4088	1.59097 6372	1.59198 6073	1.59232 3702
68	1.62867 6027	1.63196 5749	1.63455 8948	1.63643 0158	1.63756 0582	1.63793 8683
69	1.67518 0049	1.67886 5129	1.68177 3421	1.68387 3910	1.68514 3631	1.68556 8456
70	1.72372 3953	1.72786 5428	1.73113 8340	1.73350 4644	1.73493 6063	1.73541 5163
71	1.77450 3742	1.77917 5143	1.78287 2599	1.78554 9070	1.78716 9446	1.78771 2017
72	1.82774 3083	1.83303 3719	1.83722 8864	1.84026 9854	1.84211 2678	1.84273 0035
73	1.88369 8506	1.88971 7811	1.89450 0801	1.89797 3603	1.90008 0472	1.90078 6690
74	1.94266 5774	1.94954 9154	1.95503 2299	1.95902 1190	1.96144 4389	1.96225 7194
75	2.00498 7756	2.01290 4517	2.01922 9377	2.02384 1259	2.02664 7398	2.02758 9422
76	2.07106 4130	2.08022 8416	2.08757 5756	2.09294 8170	2.09622 3403	2.09732 3997
77	2.14136 3376	2.15204 9455	2.16065 3460	2.16696 6231	2.17082 3920	2.17212 1830
78	2.21643 7516	2.22900 1487	2.23917 0470	2.24666 3011	2.25125 5276	2.25280 2704
79	2.29694 0029	2.31185 1130	2.32399 8357	2.33299 6074	2.33853 1716	2.34040 0693
80	2.38364 7090	2.40153 3580	2.41622 4236	2.42718 0030	2.43395 3341	2.43624 6054
81	2.47748 1512	2.49919 8897	2.51722 3469	2.53078 5206	2.53922 4111	2.54209 0436
82	2.57953 6804	2.60627 0521	2.62876 2481	2.64588 6921	2.65663 7327	2.66030 6128
83	2.69109 4397	2.72451 5216	2.75314 4709	2.77529 8348	2.78938 0362	2.79421 9058
84	2.81361 7754	2.85611 5181	2.89341 4969	2.92294 5499	2.94206 3224	2.94870 0239
85	2.94868 8755	3.00370 9259	3.05362 9498	3.09448 8983	3.12169 7678	3.13130 1332
86	3.09782 0285	3.17204 1744	3.23914 6200	3.29836 9368	3.33964 3841	3.35467 3512
87	3.26197 9246	3.35887 2602	3.45644 5172	3.54748 4399	3.61613 2184	3.64253 3357
88	3.44116 0392	3.57109 5982	3.71310 7620	3.86107 5156	3.99109 6314	4.04812 5419
89	3.63279 2864	3.80508 2411	4.01090 9863	4.26139 2700	4.55346 9119	4.74134 8760
90	3.83174 2000	4.05275 8170	4.33865 3976	4.74271 7265	5.43490 9830	Infini logarith.

Observations sur la Table IX.

235. Nous avons proposé dans l'art. 201, de former la Table IX d'une série de tables particulières pour tous les degrés des angles du module, soit depuis $\theta=0^\circ$ jusqu'à $\theta=75^\circ$, soit seulement depuis $\theta=15^\circ$ jusqu'à $\theta=75^\circ$, dans lesquelles on aurait inséré les différences successives des fonctions E et F, par rapport à l'amplitude ϕ ; nous avons reconnu ensuite que ces différences augmenteraient sans beaucoup d'utilité le volume de la Table, puisque les calculs d'interpolation exigent qu'on ait les différences des fonctions relatives à l'angle du module θ , aussi bien que celles qui sont relatives à l'amplitude ϕ , et qu'il est impossible que la Table soit disposée de manière à contenir ces deux sortes de différences, au moins passé le premier ordre. Il nous a donc paru plus simple de n'insérer aucune différence dans la Table IX, et de l'assimiler entièrement, pour les intervalles d'un degré, au modèle de la page 293, calculé pour des intervalles d'un quart de degré seulement.

En simplifiant ainsi la forme sous laquelle nous présentons la Table IX, nous avons pensé qu'il serait utile en même tems de donner à cette Table toute l'étendue dont elle est susceptible, c'est-à-dire de la calculer pour tous les degrés de l'angle du module, depuis $\theta=0^\circ$, jusqu'à $\theta=90^\circ$. Par ce moyen, étant donné l'amplitude ϕ et l'angle du module θ de toute fonction E ou F, on peut avoir immédiatement une valeur approximative de cette fonction, en la comparant aux fonctions données par la Table, et qui s'en rapprochent le plus dans les élémens ϕ et θ .

Le calcul d'interpolation sera très facile, si l'on ne tient compte que des premières différences, ce qui pourra suffire dans beaucoup de cas; mais, pour obtenir une plus grande approximation, il faudra avoir égard aux différences secondes, ou aux différences ultérieures, ainsi que nous l'avons fait voir dans les articles 210 et suivans.

236. Persuadé comme nous l'étions, de tous les avantages que présenterait, dans l'application des fonctions elliptiques, la Table IX rendue entièrement complète pour tous les degrés de l'amplitude ϕ

et de l'angle du module θ , nous n'avons pas craint de nous livrer au surcroît de travail très long et très fastidieux qu'exigeait la construction de la Table, depuis $\theta = 75^\circ$, jusqu'à $\theta = 90^\circ$. Heureusement que la méthode de l'art. 66, à laquelle nous avons donné le nom de *méthode des ordonnées moyennes*, est si bien appropriée à son objet, qu'il a suffi d'y apporter quelques légères modifications, pour la rendre applicable à ces grandes valeurs de l'angle du module, et en tirer des résultats toujours exacts jusqu'à la neuvième décimale.

Nous avons constamment calculé l'auxiliaire P avec dix décimales, tant pour la fonction F que pour la fonction E; nous avons eu égard aux signes des erreurs sur la dixième décimale, afin d'obtenir par leur fréquente opposition, une compensation presque parfaite sur la somme totale; enfin nous avons conservé, dans tout le courant du calcul, la dixième décimale dans les fonctions E et F, et ce n'est qu'après tous les calculs faits et vérifiés que nous avons retranché la dixième décimale pour n'en insérer que neuf dans la Table.

Tant que θ ne surpasse pas 80° , le calcul des fonctions F peut se faire par la formule

$$\delta F = P + \frac{1}{24} (\delta^2 P^\circ - \frac{17}{240} \delta^4 P^\circ);$$

mais les derniers termes, ceux qui répondent à des amplitudes voisines de 90° , ont besoin d'une correction très petite et facile à déterminer. Cette correction est due au terme suivant de la série, lequel est $+\frac{367}{945} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \delta^6 P^\circ$, et la somme de tous les termes semblables est $+\frac{367}{945} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} (\delta^5 P^\circ - \text{const.})$, où la constante est une des valeurs précédentes de $\delta^5 P^\circ$, assez petite pour être négligée.

Il suit de là qu'après avoir formé la série des valeurs de la fonction F, par exemple, depuis $\phi = 70^\circ$, jusqu'à $\phi = 90^\circ$, il faut ajouter pour dernière correction, à chaque valeur de F, la quantité correspondante

$$\frac{367}{945} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \delta^5 P^\circ, \quad \text{ou environ} \quad \frac{\delta^5 P^\circ}{2637}.$$

La différence $\delta^5 P^\circ$ est sur la même ligne que $\delta^4 P^\circ$ qui est entrée

dans le calcul de δF , d'où l'on déduit $F' = F + \delta F$; ainsi cette correction se trouve très simplement en ajoutant une colonne des différences cinquièmes de l'auxiliaire, vers les derniers termes de la Table et seulement à compter du point où la différence cinquième commence à approcher de 2637 unités décimales du dixième ordre.

Il est remarquable que pour le dernier terme de la Table $F(90^\circ)$ ou F' , la quantité $\delta^5 P^{\circ\circ}$, et par conséquent la correction qui en dépend, est nulle. Car en faisant $\varphi = 89^\circ$, les valeurs successives..... $87^\circ, 88^\circ, 89^\circ, 90^\circ, 91^\circ, 92^\circ$, répondent terme à terme aux auxiliaires.. $P^{\circ\circ}, P^\circ, P, P', P'', P'''$; or, on a en général $\delta^5 P^{\circ\circ} = P''' - 5P'' + 10P' - 10P + 5P^\circ - P^{\circ\circ}$, et en particulier, lorsque $\varphi = 89^\circ$, on a $P' = P, P'' = P^\circ, P''' = P^{\circ\circ}$; donc $\delta^5 P^{\circ\circ} = 0$.

237. Ce que nous venons de dire du calcul des fonctions F s'applique au calcul des fonctions E , d'autant mieux que la correction due aux cinquièmes différences de l'auxiliaire, n'est pas sensible pour les fonctions E , tant que θ ne surpasse pas 80° . En effet, les différences de l'auxiliaire sont beaucoup plus petites, vers la fin de la table (la seule sujette à difficulté) pour les fonctions E que pour les fonctions F ; et tandis que la méthode générale ne peut guère s'appliquer sans modification, autre que la correction dont nous avons parlé, que jusqu'à $\theta = 80^\circ$, pour le calcul des fonctions F ; cette même méthode pourrait s'appliquer, avec une semblable correction, jusqu'à 87° ou 88° pour le calcul des fonctions E .

Passé le terme $\theta = 80^\circ$, nous avons fait le calcul des derniers termes de chaque table particulière, en procédant par des intervalles d'un demi-degré seulement, et le nombre de ces termes a été augmenté progressivement, à mesure que θ est devenu plus grand; de sorte que pour $\theta = 88^\circ$, on a commencé depuis $\varphi = 60^\circ$. Cet expédient réussit complètement et dans toute l'étendue de la Table, pour le calcul des fonctions E ; mais il devient encore insuffisant pour le calcul des dernières valeurs de la fonction F ; savoir, de celles dont l'amplitude approche beaucoup de 90° . Il ne reste pour celles-ci d'autre ressource que de les calculer directement par les formules générales d'approximation; c'est ce qu'on a fait pour

$\theta = 86^\circ, 87^\circ$ et 88° , depuis $\varphi = 85$, jusqu'à $\varphi = 89^\circ$. Il n'y a eu aucun nouveau calcul à faire pour les angles du module 89° et 90° , puisque les résultats sont déjà connus par la Table du n° 93, pour le premier de ces angles, et par les Tables III et IV pour le dernier. Ainsi à l'exception du petit nombre de termes qu'il a fallu calculer directement pour la fonction F seulement, tous les résultats contenus dans la Table IX ont été déduits de la méthode des ordonnées moyennes (*), dont l'usage ne saurait être trop recommandé dans les calculs de quadrature qui exigent un grand degré de précision.

238. Ayant expliqué comment les difficultés de calcul ont été vaincues dans la construction de la seconde partie de la Table, pour les angles du module plus grands que 45° , et surtout pour ceux qui approchent de 90° ; il ne nous reste que peu de choses à dire sur le calcul de la première partie de la Table, depuis $\theta = 0^\circ$, jusqu'à $\theta = 45^\circ$. Dans celle-ci, l'application de la méthode générale s'est faite sans aucune modification, dans toute l'étendue de chaque table particulière, même pour les valeurs de l'amplitude φ , très rapprochées de 90° . On est d'ailleurs parvenu à abréger notablement les calculs pour les petites valeurs de θ , en déterminant l'auxiliaire de chaque fonction par une série très convergente. Pour cet effet, soit $\sin^2 \theta \sin^2 \omega = r$, l'auxiliaire pour la fonction F sera

$$P = \alpha(1-r)^{-\frac{1}{2}} = \alpha + \frac{1}{2}\alpha r + \frac{1.3}{2.4}\alpha r^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha r^3 + \text{etc.}$$

Le premier terme de cette suite $\alpha = \frac{\pi}{180} = 0,01745\,329252$; si l'on désigne les termes suivans par (1), (2), (3), etc., en sorte qu'on ait

$$P = \alpha + (1) + (2) + (3) + (4),$$

ces termes se déduiront facilement les uns des autres, et on aura en même tems l'auxiliaire pour la fonction E, savoir :

$$p = \alpha(1-r)^{\frac{1}{2}} = \alpha - (1) - \frac{1}{3}(2) - \frac{1}{5}(3) - \frac{1}{7}(4);$$

(*) On peut remarquer que cette méthode se rapproche beaucoup de celle que nous avons donnée dans le tom. I, p. 311; l'objet n'est cependant pas le même : la première sert à trouver la suite des valeurs de $\sin \varphi$; dans la seconde on ne cherche qu'une seule valeur de cette intégrale.

or, sans passer le terme (4), on obtiendra, par ces suites, dix décimales exactes, pour toutes les valeurs de φ , si θ n'est que de quelques degrés, et pour un nombre plus ou moins grand de valeurs de φ , lorsque θ sera plus grand.

239. Ces calculs étant faits constamment avec dix décimales, le résultat des 45 premières opérations, qui donne les fonctions E et F pour l'amplitude $\varphi = 45^\circ$, s'est toujours trouvé d'accord avec la Table VIII, soit exactement, soit à la différence d'un très-petit nombre d'unités décimales du 10^e ordre, nombre qui est allé rarement jusqu'à 4 et qui n'a pas le plus souvent passé 2 (on ne parle pas ici des grandes erreurs qui sont presque inévitables dans de si longs calculs, et que l'on découvre immédiatement par la comparaison avec la Table VIII). Pour faire disparaître cette différence, voici le moyen qu'on a employé : supposons qu'il y ait trois unités décimales du 10^e ordre à ajouter à la fonction trouvée par le calcul, pour la faire coïncider avec le résultat de la Table VIII ; il faudra examiner la dernière série des différences (c'est ordinairement la quatrième), et noter les endroits où elles sont le plus irrégulières. On choisira trois de ces endroits, et on verra quelles sont les différences correspondantes du 1^{er} ordre qui, étant augmentées chacune d'une unité, rendraient plus uniforme la dernière série des différences. Un peu d'exercice suffit pour apercevoir d'un coup-d'œil celles des différences premières qui satisfont le mieux à cette condition. Corrigeant donc la série des fonctions, d'après celle des différences premières, on aura une nouvelle série de 45 nombres dont les différences marcheront d'une manière plus régulière, et dont le dernier terme s'accordera entièrement avec le résultat exact contenu dans la Table VIII. La même marche et le même mode de correction ont été également employés dans le calcul de la seconde partie de la Table, depuis $\varphi = 45^\circ$ jusqu'à $\varphi = 90^\circ$.

240. L'expérience nous ayant ainsi dirigé dans le calcul des différentes Tables particulières qui ont servi à composer la Table IX, nous avons pensé que tous les résultats devaient être exacts, à une ou deux unités près du dernier chiffre décimal. C'est pourquoi nous avons conservé dix décimales dans toute l'étendue de la première

partie de la Table IX, depuis $\theta = 0$, jusqu'à $\theta = 45^\circ$. On aurait pu conserver la dixième décimale bien loin encore au-delà de cette limite; mais les calculs de la seconde partie étaient déjà faits, dans le dessein d'obtenir neuf décimales exactes seulement, et d'ailleurs les grandes variations qu'éprouvent les fonctions E et F, lorsque l'amplitude et l'angle du module s'approchent tous les deux de 90° , ne permettent pas de prétendre à l'exactitude de la dixième décimale dans leur détermination, à moins de calculer les auxiliaires avec une ou deux décimales de plus, ce qui aurait augmenté considérablement la longueur et la difficulté du travail.

Ayant donc pris toutes les précautions pour assurer l'exactitude de nos calculs, nous croyons pouvoir présenter la Table IX aux Géomètres, comme le résultat d'un travail très pénible qui mérite toute leur confiance. Cette Table servira à faciliter l'application de la théorie des fonctions elliptiques, qui est le but principal que nous nous sommes proposé dans cet Ouvrage.

Addition au § II.

241. On a déjà vu que les deux formules trouvées dans le § II, fournissent deux méthodes différentes pour former une Table des valeurs de l'intégrale $U = \int u d\phi$; ces deux méthodes ont chacune leurs avantages particuliers, mais en général nous avons jugé que la préférence devait être accordée à la première, que nous avons nommée *Méthode des ordonnées moyennes*, et que nous avons adoptée pour la construction de la Table IX.

Nous remarquerons ici que la seconde de ces méthodes peut avoir une application particulière et fort utile; s'il s'agit en effet de construire une Table des valeurs de la fonction U, d'après la seule connaissance du coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2U}{d\phi^2} = u$, en sorte qu'on ait $U = \iint u d\phi^2$, le problème se résoudra immédiatement par la formule

$$\delta^2 U^0 = Q + \frac{1}{12} \delta^2 Q^0 - \frac{1}{240} \delta^4 Q^0 + \frac{31}{60480} \delta^6 Q^0 - \text{etc.},$$

où l'on a $Q = \alpha^2 u$.

L'usage de cette formule suppose que l'on connaît à l'origine de

l'intégrale les valeurs de U et de δU ; ces deux données suffiront pour calculer la série entière des valeurs de U ; et si l'on a besoin dans cet intervalle, de l'un des coefficients différentiels $\frac{dU}{d\phi}$, on le calculera par la formule ordinaire

$$\alpha \frac{dU}{d\phi} = \delta U - \frac{1}{2} \delta^2 U + \frac{1}{3} \delta^3 U - \frac{1}{4} \delta^4 U + \text{etc.}$$

242. Si l'on proposait ultérieurement de former une Table des valeurs de la fonction U , en connaissant seulement le coefficient différentiel du 3^e ordre $\frac{d^3 U}{d\phi^3} = u$, en sorte qu'on eût $U = \int^3 u d\phi^3$, u étant une simple fonction de ϕ , la solution se déduirait aisément de la même analyse que nous avons suivie dans l'art. 63. Soit pour cet effet ν ce que devient la fonction donnée u , lorsqu'on y met $\phi + \frac{1}{2}\alpha$; au lieu de ϕ , on trouvera

$$\alpha^3 \nu = \delta^3 U^\circ - k' \delta^5 U^{\circ\circ} + k'' \delta^7 U^{\circ\circ\circ} - k''' \delta^9 U^{\circ\circ\circ\circ} + \text{etc.},$$

les coefficients k' , k'' , k''' , etc., étant les mêmes qu'on déduirait de l'équation identique

$$\left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5 \cdot 2^4} - \text{etc.}\right)^3 = x^3 - k' x^5 + k'' x^7 - \text{etc.}$$

Soit donc $\alpha^3 \nu = R$; et de l'équation précédente on déduira

$$\delta^3 U^\circ = R + \frac{1}{8} \delta^2 R^\circ - \frac{7}{1920} \delta^4 R^{\circ\circ} + \frac{457}{945 \cdot 2^{10}} \delta^6 R^{\circ\circ\circ} - \text{etc.},$$

la loi des coefficients étant la même que donnerait le développement de $\left(1 + \frac{1}{24} x - \frac{17}{5760} x^2 + \frac{367}{945 \cdot 2^{10}} x^3 - \text{etc.}\right)^3$.

Au moyen de la formule précédente, il suffit de connaître à l'origine de l'intégrale les valeurs de U , δU , $\delta^2 U$, ou ce qui revient au même, les trois premiers termes de la série U , U' , U'' , et on formera la série entière des valeurs de l'intégrale $U = \int^3 u d\phi^3$.

243. Il résulte encore de la même analyse qu'étant donné le coefficient différentiel de quatrième ordre $\frac{d^4 U}{d\phi^4} = u$, si l'on fait $\alpha^4 u = S$, on aura la formule

$$\delta^4 U^{\circ\circ} = S + \frac{1}{6} \delta^2 S^\circ - \frac{1}{720} \delta^4 S^{\circ\circ} + \frac{421}{4725 \cdot 2^{10}} \delta^6 S^{\circ\circ\circ} - \text{etc.},$$

au moyen de laquelle on pourra calculer la série entière des valeurs de l'intégrale $U = \int^4 u d\varphi^4$, pourvu qu'on connaisse les quatre premiers termes de cette série U, U', U'', U''' , ou ce qui revient au même, les quatre quantités $U, \delta U, \delta^2 U, \delta^3 U$.

On a vu dans les art. 72 et suivans comment les calculs doivent être disposés pour former graduellement la série des auxiliaires et celle des fonctions. Pour éviter à cet égard tout embarras, voici comment on mettra en usage la dernière formule

$$\delta^4 U^{\circ} = S + \frac{1}{6} \delta^2 S^{\circ} - \text{etc.}$$

La valeur de S étant donnée en fonction de φ , on pourra calculer préalablement, avec telle étendue qu'on voudra, la suite des quantités S , tant dans le sens des variables croissantes $\varphi, \varphi + \alpha, \varphi + 2\alpha$, etc., à partir de la première valeur de φ , que dans le sens contraire $\varphi - \alpha, \varphi - 2\alpha$, etc., s'il est nécessaire. Avec ces valeurs et leurs différences successives, prolongées jusqu'à ce qu'elles puissent être négligées, on formera autant de lignes qu'on voudra, telles que les suivantes :

$\varphi - \alpha$	$S^{\circ}, \delta S^{\circ}, \delta^2 S^{\circ}, \delta^3 S^{\circ}, \delta^4 S^{\circ}, \text{etc.}$
φ	$S, \delta S, \delta^2 S, \delta^3 S, \delta^4 S, \text{etc.}$
$\varphi + \alpha$	$S', \delta S', \delta^2 S', \delta^3 S', \delta^4 S', \text{etc.}$
$\varphi + 2\alpha$	$S'', \delta S'', \delta^2 S'', \delta^3 S'', \delta^4 S'', \text{etc.}$

Cela posé, puisqu'on a en général

$$S'' + \frac{1}{6} \delta^2 S' - \frac{1}{720} \delta^4 S' + \frac{421}{4725 \cdot 2^{10}} \delta^6 S' - \text{etc.} = \delta^4 U = S'' + \frac{1}{6} \delta^2 S' - \frac{1}{720} \delta^4 S' + \frac{421}{4725 \cdot 2^{10}} \delta^6 S' - \text{etc.}$$

(valeur qui se réduira le plus souvent aux trois premiers termes); on voit que pour chaque valeur de φ , la Table des quantités S donnera immédiatement la valeur de $\delta^4 U$, laquelle jointe aux valeurs connues de $U, \delta U, \delta^2 U, \delta^3 U$, servira à former dans la ligne inférieure les termes $U', \delta U', \delta^2 U', \delta^3 U'$.

Calculant de même la valeur suivante de $\delta^4 U$, qui est $\delta^4 U'$, on formera une nouvelle ligne $U'', \delta U'', \delta^2 U'', \delta^3 U''$, et ainsi jusqu'à la limite de la Table qu'on veut construire.

On voit que pour être en état de calculer le terme $\delta^4 U$ qui sert à trouver U'' , il suffira d'avoir avancé la série des S jusqu'au terme

S¹⁷ qui sert à trouver $\delta^4 S$, en supposant du moins que la valeur de $\delta^4 U$ soit exprimée d'une manière suffisamment exacte par les trois premiers termes de la formule. Ainsi, dans les cas les plus ordinaires, la série des S ne devra pas être prolongée au-delà de la valeur de ϕ , où doit se terminer la Table; dans ces mêmes cas où l'on n'a point égard au quatrième terme de la formule contenant $\delta^6 S$, le calcul des quantités S ne devra être fait qu'à compter de la première valeur de ϕ , puisque les quantités précédentes $S^\circ, S^\circ, \text{etc.}$ ne seraient d'aucun usage.

244. Il ne sera pas inutile de réunir ici, sous un même point de vue, les différentes formules que nous avons trouvées, pour former une Table des valeurs de l'intégrale U , lorsqu'on suppose connu, en fonction de la seule variable ϕ , l'un des coefficients différentiels $\frac{dU}{d\phi}, \frac{ddU}{d\phi^2}, \frac{d^3U}{d\phi^3}, \frac{d^4U}{d\phi^4}$; voici ces formules où nous avons constamment désigné par P l'auxiliaire qui doit être employée dans chaque cas.

Soit 1°. l'intégrale $U = \int u d\phi$; on fera $P = \alpha v$, v étant ce que devient la fonction donnée u , en mettant $\phi + \frac{1}{2}\alpha$ à la place de ϕ , et on aura la formule

$$\delta U = P + \frac{1}{24} \delta^2 P^\circ - \frac{17}{5760} \delta^4 P^{\circ\circ} + \frac{367}{945 \cdot 2^{10}} \delta^6 P^{\circ\circ\circ} - \text{etc.}$$

Soit 2°. l'intégrale $U = \iint u d\phi^2$; on fera $P = \alpha^2 u$, et l'on aura la formule

$$\delta^2 U^\circ = P + \frac{1}{12} \delta^2 P^\circ - \frac{1}{240} \delta^4 P^{\circ\circ} + \frac{31}{60480} \delta^6 P^{\circ\circ\circ} - \text{etc.} = \phi + \frac{1}{12} \delta^2 (\phi^2 - \frac{1}{20} \delta^2 \phi^2)$$

Soit 3°. l'intégrale $U = \int^3 u d\phi^3$, on fera $P = \alpha^3 v$, v étant ce que devient u , en mettant $\phi + \frac{1}{2}\alpha$ au lieu de ϕ , et on aura

$$\delta^3 U^\circ = P + \frac{1}{8} \delta^2 P^\circ - \frac{7}{1920} \delta^4 P^{\circ\circ} + \frac{457}{945 \cdot 2^{10}} \delta^6 P^{\circ\circ\circ} - \text{etc.}$$

Soit 4°. l'intégrale $U = \int^4 u d\phi^4$, on fera $P = \alpha^4 u$, et l'on aura

$$\delta^4 U^{\circ\circ} = P + \frac{1}{6} \delta^2 P^\circ - \frac{1}{720} \delta^4 P^{\circ\circ} + \frac{421}{4725 \cdot 2^{10}} \delta^6 P^{\circ\circ\circ} - \text{etc.} = \phi + \frac{1}{6} \delta^2 (\phi^3 - \frac{1}{120} \delta^2 \phi^3)$$

Il serait facile de prolonger à volonté la suite de ces formules, en observant la loi qu'elles suivent et qu'on démontre généralement
kkk

par l'analyse du n° 63. Ainsi pour l'intégrale $U = \int^5 u d\phi^5$, on ferait l'auxiliaire $P = \alpha^5 v$, et on aurait la formule

$$\delta^5 U^{\circ\circ} = P + \frac{5}{24} \delta^2 P^{\circ} - \frac{5}{384} \delta^4 P^{\circ\circ} + \text{etc.};$$

pour l'intégrale $U = \int^6 u d\phi^6$, on ferait $P = \alpha^6 u$, et l'on aurait la formule

$$\delta^6 U^{\circ\circ\circ} = P + \frac{1}{4} \delta^2 P^{\circ} - \frac{23}{1440} \delta^4 P^{\circ\circ} + \text{etc.},$$

ainsi des autres.

Quant à la loi des coefficients, elle est la même que celle qui résulterait du développement de la puissance

$$\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{5 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{7 \cdot 2^6} + \text{etc.}\right)^{-n},$$

n désignant l'ordre de l'intégrale proposée $U = \int^n u d\phi^n$.

245. Il serait à désirer qu'on pût calculer par des procédés semblables et avec des suites aussi convergentes, les valeurs successives d'une fonction U donnée par une équation différentielle du premier ordre $\frac{dU}{d\phi} = \text{fonct.}(U, \phi)$, ou même par une équation différentielle d'un ordre plus élevé. Ce problème est de la même nature que ceux qui concernent les intégrales simples ou multiples; mais sa résolution offre beaucoup plus de difficultés, et jusqu'à présent nous ne voyons d'autre moyen d'y parvenir que la formule de Taylor

$$\delta U = \alpha \frac{dU}{d\phi} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{ddU}{d\phi^2} + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3U}{d\phi^3} + \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4U}{d\phi^4} + \text{etc.},$$

qui sert à calculer la différence finie d'une fonction par le moyen des coefficients différentiels successifs de cette fonction.

Si l'équation est du premier ordre, le premier coefficient $\frac{dU}{d\phi}$ sera donné en fonction de U et de ϕ , et les suivans $\frac{ddU}{d\phi^2}$, $\frac{d^3U}{d\phi^3}$, etc., s'en déduiront par la différentiation. On pourra donc, d'une valeur donnée de U correspondante à $\phi = e$, déduire la valeur suivante $U' = U + \delta U$, correspondante à $\phi = e + \alpha$, et ainsi successivement.

246. Si l'équation est différentielle du second ordre, alors faisant $\frac{dU}{d\phi} = u$, le coefficient $\frac{ddU}{d\phi^2}$ sera une fonction donnée de u et

de φ ; on en déduira par la différentiation les valeurs des coefficients suivans $\frac{d^3U}{d\varphi^3}$, $\frac{d^4U}{d\varphi^4}$, etc., exprimées semblablement en fonctions de u et de φ .

Connaissant donc les premières valeurs de U et de u qui répondent par exemple à $\varphi=e$, on trouvera les valeurs suivantes de U et de u qui répondent à $\varphi=e+\alpha$, au moyen des formules

$$\delta U = \alpha u + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{ddU}{d\varphi^2} + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3U}{d\varphi^3} + \text{etc.},$$

$$\delta u = \alpha \cdot \frac{ddU}{d\varphi^2} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{d^3U}{d\varphi^3} + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^4U}{d\varphi^4} + \text{etc.},$$

d'où l'on déduira $U' = U + \delta U$, $u' = u + \delta u$. Par ces nouvelles valeurs de U et de u qui répondent à $\varphi=e+\alpha$, on trouvera semblablement les valeurs suivantes qui répondent à $\varphi=e+2\alpha$, et ainsi successivement jusqu'à la fin de la Table. Mais ces calculs qu'on doit faire ainsi pas à pas pour que le résultat en soit plus exact, sont très longs et très difficiles.

Il serait d'autant plus utile de perfectionner ces méthodes en rendant les suites plus convergentes, que la réduction en Tables est la seule ressource qui reste pour évaluer les fonctions déterminées par des équations différentielles qu'on ne peut intégrer exactement; et peut-être n'y a-t-il pas d'autre moyen de résoudre les grandes difficultés que présente la théorie des perturbations des planètes, lorsque le développement en série ne peut pas avoir lieu, ou lorsqu'il offrirait un trop grand nombre de termes qui ne pourraient être négligés.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME III.

§ I. *Du calcul des fonctions complètes* $F'c, E'c,$ pag. 5

Propriétés remarquables de l'échelle des modules, d'où résultent des théorèmes analogues à ceux des art. 73 et suiv. de la première partie.

Suivant l'un de ces théorèmes on peut trouver directement, avec tant de décimales qu'on voudra, et par l'extraction du plus petit nombre possible de racines quarrées, le logarithme d'un nombre donné, 10

On détermine généralement combien il faut calculer de termes de l'échelle des modules, pour obtenir 14 décimales exactes dans les logarithmes des fonctions complètes $F'c, E'c, F'b, E'b,$ 12

Formation de l'échelle des modules. 13

On donne les formules les plus simples pour avoir, jusqu'au degré d'approximation fixé, les logarithmes des modules décroissans $c, c^{\circ}, c^{\circ\circ},$ etc., et ceux de leurs complémens $b, b^{\circ}, b^{\circ\circ},$ etc.

Formule pour le calcul des quatre fonctions $F'c, E'c, F'b, E'b,$ 16

On rappelle ici les formules générales d'approximation, et l'on s'attache à leur donner la forme la plus simple pour le calcul logarithmique. Ces formules se simplifient progressivement à mesure que le module c est plus petit.

Exemple pour le module $c = \sin 45^{\circ}$, qui est le plus grand de ceux auxquels les formules doivent être appliquées, 22

Autre exemple pour le module $c = \sqrt{2} - 1$, qui donne lieu à des vérifications fondées sur les propriétés particulières de ce module, 27

Troisième exemple qui présente de semblables vérifications, 31

Construction et usage de la table des fonctions complètes, 34

Formules d'interpolation dont on a fait usage pour la construction de la table ou qui deviendraient nécessaires, si l'on voulait l'étendre à tous les centièmes de degré, 34—40

Formules et exemples pour montrer l'usage de la table, 41—49

Formules remarquables pour trouver directement les logarithmes des fonctions complètes Fb , Eb , lorsque le module b diffère très peu de l'unité, pag. 41—49

§ II. *Méthodes générales pour former une table des valeurs de l'intégrale $U = \int u d\phi$,* 51

Au moyen d'un algorithme propre à abréger les calculs, et sur-tout à faire connaître la loi des résultats, on parvient à deux formules principales, qui fournissent deux méthodes différentes pour construire une table des valeurs de l'intégrale $U = \int u d\phi$, correspondantes aux valeurs successives $\phi = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha$, etc., 51—59

La première formule détermine pour chaque valeur de ϕ , la différence δU , au moyen des valeurs successives de l'auxiliaire $P = u\nu$, où ν est ce que devient u , en mettant $\phi + \frac{1}{2}\alpha$ au lieu de ϕ . Cette première méthode, qu'on peut appeler *Méthode des ordonnées moyennes*, est d'une application extrêmement facile, à cause de la grande convergence de la série qui détermine δU .

La seconde méthode, fondée semblablement sur l'auxiliaire $Q = \alpha^2 \cdot \frac{ddu}{d\phi^2}$, détermine la différence seconde $\delta^2 U$ par une suite encore très convergente.

§ III. *Application des Méthodes précédentes aux fonctions elliptiques E et F,* 65

On prend pour exemple la construction détaillée d'une table où l'on calcule jusqu'à douze décimales, les fonctions E pour le module $\sin 45^\circ$, et pour tous les demi-degrés d'amplitude, 65—77

Remarques sur les différentes méthodes qu'on pourrait employer pour construire un système complet de tables elliptiques, 78—83

Table particulière pour le module $c = \sin 89^\circ$, 84

§ IV. *Autre méthode pour construire des tables des fonctions F et E,* 88

Cette méthode repose sur une seule donnée, qu'on peut déterminer avec toute la précision nécessaire; elle a l'avantage de réduire la construction de la table entière à des formules trigonométriques rigoureuses. Mais l'interpolation de cette table serait plus difficile dans les applications, que celle des tables ordinaires où l'amplitude croît d'une manière uniforme.

§ V. *Formules pour trouver des valeurs très approchées des fonctions $E\phi$, $F\phi$, lorsque l'amplitude ϕ n'excède pas une certaine limite,* 96

On fait voir que certaines formules très simples peuvent représenter assez exactement les fonctions E et F, tant que l'amplitude ϕ n'excède pas 20 ou 30° , sur-tout si l'angle du module n'est pas trop près de 90° ; ces formules peuvent donc suppléer, dans une étendue assez considérable, aux tables elliptiques dont l'interpolation

sera toujours plus ou moins difficile, comme celle de toutes les tables à double entrée.

§ VI. *Méthodes diverses pour calculer les valeurs approchées des fonctions $E\phi$, $F\phi$, lorsque l'angle ϕ excède la limite supposée dans le § précédent,* pag. 104

On peut ramener tous les cas proposés à celui où l'amplitude est d'un petit nombre de degrés, soit par la bisection continue de la fonction $F\phi$, soit par la multiplication de cette fonction; les calculs pour cet objet s'exécutent par des formules trigonométriques rigoureuses. On en donne différens exemples qui servent à apprécier l'exactitude des résultats, 104—112

Ces applications donnent lieu de simplifier la formule générale qui exprime la fonction $E\phi$, dans tous les cas où le module c diffère très peu de l'unité, pourvu que l'amplitude ϕ n'excède pas une certaine limite, 113

Autres formules pour trouver les fonctions $F\phi$, $E\phi$, lorsque b est très petit, ou seulement lorsque $b \cdot \tan \phi$ est plus petit que l'unité 116

§ VII. *Formules pour développer en séries les fonctions E et F ,* 118

On applique les formules de la V^e partie, art. 152 et suiv., au développement des fonctions F et E , ordonnées suivant les sinus des arcs multiples 2ϕ , 4ϕ , 6ϕ , etc.

On fait voir dans différens exemples, jusqu'à quel point les séries doivent être prolongées, pour obtenir un degré d'exactitude déterminé.

Lorsque le module devient trop grand, on peut rendre les séries beaucoup plus convergentes et diminuer considérablement le nombre de leurs termes, en substituant, par une transformation, la variable ϕ° à la variable ϕ , 122

§ VIII. *Formules pour exprimer les fonctions E et F en séries développées suivant les puissances de c^2 ,* 176

Ces séries sont données immédiatement par l'intégration, mais elles ne peuvent guère être utiles que lorsque le module c ne passe pas une certaine limite, au-delà de laquelle elles deviendront trop peu convergentes.

On donne à cette occasion une table des intégrales $Z' = \int d\phi \sin^2 \phi$, $Z'' = \int d\phi \sin^4 \phi$, $Z''' = \int d\phi \sin^6 \phi$, pour toutes les valeurs de ϕ , de degré en degré, depuis $\phi = 0^\circ$ jusqu'à $\phi = 90^\circ$.

§ IX. *Intégrales complètes des équations différentielles du second ordre, auxquelles satisfont les fonctions F et E ,* 180

Ces équations différentielles, qui sont celles de l'art. 45, tome I, supposent le

module c seul variable. On prouve par cet exemple, que l'usage des fonctions elliptiques n'est pas borné aux simples quadratures.

§ X. Développement des quantités $\frac{\sin^m \omega}{\cos^n \omega}$, $\frac{\cos^m \omega}{\sin^n \omega}$ et autres semblables, suivant les puissances de l'arc ω , les nombres m et n étant entiers, p. 183

Après avoir rappelé les formules contenues dans les art. 160 et suiv. du tome , on donne une table complète des logarithmes des coefficients H_n et K_n , calculés à 14 et 15 décimales, 185

Aux quatre formules données dans l'art. 160, on en ajoute une cinquième qui sert à calculer $\log \cos \omega$, et de là $\log \sin \omega$ et $\log \tan \omega$, lorsque l'angle ω est d'un petit nombre de degrés, 186

La différentiation réitérée de ces diverses formules, conduit à ce résultat général, que toute quantité de la forme $\frac{P}{\sin^m \omega \cos^n \omega}$, dans laquelle P est une fonction rationnelle et entière de $\sin \omega$ et $\cos \omega$, étant développée en série, suivant les puissances ascendantes de l'arc ω , on peut assigner un terme quelconque du développement au moyen des coefficients H_n et K_n . Il en serait de même de l'intégrale $\int \frac{\omega^{m+i} P d\omega}{\sin^m \omega \cos^n \omega}$ prise depuis $\omega = 0$, en supposant seulement $i + 1$ positif.

Pour compléter ce point d'analyse, on ajoute, sous deux formes différentes, l'expression générale de chacun des coefficients H_n , K_n .

§ XI. Réduction de la formule qui sert à exprimer la fonction $E\phi$ dans la méthode des modules croissans, 193

La formule générale de l'art. 123 étant d'une application fort difficile, on a tâché de la réduire à une forme plus simple, sans lui faire rien perdre de sa généralité. C'est à quoi l'on est parvenu au moyen d'une série qui se simplifie de plus en plus, à mesure que le module se rapproche davantage de l'unité; on la présente ensuite dans les différens cas, sous la forme qui convient le mieux au calcul logarithmique.

Exemple I. On calcule les fonctions E et F avec 14 décimales, pour le module $c = \sin 81^\circ$ et l'amplitude $\phi = 75^\circ$, 197

Exemple II. Calcul semblable pour le module $c = \sin 48^\circ$ et l'amplitude $\phi = 45^\circ$, 202

§ XII. Méthode pour construire, d'après un module donné, une table composée d'un petit nombre de valeurs des fonctions E et F , au moyen de laquelle on puisse déterminer facilement ces fonctions pour toute valeur donnée de l'amplitude, 206

Cette méthode est la même que celle du § IV ; on l'applique au calcul de la table particulière pour le module $c = \sin 45^\circ$, on montre ensuite l'usage de cette table.

La table VI a été calculée pour faciliter l'usage de cette méthode; on y trouve, pour tous les degrés de l'angle du module depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 45^\circ$, la valeur de φ , qui satisfait à l'équation $F\varphi = \frac{1}{10} F'c$.

§ XIV. *Application de la méthode précédente au calcul de la table particulière pour le module $c = \sin 81^\circ$,* pag. 221

On s'est proposé d'obtenir 14 décimales exactes dans tous les résultats que présente la table et dans les applications qu'on en a données. Ces calculs sont extrêmement pénibles, mais les nombreuses vérifications auxquelles ils ont été soumis ne permettent pas de douter qu'on ait atteint le degré de précision qu'on s'était proposé. Dans cet exemple, on trouvera réunis tous les moyens qui peuvent assurer l'exactitude des calculs où l'on emploie les grandes tables trigonométriques; on y trouvera aussi, page 246, une formule d'interpolation qui peut être utile dans tous les cas où la série des différences n'est complète que dans un sens contraire à celui où l'on peut faire l'application de la formule ordinaire.

§ XV. *Sur la construction d'un système complet de tables elliptiques,* 255

Ayant choisi de préférence la première des méthodes du § II, celle que nous avons nommée *méthode des ordonnées moyennes*, on propose de calculer d'après cette méthode les tables particulières qui doivent composer la table IX. On rappelle les formules nécessaires pour cet objet, et on en fait l'application détaillée au calcul de la table particulière pour le module $c = \sin 63^\circ$.

En supposant les calculs faits directement pour chaque degré de l'amplitude et de l'angle du module, on donne les moyens de construire une table plus étendue, dans laquelle ces deux variables croîtraient progressivement d'un quart de degré seulement. Exemple d'une portion de cette grande table, 293

On donne, suivant une notation nouvelle et très commode, les formules générales d'interpolation qui doivent être employées pour toute table à double entrée, et on en fait l'application à divers exemples, pris dans la portion de table de la page 293. Ces mêmes formules s'appliquent à la table IX, et peuvent conduire à des résultats aussi exacts, si l'on prolonge suffisamment la série des différences, 294—300

Pour faciliter la construction de la table IX, on a cru devoir calculer la table VIII, qui donne les valeurs des fonctions E et F, exprimées avec douze décimales, pour tous les degrés de l'angle du module, et pour les deux amplitudes de 45 et 90° .

Le calcul de cette table a donné lieu de simplifier de nouveau la formule qui sert à exprimer la fonction $E\varphi$, dans la méthode des modules décroissans; on est

parvenu à une nouvelle formule, qui a beaucoup d'analogie avec celle qui a été trouvée dans le § XI, pour le cas des modules croissans. On a remarqué ensuite que la supposition de $\varphi = 45^\circ$, conduit à de nouvelles formules qui simplifient beaucoup les calculs, au moins tant que l'angle θ est plus petit que 45° .

§ XVI. Des cas où l'on voudrait pousser l'approximation au-delà de 14 décimales, dans le calcul des fonctions E et F, pag. 308

On donne d'abord pour exemple le calcul des fonctions complètes F'c, E'c, fait avec 20 décimales, pour le module $c = \sin 45^\circ$.

On donne ensuite les formules par lesquelles on pourrait obtenir un pareil degré d'exactitude, dans le calcul des fonctions E et F pour une amplitude donnée φ , 314

L'usage des logarithmes ne pouvant guère avoir lieu au-delà de 20 décimales, si l'on veut obtenir un plus grand degré d'exactitude, il faudra recourir au calcul arithmétique ordinaire. Dans cette vue, on dispose les formules de manière à parvenir au degré d'approximation fixé par la voie la moins laborieuse qu'il est possible, 317—321

TABLE I, contenant les logarithmes des fonctions complètes F'c, E'c, calculés pour tous les angles du module, de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 90° , avec 14 décimales pour les 15 premiers et les 15 derniers degrés du quadrant, et 12 décimales pour tous les autres angles de 15° à 75° .

On y a joint les différences premières, secondes, troisièmes et quatrièmes de ces logarithmes, terminés uniformément à 12 décimales.

L'angle du module qui sert d'argument est désigné par θ , 125

TABLE II, contenant les valeurs des fonctions E et F calculées à 12 décimales, pour toutes les amplitudes φ de demi-degré en demi-degré, depuis 0° jusqu'à 90° , l'angle du module étant de 45° .

On y a joint la série des différences, prolongée jusqu'au cinquième ordre, 148

TABLE III, contenant les sinus naturels à 15 décimales et leurs logarithmes à 14 décimales, pour tous les arcs de 15 en 15 minutes, depuis 0° jusqu'à 90° , 156

TABLE IV, contenant les valeurs de $\log \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$, pour tous les angles φ de 30 en 30 minutes, depuis 0° jusqu'à 90° , calculées à 12 décimales, avec cinq ordres de différences.

Ces valeurs sont celles de la fonction F φ , lorsque l'angle du module est de 90° , 160

TABLE V. Contenant les logarithmes à 19 décimales pour tous les nombres impairs de 1163 à 1501, et pour tous les nombres premiers de 1501 à 10000.

Cette table sert de supplément à la Table des logarithmes à 20 décimales de

T. 0

$\int \log \sin^2 \theta$

178.

$$E = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = 209$$

$$E = \int d\varphi = 20$$

$$= \int \log \sin^2 \varphi = 209$$

$$= 209$$

$$E = 209$$

$$E = 209$$

$$E = 209$$

$$E = 209$$

Gardiner; elle est destinée à faciliter les calculs des nombres jusqu'à 15 figures ou plus, ainsi qu'on en trouve beaucoup d'exemples dans cet Ouvrage, pag. 164

TABLE VI, contenant l'échelle logarithmique des modules, calculée à 14 décimales, pour tous les angles du module, de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 15° ; et de demi-degré en demi-degré, depuis 15° jusqu'à 45° . On y a joint en même tems le logarithme du coefficient K, qui sert à trouver la fonction complète $F'c = \frac{\pi}{2} \cdot K$. 323

Cette même table donne les modules croissans $c, c', c'',$ etc., et leurs complémens $b, b', b'',$ etc., de 45° à 90° ; il suffit pour cela de prendre, au lieu de l'angle du module, son complément à 90° , et d'échanger entre elles les lettres c et b , ainsi que les signes $^\circ$ et $'$, 323

TABLE VII, où l'on trouve, pour tous les angles du module, de dixième en dixième de degré, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 45^\circ$, la valeur de l'amplitude ϕ , qui satisfait à l'équation $F\phi = \frac{1}{10} F'c$. On y a joint les différences premières, secondes et troisièmes de l'angle ϕ , 333

TABLE VIII, contenant les valeurs des fonctions E et F, dont l'amplitude est de 45° , et celles des fonctions complètes E', F' , calculées avec 12 décimales, pour tous les angles du module de degré en degré, depuis 0° jusqu'à 90° , 338

TABLE IX, contenant la série complète des fonctions elliptiques E et F, pour tous les angles du module et pour toutes les amplitudes, de degré en degré, depuis 0° jusqu'à 90° .

Ces fonctions sont calculées à dix décimales, depuis $\theta = 0^\circ$ jusqu'à $\theta = 45^\circ$; et à neuf seulement, depuis $\theta = 45^\circ$ jusqu'à $\theta = 90^\circ$, 345

Observations sur la table IX, 417

Addition au § II, 422

Addition au § IV de la troisième partie.

Nous avons traité, dans ce chapitre (tome I, page 339), de l'intégrale indéfinie $\Gamma(a, x) = \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{a-1}$; mais nous n'avons pas considéré spécialement le cas de $a = 0$, qui est celui de la transcendante $\int \frac{dx}{l^x}$, dont plusieurs géomètres se sont occupés. Nous réparerons ici cette omission, et nous ferons voir en même temps quels moyens il faut employer pour obtenir, avec tel degré d'approximation qu'on voudra, l'intégrale $\Gamma(a, x)$, dans le cas où x est très petit, problème qui n'avait pas été résolu assez complètement dans l'art. 24 du chapitre cité. Dans tous les autres cas, l'intégrale $\Gamma(a, x)$ pourra toujours se trouver facilement par l'interpolation d'une table calculée, d'après la valeur donnée de a , pour toutes les valeurs de x , de centième en centième, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; nous joignons ici deux tables de cette sorte, calculées à dix décimales, l'une pour le cas de $a = 0$, et l'autre pour celui de $a = \frac{1}{2}$, qui se présente le plus fréquemment dans les applications. Enfin nous terminerons ces recherches par des observations sur une équation différentielle analogue à l'équation de Riccati, dont on peut, dans certains cas, trouver l'intégrale complète au moyen des fonctions $\Gamma(a, x)$.

1. Considérons d'abord l'intégrale $Z = \int \frac{dx}{l^{\frac{1}{x}}}$, prise à compter

de $x = 0$; si l'on fait $l^{\frac{1}{x}} = z$, ou $x = e^{-z}$, on aura la transformée $Z = \int -\frac{e^{-z} dz}{z}$, qu'il faudra prendre depuis $z = \infty$ jusqu'à $z = l^{\frac{1}{x}}$. Substituant au lieu de e^{-z} sa valeur développée, et intégrant, on aura

$$Z = -C - lz + z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{z^3}{3} - \text{etc.} \dots (a).$$

La condition pour déterminer la constante C , est que Z s'évanouisse lorsque $z = \infty$; mais les quantités infinies que cette sup-

mmum

position introduit, ne permettent d'en tirer aucun résultat, et il faut recourir à d'autres moyens.

2. Considérons pour cet effet l'intégrale

$$V = \int \left(\frac{dx}{1-x} - l \frac{1}{x} \right),$$

prise de même à compter de $x=0$; nous aurons $V = -l(1-x) - Z$, et par conséquent,

$$V = C + l \left(\frac{z}{1-x} \right) - z + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{z^3}{3} + \text{etc.} \dots (b).$$

Il suffit de connaître la valeur de V dans un cas particulier pour déterminer la constante C ; or si l'on fait $x=1$, la quantité $\frac{z}{1-x}$ se réduit à l'unité, de sorte qu'on aura dans ce cas $V=C$. Mais par la formule du n° 11, V^e partie, on a dans le même cas $V=C$; donc C sera le nombre connu dans la théorie des fonctions Γ , dont la valeur est

$$C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86061\ 811209.$$

3. Cela posé, la formule (a) fera connaître l'intégrale Z par une suite d'autant plus convergente, que x sera plus près de l'unité. Lorsqu'on fait $x=1$, on a $z=0$, et par conséquent Z devient infini; mais cet infini n'est que logarithmique, car en faisant $x=1-\omega$, ω étant infiniment petit, on aura $Z = \mathcal{L} \frac{1}{\omega} - C + \frac{1}{2}\omega$.

A mesure que x diminue, z ou $l \frac{1}{x}$ augmente de plus en plus, et la suite contenue dans la formule (a) devient de moins en moins convergente; elle peut même devenir divergente dans les premiers termes, lorsqu'on veut déterminer l'intégrale Z pour une très petite valeur de x , mais elle finit toujours par être convergente après un certain nombre de termes. Soit P le $n^{i\text{ème}}$ terme de la suite $z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{z^3}{3} - \text{etc.}$, et P' le terme suivant, on aura en général $P' = \frac{nz}{(n+1)^2} \cdot P$, ainsi la convergence de la suite aura lieu au plus tard dès qu'on aura $n =$ ou $> z$. Par exemple, si l'on a

$x = e^{-10} = 0.0000454$, ce qui donne $z = 10$, la série sera convergente au dixième terme, ou même dès le neuvième, puisqu'en faisant $n=8$, on a $\frac{nz}{(n+1)^2} = \frac{80}{81}$. Mais on voit en même temps que la grandeur des termes qui précèdent le point de convergence, et celle d'un assez grand nombre de termes suivans, rendent très difficile le calcul par la formule (a), de la fonction Z, pour une valeur de x aussi petite qu'on l'a supposée, et la difficulté augmenterait toujours à mesure que x serait supposé plus petit.

4. Pour obvier à cet inconvénient, on pourrait faire usage de la méthode des quadratures; on diviserait la valeur donnée de x en un certain nombre de parties égales, et calculant les ordonnées $y = \frac{1}{l^{\frac{1}{x}}}$ pour tous les demi-intervalles $\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a, \frac{5}{2}a \dots x - \frac{1}{2}a$, dans lesquels x est divisé; on en déduirait la valeur de Z par la formule du n° 2, III^e partie.

5. Mais on peut aussi, par d'autres formules, éviter ces calculs de quadrature, qui sont toujours très longs, sur-tout dans le cas dont il s'agit, si l'on voulait obtenir un certain degré d'approximation. Et d'abord la formule du n° 24 donne, pour le cas de $a=0$,

$$Z = \frac{x}{z} - \frac{x}{z^2} + \frac{2x}{z^3} - \frac{2.3x}{z^4} + \frac{2.3.4x}{z^5} - \text{etc.} \dots (c),$$

formule qui sera d'autant plus convergente dans les premiers termes, que z sera plus grand. Mais comme le $n^{\text{ième}}$ terme de cette série est égal au précédent multiplié par $\frac{n-1}{z}$, on voit que la suite deviendra divergente dès qu'on aura $n-1 > z$. Ainsi, dans le cas de $z=10$, dont nous avons déjà parlé, la suite sera divergente dès le douzième terme.

6. Pour apprécier le degré d'exactitude que donnerait la formule, dans le cas dont il s'agit, il faut observer que dans une suite telle que la précédente, qui doit s'arrêter aux termes à peu près égaux $T - T'$, la somme totale est connue, à une différence près de $\frac{1}{2}T$ environ. En général, soit $x = e^{-n}$ ou $z = n$, l'erreur sur la valeur

de Z aura pour limite $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n-1}{n^n} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma n}{n^n} \cdot e^{-n}$, ce qui donne en logarithmes vulgaires $\log \varepsilon = -2mn - \frac{1}{2} \ln + \frac{1}{2} l \frac{1}{2} \pi$, m étant le module 0.43429, etc. Il s'ensuit que la valeur de Z déduite de la formule (c) sera exacte jusqu'à la décimale de l'ordre k , si l'on a $k = 2mn + \frac{1}{2} \ln - \frac{1}{2} l \frac{1}{2} \pi$, et par conséquent si $-mn$ ou... $\log x = -\frac{1}{2} k + \frac{1}{4} l \frac{Mk}{\pi}$.

L'approximation obtenue par la formule (c) est donc de plus en plus grande, à mesure que z est plus grand ou x plus petit; elle donne neuf décimales exactes pour la valeur $z=10$ ou $x=0.000454$; mais à mesure que x augmente, l'approximation diminue et devient bientôt insuffisante, comme on l'a vu dans le cas de $x=0.01$ (art. 24, partie III).

7. Il nous reste à démontrer une troisième formule dont l'application s'étend depuis les plus petites valeurs de x jusqu'à celles qui permettent d'employer avec avantage la formule (a). Cette troisième formule qui s'exprime en fraction continue, est connue depuis long-temps des Analystes; mais ils ne se sont point occupés d'en rendre le calcul facile, ni de fixer le degré de précision dont elle est susceptible, suivant le nombre de termes auquel on veut s'arrêter.

Considérons en général la fonction $Z = \Gamma(a, x) = \int z^{a-1} dx$, dans laquelle nous supposerons a positif et plus petit que l'unité, ce que l'on peut toujours obtenir par la formule de réduction du n° 23; l'intégrale Z étant prise à compter de $x=0$, la quantité z^{a-1} , où $a-1$ est négatif, sera plus grande pour la dernière valeur de x que pour les valeurs précédentes, de sorte qu'on aura toujours $Z = z^{a-1} x T$, T étant en général une quantité plus petite que l'unité, mais qui se réduit à l'unité lorsqu'on suppose x infiniment petit. Si l'on différencie cette équation et qu'on substitue les valeurs $dZ = z^{a-1} dx$, $dx = -x dz$, on aura, pour déterminer T , l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dz} - (1-a) \frac{T}{z} - T + 1 = 0,$$

qu'il conviendra de mettre sous la forme suivante, en faisant $z = \frac{1}{z}$,

$$\frac{\zeta^2 dT}{T^2 d\zeta} + \frac{(1-a)\zeta+1}{T} - \frac{1}{T^2} = 0 \dots\dots\dots (d).$$

8. Considérons plus généralement l'équation différentielle

$$\frac{\zeta^2 dT}{T^2 d\zeta} + \frac{a\zeta+1}{T} + \zeta - \frac{1}{T^2} = 0 \dots\dots\dots (e),$$

dans laquelle a et ζ sont des coefficients constans; si l'on fait $\frac{1}{T} = 1 + k\zeta T'$, on aura la transformée

$$\zeta^2 \left(kT' + k\zeta \frac{dT'}{d\zeta} \right) - (a + \zeta)\zeta + (1 - a\zeta)k\zeta T' - k^2 \zeta^2 T'^2 = 0.$$

Le coefficient k étant arbitraire, on peut faire $k = a + \zeta$; alors divisant tout par $k\zeta T'^2$, on aura

$$\frac{\zeta^2 dT'}{T'^2 d\zeta} + \frac{(1-a)\zeta+1}{T'} + (a + \zeta)\zeta - \frac{1}{T'^2} = 0.$$

Cette transformée est entièrement semblable à la proposée, puisqu'en faisant $a' = 1 - a$, $\zeta' = a + \zeta$, on peut la mettre sous la forme

$$\frac{\zeta'^2 dT'}{T'^2 d\zeta'} + \frac{a'\zeta'+1}{T'} + \zeta' - \frac{1}{T'^2} = 0,$$

et on aura en même temps $k = \zeta'$.

9. Il suit de là que, par des substitutions répétées, on obtiendra des transformées successives en T' , T'' , T''' , etc., qui seront liées entre elles et dont les coefficients seront déterminés par les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{T} = 1 + \zeta' \zeta T', & a' = 1 - a, & \zeta' = a + \zeta, \\ \frac{1}{T'} = 1 + \zeta'' \zeta T'', & a'' = a, & \zeta'' = 1 + \zeta, \\ \frac{1}{T''} = 1 + \zeta''' \zeta T''', & a''' = 1 - a, & \zeta''' = 1 + a + \zeta, \\ \frac{1}{T'''} = 1 + \zeta^{iv} \zeta T^{iv}, & a^{iv} = a, & \zeta^{iv} = 2 + \zeta, \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

On pourra donc exprimer la fonction T par cette fraction continue

$$T = 1 : (1 + (a + \zeta)\zeta : (1 + (1 + \zeta)\zeta : (1 + (1 + a + \zeta)\zeta : (1 + (2 + \zeta)\zeta : (1 + \text{etc.} \dots (f),$$

où il faut remarquer que les dénominateurs des fractions composantes sont tous égaux à l'unité, et que les numérateurs forment la suite

$(\alpha + \zeta)\zeta, (1 + \zeta)\zeta, (1 + \alpha + \zeta)\zeta, (2 + \zeta)\zeta, (2 + \alpha + \zeta)\zeta, \text{ etc. },$
 dont la loi est telle, que les termes croissent alternativement de $(1 - \alpha)\zeta$ et de $\alpha\zeta$.

Cette expression sera l'intégrale de l'équation différentielle (e), si toutefois la fonction cherchée T doit se réduire à l'unité lorsque $\zeta = 0$.

10. Cette condition étant remplie dans l'équation proposée (d), il y aura lieu de lui appliquer la formule (f); c'est pourquoi faisant $\alpha = 1 - a$, $\zeta = 0$, on aura, pour l'intégrale générale $Z = \int z^{a-1} dx$, cette expression en fraction continue,

$$Z = xz^{a-1} : (1 + (1-a)\zeta) : (1 + \zeta) : (1 + (2-a)\zeta) : (1 + 2\zeta) : (1 + (3-a)\zeta) + \text{etc.} \dots (g).$$

où l'on voit que les numérateurs des fractions composantes forment la suite $(1-a)\zeta, \zeta, (2-a)\zeta, 2\zeta, (3-a)\zeta, 3\zeta, (4-a)\zeta, \text{ etc. },$ dont les termes croissent alternativement de $a\zeta$ et de $(1-a)\zeta$.

11. Maintenant si l'on fait $a = 0$, on aura, pour le cas particulier de l'intégrale $Z = \int \frac{dx}{z}$, cette troisième formule

$$Z = x\zeta : (1 + \zeta) : (1 + \zeta) : (1 + 2\zeta) : (1 + 2\zeta) : (1 + 3\zeta) : (1 + \text{etc.} \dots (h),$$

où l'on voit que les numérateurs $\zeta, \zeta, 2\zeta, 2\zeta, 3\zeta, 3\zeta, 4\zeta, \text{ etc. },$ croissent alternativement de 0 et de ζ .

Il n'y aura lieu d'employer la formule (h) que pour de très petites valeurs de x , qui laissent encore ζ assez petit; car, par exemple, pour la valeur $x = \frac{1}{e^4} = 0.0183$, qui donne $z = 4$ et $\zeta = \frac{1}{4}$, on pourra employer indifféremment la formule (a), qui ne cesse pas d'être convergente, ou la formule (h); le choix de l'une ou de l'autre dépend encore du degré d'approximation qu'on veut atteindre, et qui s'obtiendra plus facilement, tantôt par une formule, tantôt par l'autre. Pour mieux en juger, il faut faire voir quelle est la meilleure manière de calculer des fractions continues telles que la

formule (h), dans laquelle les numérateurs augmentent à l'infini, tandis que les dénominateurs restent égaux à l'unité.

12. Soient $\frac{P^0}{Q^0}$, $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ les trois fractions consécutives qui résultent du calcul de la fraction continue, exécuté suivant les règles ordinaires en s'arrêtant à la fraction composante $\frac{\mu}{1}$; on aura, d'après la loi connue,

$P' = P + \mu P^0$, $Q' = Q + \mu Q^0$; de là $P'Q - PQ' = \mu(P^0Q - PQ^0)$,
ou

$$\frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = -\frac{\mu Q^0}{Q'} \left(\frac{P}{Q} - \frac{P^0}{Q^0} \right).$$

Supposons la différence $\frac{P}{Q} - \frac{P^0}{Q^0}$ positive $= R^0$; on voit que la différence suivante $\frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q}$ sera négative; en l'appelant $-R$, on aura

$$R = \frac{\mu Q^0}{Q'} R^0.$$

On parviendra donc à la valeur $\frac{P'}{Q'}$, en calculant par cette formule une suite de différences $r, r', r'' \dots R^0, R$, qui, à partir du premier terme A de la série, s'appliqueront alternativement en plus et en moins au résultat de tous les termes précédens; d'où l'on conclura

$$\frac{P'}{Q'} = A - r + r' - \dots + R^0 - R.$$

Les signes des différences seront toujours alternatifs, tant que les indices μ seront positifs, comme dans le cas proposé. On obtiendra donc ainsi des résultats alternativement plus grands et plus petits que la valeur totale que l'on cherche, ce qui donnera à chaque instant une mesure du degré d'approximation auquel on est parvenu. Lorsqu'il ne manquera plus qu'une ou deux décimales pour obtenir le degré désiré, on pourra s'arrêter à la dernière différence calculée R, et suppléer aux différences suivantes R', R'' , etc., en considérant la suite R^0, R, R', R'' comme une progression géométrique; dans cette hypothèse, faisant $R = \alpha R^0$, on aura.....

$R - R' + R'' - \text{etc.} = R(1 - \alpha + \alpha^2 - \text{etc.}) = \frac{R}{1 + \alpha}$; ainsi au lieu de la différence R on prendra $\frac{R}{1 + \alpha}$. Pour plus d'exactitude, on pourrait avoir recours aux trois derniers termes R°, R^1, R , et faisant $R^\circ = \alpha^\circ R^\circ$, $R = \alpha R^\circ$, on supposerait par analogie $R' = \alpha' R$, et l'on déduirait le rapport α' des deux rapports connus α°, α , par l'équation $\log \alpha' = 2 \log \alpha - \log \alpha^\circ$; ensuite, au lieu de R , on prendrait $\frac{R}{1 + \alpha'}$.

13. Pour calculer facilement les différences R et éviter en même temps l'embarras des grands nombres auxquels conduirait nécessairement, dans ces opérations, l'accroissement rapide des indices μ , voici comment il faudra procéder.

Soit la fraction proposée $Z = X : (1 + \mu : (1 + \mu_1 : (1 + \mu_2 : (1 + \mu_3 : (1 + \text{etc.} ;$ les premiers termes, calculés à la manière ordinaire, sont :

$$\frac{X}{1}, \quad \frac{X}{1 + \mu}, \quad \frac{X(1 + \mu_1)}{1 + \mu + \mu_1}, \quad \frac{X(1 + \mu_1 + \mu_2)}{1 + \mu + \mu_1 + \mu_2(1 + \mu)}, \quad \text{etc.},$$

et la série formée par la différence des termes consécutifs commence ainsi :

$$Z = \frac{X}{1} - \frac{X\mu}{1 + \mu} + \frac{X\mu\mu_1}{(1 + \mu)(1 + \mu + \mu_1)} - \text{etc.}$$

Pour la continuer indéfiniment, on prendra des auxiliaires $\theta, \lambda, \theta_1, \lambda_1, \theta_2, \lambda_2, \text{etc.}$, d'après la loi suivante, qui comprend celle des différences $R, R_1, R_2, \text{etc.}$,

$$\begin{array}{lll} \theta = \mu, & \lambda = \frac{1}{1 + \theta}, & R = X\theta\lambda, \\ \theta_1 = \mu_1\lambda, & \lambda_1 = \frac{1}{1 + \theta_1}, & R_1 = R\theta_1\lambda_1, \\ \theta_2 = \mu_2\lambda_1, & \lambda_2 = \frac{1}{1 + \theta_2}, & R_2 = R_1\theta_2\lambda_2, \\ \theta_3 = \mu_3\lambda_2, & \lambda_3 = \frac{1}{1 + \theta_3}, & R_3 = R_2\theta_3\lambda_3, \\ \theta_4 = \mu_4\lambda_3, & \lambda_4 = \frac{1}{1 + \theta_4}, & R_4 = R_3\theta_4\lambda_4, \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Cela posé, la valeur de Z se calculera par la suite

$$Z = X - R + R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \text{etc.},$$

qu'on prolongera jusqu'à ce qu'on ait obtenu le degré d'exactitude désiré.

14. Ces calculs, comme on voit, sont très faciles à faire par logarithmes; toute prolixité et toutes opérations inutiles en sont écartées; il suffira de calculer les termes X, R, R_1, R_2 , etc., avec une décimale de plus qu'on n'en veut avoir dans le résultat, et l'on prolongera la suite des différences jusqu'à ce qu'elles appartiennent à l'ordre de décimales qu'on peut négliger, ou seulement jusqu'à ce qu'elles approchent de cet ordre, puisqu'on peut tenir compte des termes suivans par le moyen que nous avons indiqué.

Il est bon d'observer, au sujet de ces calculs logarithmiques, que pour déduire chaque λ du θ correspondant, par l'équation $\frac{1}{\lambda} = 1 + \theta$, on pourra faire usage des formules souvent mentionnées $\log \theta = \log a \pm d$, $d' = \frac{d}{1+a}$, $\log D = \log(ad') \pm \frac{1}{2}d'$, d'où résulte $\log(1 + \theta)$, ou $-\log \lambda = \log(1 + a) \pm D$. On prend pour a le nombre de la table dont le logarithme approche le plus de $\log \theta$; il suffit que a ait au moins le tiers du nombre de chiffres significatifs avec lesquels R doit être déterminé; mais il faut que $\log(1 + a)$ soit aussi donné dans la table immédiatement et sans interpolation.

15. Comme on a en général $R_n = R_{n-1} \cdot \frac{\theta_n}{1 + \theta_n}$, il est évident que les différences R, R_1, R_2 , etc., vont continuellement en diminuant, dès le commencement de la série, ce qui est une suite de ce que les indices μ sont supposés tous positifs; ainsi à mesure que la suite des différences est prolongée, l'approximation augmente de plus en plus, pourvu que les différens termes, à compter du premier X , soient calculés jusqu'au nombre de décimales qu'on veut obtenir dans le résultat, ou même au-delà, pour obvier à l'accumulation des erreurs.

La formule (h) est donc propre à déterminer l'intégrale Z pour les très petites valeurs de x , sans être sujette aux inconvéniens que

nnn

présentent les formules (a) et (c), la première en offrant des termes divergens dès le commencement de la série, et fort grands par rapport au résultat cherché; la seconde, en amenant assez promptement une divergence qui limite beaucoup l'approximation et la rend souvent insuffisante. Cette formule, cependant, est loin de conserver son avantage, lorsqu'on l'applique à des valeurs de x qui passent une certaine limite; car sa marche se ralentit de plus en plus, à mesure que x augmente, et la formule (a) devient fort préférable, sur-tout si l'on a besoin d'une grande approximation.

16. Pour mieux apprécier la formule (h), essayons de déterminer combien il faudra calculer de termes de cette formule, afin d'obtenir la valeur de $\frac{Z}{x\zeta}$ avec un nombre i de décimales, ou de manière que l'erreur soit moindre que 10^{-i} .

On remarquera d'abord que le $n^{\text{ième}}$ des numérateurs $\zeta, \zeta, 2\zeta, 2\zeta, 3\zeta, 3\zeta$, etc., peut être représenté par $\frac{1}{2}\zeta(n + \sin^2 \frac{1}{2}n\pi)$; or on a $\theta_n = \mu_n \lambda_{n-1}$, ou $\theta_n(1 + \theta_{n-1}) = \mu_n$; donc $\theta_n(1 + \theta_{n-1}) = \frac{1}{2}\zeta(n + \sin^2 \frac{1}{2}n\pi)$. De là on voit que θ_n a pour limite $(\frac{1}{2}\zeta n)^{\frac{1}{2}}$, et qu'ainsi lorsque n devient un peu grand, on peut supposer $\theta_n = \sqrt{(\frac{1}{2}\zeta n)}$.

Soit $\log R_n = U_n$, l'équation $R_n = R_{n-1}\theta_n \lambda_n$ donnera $U_n = U_{n-1} + l \frac{\theta_n}{1 + \theta_n} = U_{n-1} - \frac{1}{\theta_n} = U_{n-1} - \sqrt{(\frac{1}{2}\zeta n)}$; d'où l'on déduit la valeur approchée

$$U_n = \text{const.} - 2\sqrt{(\frac{n}{\frac{1}{2}\zeta})}.$$

Ainsi, à mesure que n augmente, le logarithme hyp. de R_n approche de plus en plus de la limite : $\text{const.} - 2\sqrt{(\frac{n}{\frac{1}{2}\zeta})}$, et son logarithme vulgaire, de la limite : $\text{const.} - 2m\sqrt{(\frac{n}{\frac{1}{2}\zeta})}$. Si l'on veut donc que cette limite soit $-i$, on aura $2m\sqrt{(\frac{n}{\frac{1}{2}\zeta})} = \text{const.} + i$, ou à peu près $n = \frac{1}{8}M^2\zeta i^2$, M étant le nombre 2.3025, etc. On voit par conséquent que le nombre n augmente en raison du nombre ζ , et aussi en raison du carré du nombre de décimales qu'on veut obtenir.

Soit, par exemple, $x = 0.01$, ce qui donne $z = l\ 100 = 2M$, $\zeta = \frac{1}{2M}$; on aura à peu près $n = \frac{1}{16} Mi^2$; dans ce même cas, $x\zeta = \frac{m}{200} = 0.00217$; donc si l'on veut que Z soit déterminé avec dix décimales exactes, il faudra faire $i = 8$, ce qui donnera $n = 4M = 9.2$; donc il suffira de 9 à 10 termes de la série des R , pour obtenir ce degré d'exactitude. Si l'on veut vingt décimales exactes, il faudra faire $i = 18$, ce qui donnera $n = 46.5$; ainsi la série des R devrait être prolongée jusqu'à 46 ou 47 termes.

Si l'on fait $x = 0.1$, ζ sera égal à m et l'on aura $n = \frac{1}{8} Mi^2$; dans ce même cas, $x\zeta = 0.0434$; donc, si l'on veut déterminer Z avec dix décimales exactes, il faudra faire $i = 9$, et l'on aura $n = 22$, c'est-à-dire qu'il faudra calculer 22 ou 23 termes de la série, et pour l'avoir avec vingt décimales, il en faudrait calculer plus de 100. La formule (a) exigerait aussi environ 22 termes dans le premier cas, et seulement 32 dans le second. Nous ajouterons qu'à égal nombre de termes, l'usage de la formule (a) est préférable, parce que chaque terme se déduit très simplement du précédent.

17. Pour faciliter le calcul des fonctions Z , dans tous les cas où x n'est pas très petit, nous joignons ici une table des valeurs de la fonction V , calculée pour toutes les valeurs de x , de centième en centième, depuis $x = 1.00$ jusqu'à $x = 0$. Il nous aurait été également facile de donner la table des fonctions Z , puisque la somme de ces deux fonctions est égale à la quantité $-l(1-x)$, donnée immédiatement dans la table des logarithmes hyperboliques. Mais l'interpolation pour les valeurs de x peu différentes de l'unité serait d'un calcul difficile et peu exact dans la table des fonctions Z , tandis qu'elle est très facile dans la table des fonctions V . D'ailleurs, connaissant V , on a immédiatement.....

$$Z = l\left(\frac{1}{1-x}\right) - V.$$

Le calcul de la table des fonctions V a été fait par la formule (b), ou par une formule équivalente (*), depuis $x = 1.00$ jusqu'à

(*) La formule (b) développée, en faisant $x = 1 - u$, prend la forme

$$V = C - A_1 u - A_2 u^2 - A_3 u^3 - A_4 u^4 - \text{etc.},$$

$x=0.80$. Pour les valeurs suivantes, depuis $x=0.80$ jusqu'à $x=0.06$, nous avons préféré d'employer la méthode des ordonnées moyennes, corrigée pour les dernières valeurs de x , comme on l'a expliqué art. 256. Enfin les cinq derniers termes, à compter de $x=0.05$, ont été calculés par la formule (h), qui donne la valeur de Z , d'où l'on tire celle de V .

18. L'interpolation de la table des fonctions V se fera à l'ordinaire, par la série des différences, tant que x ne sera pas plus petit que 0.10; il deviendra seulement nécessaire d'avoir égard aux différences du cinquième, ou même du sixième ordre, lorsque x approchera de cette limite, et dans ce cas, il conviendrait d'employer la série des différences dans l'ordre de x croissant.

L'interpolation peut aussi se faire en général, par une formule dont l'application s'étend jusqu'à des valeurs assez petites de x .

Soit a le nombre de la table qui approche le plus de la valeur donnée $x=a-\alpha$; on connaît la valeur correspondante de $V(a)$, et par conséquent celle de $Z(a)$; il ne s'agit donc que d'avoir la différence $y=Z(a)-Z(a-\alpha)$. Pour cela soit $x=e^{-z}$, ce qui

donne $Z=f-\frac{e^z dz}{z}$, soit ensuite $a=e^{-b}$, $a-\alpha=e^{-b-\epsilon}$, ou $b=l\frac{1}{\alpha}$, $\epsilon=l\frac{\alpha}{a-\alpha}$; soit enfin $z=b+\omega$, on aura

$$y=\int \frac{e^{-b-\alpha} d\omega}{b+\omega} = \frac{a}{b} \int e^{-\omega} d\omega \left(1 - \frac{\omega}{b} + \frac{\omega^2}{b^2} - \text{etc.}\right),$$

intégrale qui devra être prise depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\epsilon$. Le premier terme $\frac{a}{b} \int e^{-\omega} d\omega$ donne $\frac{a}{b} (1-e^{-\epsilon})$, ou $\frac{\alpha}{a}$; les autres étant

où l'on a $A_1=\frac{1}{2}$, $A_2=\frac{1}{24}$, $A_3=\frac{1}{72}$, $A_4=\frac{19}{2880}$, $A_5=\frac{3}{800}$, etc.

On parviendrait directement à ce résultat par le développement de l'expression

$$V = \int \frac{-du(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}u + \frac{1}{4}u^2 + \text{etc.})}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{4}u^3 + \text{etc.}},$$

mais le peu de convergence de la suite des coefficients A_1 , A_2 , A_3 , etc., et le défaut d'une loi simple qui permette de les continuer indéfiniment, rendent cette formule peu utile lorsque u n'est pas très petit, ou lorsqu'on veut obtenir une grande approximation.

intégrés successivement par le développement de e^{-x} , on en tire

$$(i) \quad y = \frac{a}{b} - \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{e^3}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{e^4}{6} - \text{etc.} \right) \\ + \frac{a^3}{b^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{e}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{e^3}{6} + \text{etc.} \right) \\ - \frac{a^4}{b^4} \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{6} - \text{etc.} \right) \\ + \frac{a^5}{b^5} \left(\frac{1}{5} - \frac{e}{6} \right) - \text{etc.}$$

Cette formule pourra s'appliquer depuis $x=1$ jusqu'à $x=0.05$; mais au-dessous de cette limite, il sera plus simple de calculer directement la fonction Z par la formule (h).

19. L'usage de la table est borné à la valeur $x=1$, qui rend la fonction Z infinie; passé $x=1$, la fonction Z redevient finie; elle diminue progressivement jusqu'à la valeur $x=1.45137$, où elle est nulle; ensuite x continuant à augmenter, la valeur de Z devient négative et augmente jusqu'à l'infini. D'ailleurs depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, cette fonction se déterminera avec tel degré d'exactitude qu'on voudra, par la formule (a), où il faudra changer le signe de z (excepté dans le terme lz), et faire $z=\log x$, ce qui donnera

$$Z = -C - lz - z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{z^3}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{z^4}{4} - \text{etc.}$$

20. Imaginons une courbe dont l'ordonnée pour chaque abscisse x soit égale à la fonction Z ; l'aire de cette courbe sera

$$\int Z dx = xZ - \int \frac{x dx}{l \frac{1}{x}} = xZ - Z(x^2),$$

en désignant par $Z(x^2)$ ce que devient la fonction Z ou $Z(x)$, lorsqu'au lieu de x on met x^2 . Si dans cette équation on fait $x=1-\omega$, ω étant infiniment petit, on aura $x^2=1-2\omega$, $Z(x)=-C-l\omega$, $Z(x^2)=-C-l(2\omega)$. Donc, $\int Z dx = l_2$; ainsi quoique l'ordonnée Z soit infinie lorsque $x=1$, l'aire de la courbe pour cette même abscisse, n'en est pas moins égale à la quantité finie l_2 .

TABLE des valeurs de l'intégrale $V = \int \left(\frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{l \frac{1}{x}} \right) = 2x - 5x$

x.	Int. V.	Diff. I.	II.	III.	IV.	x.	Int. V.	Diff. I.	II.	III.	IV.
1.00	0.57721	56649	500	41806	84176	858	16	0.50	0.31447	61373	558
0.99	0.57221	14843	501	25982	85034	874	18	0.49	0.30889	48998	559
0.98	0.56719	88861	502	11016	85908	892	17	0.48	0.30329	70786	561
0.97	0.56217	77845	502	96924	86800	909	19	0.47	0.29768	23531	563
0.96	0.55714	80921	503	83724	87709	928	19	0.46	0.29205	03902	564
0.95	0.55210	97197	504	71433	88637	947	19	0.45	0.28640	08436	566
0.94	0.54706	25764	505	60070	89584	966	20	0.44	0.28073	33530	568
0.93	0.54200	65694	506	49654	90550	986	21	0.43	0.27504	75433	570
0.92	0.53694	16040	507	40204	91536	1007	21	0.42	0.26934	30235	572
0.91	0.53186	75836	508	31740	92543	1028	23	0.41	0.26361	93858	574
0.90	0.52678	44096	509	24283	93571	1051	22	0.40	0.25787	62044	576
0.89	0.52169	19815	510	17854	94622	1073	22	0.39	0.25211	30342	578
0.88	0.51659	01959	511	12476	95695	1095	27	0.38	0.24632	94096	580
0.87	0.51147	89483	512	08171	96790	1122	25	0.37	0.24052	48428	582
0.86	0.50635	81312	513	04961	97912	1147	23	0.36	0.23469	88223	584
0.85	0.50122	76351	514	02873	99059	1170	30	0.35	0.22885	08112	587
0.84	0.49608	73478	515	01932	100229	1200	26	0.34	0.22298	02449	589
0.83	0.49093	71546	516	02161	101429	1226	29	0.33	0.21708	65291	591
0.82	0.48577	69385	517	03590	102655	1255	30	0.32	0.21116	90373	594
0.81	0.48060	65795	518	06245	103910	1285	31	0.31	0.20522	71078	596
0.80	0.47542	59550	519	10155	105195	1316	33	0.30	0.19926	00410	599
0.79	0.47023	49395	520	15350	106511	1349	33	0.29	0.19326	70957	601
0.78	0.46503	34045	521	21861	107860	1382	33	0.28	0.18724	74853	604
0.77	0.45982	12184	522	29721	109242	1412	38	0.27	0.18120	03730	607
0.76	0.45459	82463	523	38963	110654	1450	42	0.26	0.17512	48674	610
0.75	0.44936	43500	524	49617	112104	1492	33	0.25	0.16902	00160	613
0.74	0.44411	93883	525	61724	113596	1525	44	0.24	0.16288	47992	616
0.73	0.43886	32159	526	75320	115121	1569	39	0.23	0.15671	81225	619
0.72	0.43359	56839	527	90441	116690	1608	44	0.22	0.15051	88073	623
0.71	0.42831	66398	529	07131	118298	1652	45	0.21	0.14428	55810	626
0.70	0.42302	59267	530	25429	119950	1697	47	0.20	0.13801	70645	630
0.69	0.41772	33838	531	45379	121647	1744	49	0.19	0.13171	17580	634
0.68	0.41240	88459	532	67026	123391	1793	51	0.18	0.12536	80236	638
0.67	0.40708	21433	533	90417	125184	1844	55	0.17	0.11898	40648	642
0.66	0.40174	31016	535	15601	127028	1899	53	0.16	0.11255	79009	647
0.65	0.39639	15415	536	42629	128927	1952	61	0.15	0.10608	73364	651
0.64	0.39102	72786	537	71556	130879	2013	60	0.14	0.09956	99217	656
0.63	0.38565	01230	539	02435	132892	2073	63	0.13	0.09300	29050	661
0.62	0.38025	98795	540	35327	134965	2136	68	0.12	0.08638	31690	667
0.61	0.37485	63468	541	70292	137101	2204	68	0.11	0.07970	71495	673
0.60	0.36943	93176	543	07393	139305	2272	75	0.10	0.07197	07260	680
0.59	0.36400	85783	544	46698	141577	2347	76	0.09	0.06616	90722	687
0.58	0.35856	39085	545	88275	143924	2423	83	0.08	0.05929	64464	695
0.57	0.35310	50810	547	32199	146347	2506	84	0.07	0.05234	58839	703
0.56	0.34763	18611	548	78546	148853	2590	89	0.06	0.04530	87301	713
0.55	0.34214	40065	550	27399	151443	2679	94	0.05	0.03817	38853	724
0.54	0.33664	12666	551	78842	154122	2773	101	0.04	0.03092	64921	738
0.53	0.33112	33824	553	32964	156895	2874	104	0.03	0.02354	53978	754
0.52	0.32559	00860	554	89859	159769	2978	112	0.02	0.01599	74929	777
0.51	0.32004	11001	556	49628	162747	3090	116	0.01	0.00822	05921	822
0.50	0.31447	61373	558	12375	165837	3206	125	0.00	0.00000	00000	

21. Nous avons traité fort au long des différens moyens d'évaluer la fonction $\Gamma(a, x)$ dans le cas de $a=0$. Occupons-nous maintenant du cas $a=\frac{1}{2}$, qui est celui de l'intégrale $Z = \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}, x\right).$$

Faisant à l'ordinaire $l \frac{1}{x} = z$, ou $x = e^{-z}$, on aura sous une autre forme $Z = \int -z^{-\frac{1}{2}} dz e^{-z}$, d'où l'on tire, en développant e^{-z} et intégrant

$$Z = \Gamma \frac{1}{2} - 2z^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{z^3}{7} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{z^4}{9} - \text{etc.}\right) \dots (k).$$

On sait d'ailleurs que $\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$, ainsi étant donné x et en même temps $z = l \frac{1}{x}$, on connaîtra l'intégrale Z par une série d'autant plus convergente, que z sera plus petit, c'est-à-dire que x approchera plus de l'unité.

A mesure que x deviendra plus petit, la série sera de moins en moins convergente; elle deviendra même divergente dans les premiers termes, dès qu'on aura $z > 3$, ou $x < e^{-3} < 0.05$. Dans ce cas et dans ceux où x est encore beaucoup plus petit, la série, qui est divergente dans les premiers termes, finit toujours par être convergente, et même plus que toute progression géométrique décroissante. Mais comme il faudrait calculer un nombre de termes assez grand pour arriver au point de convergence (qu'on peut toujours déterminer *à priori*), et que ces termes ayant une valeur absolue beaucoup plus grande que le résultat qui doit provenir de la série totale, il deviendrait nécessaire de calculer chacun d'eux avec beaucoup de précision, puisque la plus grande partie de leur valeur doit être détruite; on voit par toutes ces raisons qu'il vaudra presque toujours mieux, dans le cas de x très petit, appliquer la formule générale de l'art. 10 ci-dessus.

22. Faisant donc $a = \frac{1}{2}$, et $\zeta = \frac{1}{2z}$, on aura la formule

$$Z = xz^{-\frac{1}{2}} : (1 + \zeta : (1 + 2\zeta : (1 + 3\zeta : (1 + 4\zeta : (1 + \text{etc.} \quad (l);$$

où l'on doit remarquer que les numérateurs croissent continuellement de ζ , tandis que les dénominateurs sont tous égaux à l'unité.

Le calcul de cette formule devra se faire comme nous l'avons expliqué dans l'art. 13. Pour en donner un exemple, soit $x=0.01$; on aura $z=l_{100}=2M$, $\zeta=\frac{1}{2z}=\frac{1}{4}m=0.10857\ 362$ etc.; d'après ces valeurs, il faut calculer successivement les quantités X , R , R_1 , R_2 , etc. par les formules de l'article cité, savoir,

$$\begin{aligned}
 X &= xz^{-\frac{1}{2}}, \\
 \theta &= \zeta, \quad \lambda = \frac{1}{1+\theta}, \quad R = X\theta\lambda, \\
 \theta_1 &= 2\zeta\lambda, \quad \lambda_1 = \frac{1}{1+\theta_1}, \quad R_1 = R\theta_1\lambda_1, \\
 \theta_2 &= 3\zeta\lambda_1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{1+\theta_2}, \quad R_2 = R_1\theta_2\lambda_2, \\
 \theta_3 &= 4\zeta\lambda_2, \quad \lambda_3 = \frac{1}{1+\theta_3}, \quad R_3 = R_2\theta_3\lambda_3, \\
 &\text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Voici les logarithmes de ces quantités, calculés à dix décimales, avec les valeurs qui en résultent progressivement pour la fonction $Z = X - R + R_1 - R_2 + R_3 - \text{etc.}$

$X \dots 7.66837\ 71578\ 2$	$\theta \dots 9.03572\ 43199\ 8$	$X = 0.00465\ 99060\ 2$
$\theta\lambda \dots 8.99095\ 97799\ 8$	$\lambda \dots 9.95523\ 54600\ 0$	$R \dots - \quad 45\ 63908\ 6$
$R \dots 6.65933\ 69378\ 0$	$\theta_1 \dots 9.29198\ 97756\ 4$	$R_1 \dots + \quad 420\ 35151\ 6$
$\theta_1\lambda_1 \dots 9.21430\ 22252\ 2$	$\lambda_1 \dots 9.92231\ 24495\ 8$	$R_2 \dots - \quad 427\ 82699\ 7$
$R_1 \dots 5.87363\ 91630\ 2$	$\theta_2 \dots 9.43515\ 80242\ 8$	$R_3 \dots + \quad 426\ 22676\ 1$
$\theta_2\lambda_2 \dots 9.33054\ 48692\ 0$	$\lambda_2 \dots 9.89538\ 68449\ 2$	$R_4 \dots - \quad 40721\ 2$
$R_2 \dots 5.20418\ 40322\ 2$	$\theta_3 \dots 9.53317\ 11562\ 2$	$R_5 \dots + \quad 63397\ 3$
$\theta_3\lambda_3 \dots 9.40563\ 63390\ 5$	$\lambda_3 \dots 9.87246\ 52028\ 3$	$R_6 \dots - \quad 11732\ 4$
$R_3 \dots 4.60982\ 03912\ 7$	$\theta_4 \dots 9.60715\ 95271\ 5$	$R_7 \dots + \quad 51664\ 9$
$\theta_4\lambda_4 \dots 9.45956\ 83608\ 9$	$\lambda_4 \dots 9.85240\ 88337\ 4$	$R_8 \dots - \quad 3717\ 1$
$R_4 \dots 4.06938\ 87521\ 6$	$\theta_5 \dots 9.66628\ 44041\ 4$	$R_9 \dots + \quad 55382\ 0$
$\theta_5\lambda_5 \dots 9.50081\ 73435\ 3$	$\lambda_5 \dots 9.83453\ 29393\ 9$	$R_{10} \dots - \quad 1270\ 4$
$R_5 \dots 3.57020\ 60956\ 9$	$\theta_6 \dots 9.71535\ 52993\ 7$	$R_{11} \dots + \quad 54111\ 6$
$\theta_6\lambda_6 \dots 9.53373\ 33020\ 1$	$\lambda_6 \dots 9.81837\ 80026\ 4$	$R_{12} \dots - \quad 462\ 1$
$R_6 \dots 3.10393\ 93977$	$\theta_7 \dots 9.75719\ 23096$	$R_{13} \dots + \quad 54573\ 7$
$\theta_7\lambda_7 \dots 9.56081\ 38838$	$\lambda_7 \dots 9.80362\ 15742$	$R_{14} \dots - \quad 177\ 2$
$R_7 \dots 2.66475\ 32815$	$\theta_8 \dots 9.79358\ 840$	$R_{15} \dots + \quad 54396\ 5$
$\theta_8\lambda_8 \dots 9.58361\ 499$	$\lambda_8 \dots 9.79002\ 659$	$R_{16} \dots - \quad 71\ 0$
$R_8 \dots 2.24836\ 827$	$\theta_9 \dots 9.82575\ 09$	$R_{17} \dots + \quad 20\ 8$
$\theta_9\lambda_9 \dots 9.60316\ 45$	$\lambda_9 \dots 9.77741\ 36$	$Z = 0.00426\ 54447$
$R_9 \dots 1.85153\ 28$		

23. Pour faciliter le calcul des fonctions Z , nous avons construit la table ci-jointe, où l'on remarque deux parties distinctes.

Dans la première, la fonction Z est calculée avec ses différences successives, pour toutes les valeurs de $t = \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, de centième en centième, depuis $t=0$ jusqu'à $t=0.50$. Ces limites répondent aux valeurs $x=1$, $x=0.7788$ etc.; ainsi la première partie de la table servira à calculer la fonction Z pour toutes les valeurs de x comprises entre ces limites; car d'ailleurs x étant donné on connaît $t = \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$. Cette première partie a été calculée par la formule (k).

Dans la seconde partie on trouve la fonction Z calculée pour toutes les valeurs de x , de centième en centième, depuis $x=0.80$ jusqu'à $x=0.00$; cette partie a été construite par la méthode des ordonnées moyennes, excepté les cinq ou six derniers termes, qui ont été calculés directement par la formule (l), dont nous avons donné un exemple.

24. Si l'on compare les derniers nombres de la première partie de la table, avec les premiers de la seconde partie, lesquels répondent à peu près aux mêmes valeurs de x , on verra qu'en supposant même égaux les intervalles, qui sont moindres dans la première partie que dans la seconde, il y aurait un avantage marqué à se servir, pour l'interpolation, des nombres de la première partie, attendu que les différences successives diminuent bien plus rapidement dans ces nombres que dans ceux de la seconde partie.

En général, quand on veut construire la table des valeurs d'une fonction, il importe de choisir convenablement l'*argument* de cette table, c'est-à-dire la variable par laquelle la fonction doit être déterminée, pour que les différences décroissent de la manière la plus prompte, et qu'elles rendent ainsi l'interpolation plus facile. Car en substituant une variable à une autre, la marche des différences n'étant plus la même, on doit préférer celle qui sera la plus favorable aux interpolations.

$-01 = 1(2, 1, x)^{-\frac{1}{2}}$
TABLE des valeurs de l'intégrale $Z = \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}$; la première partie depuis

t.	Z.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	t.	Z.	Diff. I.
0.00	1.77245 38509	1999 93333	39993	39972	0.051	21		0.25	1.28267 80766	1874 07449
0.01	1.75245 45176	1999 53340	79965	39921	72	21		0.26	1.26393 73317	1864 35476
0.02	1.73245 91836	1998 73375	1 19886	39849	93	28		0.27	1.24529 37841	1854 31454
0.03	1.71247 18461	1997 53489	1 59735	39756	121	22		0.28	1.22675 06387	1843 95957
0.04	1.69249 64972	1995 93754	1 99491	39635	143	25		0.29	1.20831 10430	1833 29574
0.05	1.67253 71218	1993 94263	2 39126	39492	168	20		0.30	1.18997 80856	1822 32908
0.06	1.65259 76955	1991 55137	2 78618	39324	188	25		0.31	1.17175 47948	1811 06578
0.07	1.63268 21818	1988 76519	3 17942	39136	213	25		0.32	1.15364 41370	1799 51216
0.08	1.61279 45299	1985 58577	3 57078	38923	238	19		0.33	1.13564 90154	1787 67459
0.09	1.59293 86722	1982 01499	3 96001	38685	257	24		0.34	1.11777 22685	1775 55994
0.10	1.57311 85223	1978 05498	4 34686	38428	281	24		0.35	1.10001 66691	1763 17462
0.11	1.55333 79725	1973 70812	4 73114	38147	305	18		0.36	1.08238 49229	1750 52557
0.12	1.53360 08913	1968 97698	5 11261	37842	323	24		0.37	1.06487 96672	1737 61971
0.13	1.51391 11215	1963 86437	5 49103	37519	347	22		0.38	1.04750 34701	1724 46407
0.14	1.49427 24778	1958 37334	5 86622	37172	369	20		0.39	1.03025 88294	1711 06579
0.15	1.47468 87444	1952 50712	6 23794	36803	389	19		0.40	1.01314 81715	1697 43210
0.16	1.45516 36732	1946 26918	6 60597	36414	408	20		0.41	0.99617 38505	1683 57030
0.17	1.43570 09814	1939 66321	6 97011	36006	428	23		0.42	0.97933 81475	1669 48778
0.18	1.41630 43493	1932 69310	7 33017	35578	451	16		0.43	0.96264 32697	1655 19198
0.19	1.39697 74183	1925 36293	7 68595	35127	467	20		0.44	0.94609 13499	1640 69043
0.20	1.37772 37890	1917 67698	8 03722	34660	487	19		0.45	0.92968 44456	1625 99071
0.21	1.35854 70192	1909 63976	8 38382	34173	506	15		0.46	0.91342 45385	1611 10044
0.22	1.33945 06216	1901 25594	8 72555	33667	521	20		0.47	0.89731 35341	1596 02730
0.23	1.32043 80622	1892 53039	9 06222	33146	541	15		0.48	0.88135 32611	1580 77901
0.24	1.30151 27583	1883 46817	9 39368	32605	556	18		0.49	0.86554 54710	1565 36329
0.25	1.28267 80766	1874 07449	9 71973	32049	574	15		0.50	0.84989 18381	

x.	Z.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	x.	Z.	Diff. I.
0.80	0.89350 00910	2087 97550	55 33938	3 54856	38179	5497	984	0.62	0.58168 14651	1434 27592
0.79	0.87262 03360	2032 63612	51 79082	3 16677	32682	4513	770	0.61	0.56733 87059	1410 68530
0.78	0.85229 39748	1980 84530	48 62405	2 83995	28169	3743	621	0.60	0.55323 18529	1387 85636
0.77	0.83248 55218	1932 22125	45 78410	2 55826	24426	3122	495	0.59	0.53935 32893	1365 74107
0.76	0.81316 33093	1886 43715	43 22584	2 31400	21304	2627	404	0.58	0.52569 58786	1344 29528
0.75	0.79429 89378	1843 21131	40 91184	2 10096	18677	2223	334	0.57	0.51225 29258	1323 47828
0.74	0.77586 68247	1802 29947	38 81088	1 91419	16454	1889	268	0.56	0.49901 81430	1303 25246
0.73	0.75784 38300	1763 48859	36 89669	1 74965	14565	1621	228	0.55	0.48598 56184	1283 58300
0.72	0.74020 89441	1726 59190	35 14704	1 60400	12944	1393	189	0.54	0.47314 97884	1264 43757
0.71	0.72294 30251	1691 44486	33 54304	1 47456	11551	1204	156	0.53	0.46050 54127	1245 78611
0.70	0.70602 85765	1657 90182	32 06848	1 35905	10347	1048	140	0.52	0.44804 75516	1227 60066
0.69	0.68944 95583	1625 83334	30 70943	1 25558	9299	908	106	0.51	0.43577 15455	1209 85448
0.68	0.67319 12249	1595 12391	29 45385	1 16259	8391	802	100	0.50	0.42367 29967	1192 52443
0.67	0.65723 99858	1565 67006	28 29126	1 07868	7589	702	84	0.49	0.41174 77524	1175 58628
0.66	0.64158 32852	1537 37880	27 21258	1 00279	6887	618	70	0.48	0.39999 18896	1159 01879
0.65	0.62620 94972	1510 16622	26 20979	93392	6269	548	61	0.47	0.38840 17017	1142 80162
0.64	0.61110 78350	1483 95643	25 27587	87123	5721	487	56	0.46	0.37697 36855	1126 91552
0.63	0.59626 82707	1458 68056	24 40464	81402	5234	431	43	0.45	0.36570 45303	1111 34229

$t = \left(l^{\frac{1}{x}} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.00$ jusqu'à $t = 0.50$, la seconde depuis $x = 0.80$ jusqu'à $x = 0.00$.

II.	III.	IV.	V.	VI.	x.	Z.	Diff. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
9 71973	32049	574	15		0.45	0.36570 45303	1111 34229	15 27767	27913	1568	66	5
10 04022	31475	589	14		0.44	0.35459 11074	1096 06462	14 99854	26345	1502	61	6
10 35497	30886	603	22		0.43	0.34363 04612	1081 06608	14 73509	24843	1441	55	7
10 66383	30283	625	8		0.42	0.33281 98004	1066 33099	14 48666	23402	1386	48	10
10 96666	29664	632	10		0.41	0.32215 64905	1051 84433	14 25264	22016	1338	38	0
11 26330	29032	647	20		0.40	0.31163 80472	1037 59169	14 03248	20678	1300	38	9
11 55362	28385	657	4		0.39	0.30126 21303	1023 55921	13 82570	19378	1262	29	9
11 85747	27728	671	18		0.38	0.29102 65382	1009 73351	13 63192	18116	1233	20	—
12 11475	27057	684	7		0.37	0.28092 92031	996 10159	13 45076	16883	1213	21	14
12 38532	26373	692	11		0.36	0.27096 81872	982 65083	13 28193	15670	1192	7	—
12 64905	25681	703	11		0.35	0.26114 16789	969 36890	13 12523	14478	1185	6	8
12 90586	24978	714	9		0.34	0.25144 79899	956 24367	12 98045	13295	1179	—	2
13 15564	24264	723	7		0.33	0.24188 55532	943 26322	12 84752	12114	1181	12	4
13 39828	23541	730	9		0.32	0.23245 29210	930 41570	12 72638	10933	1193	16	14
13 63369	22811	739	5		0.31	0.22314 87640	917 68932	12 61705	9740	1209	30	4
13 86180	22072	744	9		0.30	0.21397 18708	905 07227	12 51965	8531	1239	34	16
14 08252	21328	753	5		0.29	0.20492 11481	892 55262	12 43434	7292	1273	50	14
14 29580	20575	758	4		0.28	0.19599 56219	880 11828	12 36142	6019	1323	64	10
14 50155	19817	762	6		0.27	0.18719 44391	867 75686	12 30123	4696	1387	74	24
14 69972	19055	768	4		0.26	0.17851 68705	855 45563	12 25427	3309	1461	98	21
14 89027	18287	772	0		0.25	0.16996 23142	843 20136	12 22118	1848	1559	119	25
15 07314	17515	772			0.24	0.16153 03006	830 98018	12 20270	+ 289	1678	144	37
15 24829	16743				0.23	0.15322 04988	818 77748	12 19981	— 1389	1822	181	38
15 41572					0.22	0.14503 27240	806 57767	12 21370	3211	2003	219	55
					0.21	0.13696 69473	794 36397	12 24581	5214	2222	274	72
					0.20	0.12902 33076	782 11816	12 29795	7436	2496	346	83
23 59062	76168	4803	388	44	0.19	0.12120 21260	769 82021	12 37231	9932	2842	429	124
22 82894	71365	4415	344	34	0.18	0.11350 39239	757 44790	12 47163	12774	3271	553	165
22 11529	66950	4071	310	31	0.17	0.10592 94449	744 97627	12 59937	16045	3824	718	221
21 44579	62879	3761	279	30	0.16	0.09847 96822	732 37690	12 75982	19869	4542	939	327
20 81700	59118	3482	249	22	0.15	0.09115 59132	719 61708	12 95851	24411	5481	1266	479
20 22582	55636	3233	227	22	0.14	0.08395 97424	706 65857	13 20262	29892	6747	1745	720
19 66946	52403	3006	205	23	0.13	0.07689 31567	693 45595	13 50154	36639	8492	2465	1162
19 14543	49397	2801	182	12	0.12	0.06995 85972	679 95441	13 86795	45131	10957	3627	1938
18 65146	46596	2619	170	19	0.11	0.06315 90531	666 08648	14 31924	56088	14584	5565	3478
18 18550	43977	2449	151	17	0.10	0.05649 81883	651 76724	14 88012	70672	20149	9043	6820
17 74573	41528	2298	134	4	0.09	0.04998 05159	636 88712	15 58684	90821	29192	15863	15018
17 33045	39230	2164	130	21	0.08	0.04361 16447	621 30028	16 49505	1 20013	45055	30881	
16 93815	37066	2034	109	4	0.07	0.03739 86419	604 80523	17 69518	1 65068	75936		
16 56749	35032	1925	105	16	0.06	0.03135 05896	587 11005	19 34586	2 41004			
16 21717	33107	1820	89	11	0.05	0.02547 94891	567 76419	21 75590	3 87609			
15 88610	31287	1731	78	3	0.04	0.01980 18472	546 00829	25 63199				
15 57323	29556	1643	75	9	0.03	0.01434 17643	520 37630	33 12064				
15 27767	27913	1568	66	5	0.02	0.00913 80013	487 25566	60 71119				
					0.01	0.00426 54447	426 54447					
					0.00	0.00000 00000						

25. Ainsi étant proposée la fonction $Z = \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}$, si l'on fait

$\left(l \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = t$, ou $x = e^{-t^2}$, cette fonction sera aussi exprimée par la formule $Z = \sqrt{\pi} - 2 \int e^{-t^2} dt$, où l'intégrale doit être prise à compter de $t=0$; on a donc le choix entre les deux expressions, l'une par la variable x , l'autre par la variable t .

La première partie de notre table a été calculée, selon la seconde expression, pour toutes les valeurs de t , de centième en centième, depuis $t=0$ jusqu'à $t=0.50$. On l'aurait pu continuer jusqu'à une valeur plus grande de t , par exemple, jusqu'à $t=3$, comme l'a fait M. Kramp, dans une table de l'intégrale $\int e^{-t^2} dt$, placée à la fin de son *Analyse des réfractions*. Quant à l'intervalle depuis $t=3$ jusqu'à $t=\infty$, il paraît immense, cependant il n'embrasse, par rapport à la variable x , que le petit espace depuis $x=0$ jusqu'à $x=e^{-9}=0.00012312$ etc.; on y suppléera aisément en calculant directement, dans chaque cas particulier, la fonction Z par la formule (1).

26. Étant connu par la table la fonction $Z=A$, qui répond à la variable $x=a$, si l'on veut avoir la valeur de la fonction pour une variable peu différente $x=a-\alpha$, il faudra d'abord, pour la facilité du calcul, exprimer les fonctions par la variable t . Ainsi faisant $x=e^{-t^2}$, ou $t=\left(l \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$, puis déterminant b et ϵ par les

équations $b=\left(l \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$, $b+\epsilon=\left(l \frac{1}{a-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$, la question sera de déterminer la différence δZ d'après l'équation $Z=\sqrt{\pi}-2 \int e^{-t^2} dt$, en supposant que t prenne successivement les deux valeurs b , $b+\epsilon$.

Soit donc $t=b+\omega$; on aura, en observant que $a=e^{-b^2}$,

$$\delta Z = 2a \int e^{-2b\omega - \omega^2} d\omega;$$

cette intégrale doit être prise depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\epsilon$, et comme la quantité ϵ est supposée très petite, on pourra développer d'abord le facteur $e^{-\omega^2}$, ce qui donnera

$$\int e^{-2b\omega - \omega^2} d\omega = \int e^{-2b\omega} d\omega - \int e^{-2b\omega} \omega^2 d\omega + \frac{1}{2} \int e^{-2b\omega} \omega^4 d\omega - \text{etc.};$$

ensuite développant $e^{-2b\omega}$ dans les différens termes, excepté dans

$$\frac{\omega}{\epsilon} = 2b\omega = 2, \quad \int e^{-2b\omega} \omega^2 d\omega = \int \frac{e^{-2} z^2 dz}{(2b)^3} = -\frac{e^{-2}}{2b^3} (12^3 + 22^3 + \dots)$$

$$\int e^{-2} z^4 dz = -\frac{e^{-2}}{2b^5} (2^4 + 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1)$$

$$\delta Z = 2e^{-b^2} \left(\frac{e^{-2}}{2b} + \frac{e^{-2}}{2b^3} (2^3 + 22^3 - 2) - \frac{e^{-2}}{2(2b)^5} (2^4 + 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1) \right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b^3} + \frac{1}{4b^5} - \frac{1}{6b^7} + \dots \right) = 1 - 2e^2 + 34e^5 - 40e^8 + \dots$$

le premier, et faisant, pour abrégé, $2b\epsilon = \lambda$, on aura la différence cherchée

$$\begin{aligned} \delta Z = \frac{a}{b} (1 - e^{-\lambda}) - 2a\epsilon^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\lambda^3}{6} + \text{etc.} \right) \\ + 2a\epsilon^5 \left(\frac{1}{5} - \frac{\lambda}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{7} - \text{etc.} \right) \\ - 2a\epsilon^7 \left(\frac{1}{7} - \frac{\lambda}{8} + \text{etc.} \right) \\ + 2a\epsilon^9 \left(\frac{1}{9} - \text{etc.} \right) - \text{etc.} \end{aligned} \quad (m).$$

Chaque ligne de cette formule forme une suite fort convergente, et les différentes lignes décroissent à peu près comme la progression $\epsilon^3, \epsilon^5, \epsilon^7$, etc.; il suffira donc presque toujours de calculer un petit nombre de termes de cette formule, pour avoir une valeur très approchée de la différence δZ , d'où l'on déduira.....
 $Z = A - \delta Z$.

Cette formule servira à interpoler la seconde partie de notre table, dans les cas où la série des différences ne décroîtrait pas assez rapidement pour donner un résultat exact jusque dans les dernières décimales. Cependant si x n'était pas plus grand que 0.02, il serait encore plus simple de calculer directement la fonction Z par la formule (l).

27. Au reste, pour donner un exemple du calcul de la formule (m), nous allons déterminer la fonction $Z(0,02)$ où $x=0.02$, par le moyen de la fonction $Z(0,03)$ supposée connue, ce qui est un des cas les plus difficiles que puisse présenter l'application de notre formule.

Dans le cas dont il s'agit, on aura $a=0.03$, $a-x=0.02$, $b^2 = l \frac{1.00}{3}$, $(b+\epsilon)^2 = 150$. D'après ces données, on calculera le premier terme (1) de la formule, comme il suit :

$$\begin{array}{rcl} b = 1.87258 \ 054495 & \epsilon & \dots\dots 9.02244 \ 041883 \\ b + \epsilon = 1.97788 \ 346609 & 2b & \dots\dots 0.57347 \ 050266 \\ \epsilon = 0.10530 \ 292114 & \lambda & \dots\dots 9.59591 \ 092149 \\ & m & \dots\dots 9.63778 \ 431130 \\ & \lambda m & \dots\dots 9.23369 \ 523279 \end{array}$$

$$a = e^{-b^2}$$

$$2b + \epsilon - 2b - \epsilon = \frac{a}{b} (e^{\lambda} - e^{-\lambda}) - 2a\epsilon^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 5} + \frac{\lambda^4}{4 \cdot 7} + \dots \right) + 2a\epsilon^5 \left(\frac{1}{5} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 7} + \dots \right) - 2a\epsilon^7 \left(\frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$2\epsilon b = \frac{a}{b} (e^{\lambda} - e^{-\lambda}) - 2a\epsilon^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 5} + \dots \right) + 2a\epsilon^5 \left(\frac{1}{5} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 7} + \dots \right) - 2a\epsilon^7 \left(\frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
 e^{-\lambda} &= 0.67410 \ 027526 & e^{-\lambda} \dots & \begin{cases} -0.17127 \ 549556 \\ 9.82872 \ 450444 \end{cases} \\
 1 - e^{-\lambda} &= 0.32589 \ 972474 \\
 \text{son log} \dots & 9.51308 \ 399141 \\
 \frac{a}{b} \dots & 8.20468 \ 074772
 \end{aligned}$$

(1) ... 7.71776 473913 (1) = 0.00522 113280
 En second lieu viennent les termes de (2,1) — 2 335346
 la suite

$$-2a^6 \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\lambda^3}{6} + \text{etc.} \right), \quad (2,2) +$$

que nous désignerons successivement
 par (2,1), (2,2), (2,3), etc., et qui se
 déduisent aisément, chacun de celui qui
 le précède. (2,3) —

Les termes de la seconde ligne, savoir,
 $+2a^6 \left(\frac{1}{5} - \frac{\lambda}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{7} - \text{etc.} \right)$, étant dé-
 signés de même par (3,1), (3,2), etc., et
 semblablement ceux des lignes suivantes,

qu'on calculera jusqu'à ce qu'ils ne
 donnent plus rien dans le dixième ordre
 de décimales, on aura les résultats ci-
 joints. (2,4) +

La valeur de δZ , qui est le résultat
 total de la formule, étant retranchée de
 la valeur connue de $Z(0,03)$, on trouve
 celle de $Z(0,02)$, la même qui est in-
 srite dans la table, et qui a été calcu-
 lée directement par la formule (1).

$$\delta Z = 0.00520 \ 37630$$

$$Z(0,03) = 0.01434 \ 17643$$

$$Z(0,02) = 0.00913 \ 80013$$

28. Les recherches précédentes nous conduisent à déterminer
 les cas d'intégrabilité de l'équation différentielle désignée (e) art. 8.

Si l'on suppose qu'on a en même temps $T=1$ et $\zeta=0$, la
 formule (f), exprimée en fraction continue, sera, comme nous
 l'avons déjà dit, l'intégrale de l'équation (e). Si l'on suppose, de
 plus, que l'un des deux nombres a , $a+6$, est un entier négat

tif, il est visible que la fraction continue se terminera d'elle-même, et qu'on aura ainsi la valeur de T exprimée exactement par une fonction rationnelle de ζ . L'intégrale étant connue pour chacun de ces deux cas généraux, il sera facile d'avoir, dans la même supposition, l'intégrale complète de l'équation (e), laquelle ne supposera plus qu'on ait en même temps $T=1$ et $\zeta=0$.

En effet, par le tableau analytique de l'art. 9, on voit que l'équation différentielle proposée en T , est liée avec les transformées successives en T' , T'' , T''' , etc., de manière qu'il suffit de résoudre complètement une de ces équations, pour résoudre toutes les autres, et particulièrement l'équation en T . Or, par la loi des transformées successives, il est évident que les coefficients qui étaient α et ϵ dans l'équation en T , deviennent α et $n + \epsilon$ dans la transformée paire en T^{2n} , et qu'ils deviennent $1 - \alpha$ et $n + \alpha + \epsilon$ dans la transformée impaire en T^{2n+1} .

29. Soit donc $1^\circ. \epsilon = -n$; pour avoir les transformées successives on prolongera la suite des équations, $\sigma = 1 + \alpha + \epsilon \zeta T' / 1 + \alpha + \epsilon \zeta T'' / 1 + \alpha + \epsilon \zeta T''' / \dots$

$$\frac{1}{T} = 1 + (\alpha + \epsilon)\zeta T',$$

$$\frac{1}{T'} = 1 + (1 + \epsilon)\zeta T'',$$

$$\frac{1}{T''} = 1 + (1 + \alpha + \epsilon)\zeta T''',$$

etc.,

jusqu'à celle qui donne la transformée en T^{2n-1} , savoir :

$$\frac{1}{T^{2n-1}} = 1 + (n - 1 + \alpha + \epsilon)\zeta T^{2n-1} = 1 + (\alpha - 1)\zeta T^{2n-1};$$

cette transformée sera

$$\frac{\zeta^2 dT^{2n-1}}{(T^{2n-1})^2 d\zeta} + \frac{(1 - \alpha)\zeta + 1}{T^{2n-1}} + (\alpha - 1)\zeta - \frac{1}{(T^{2n-1})^2} = 0.$$

Enfin si l'on fait $\frac{1}{T^{2n-1}} = 1 + \zeta Y$, on aura pour dernière transformée,

$$\frac{\zeta^2 dY}{Y^2 d\zeta} + \frac{1 + \alpha\zeta}{Y} + \zeta = 0.$$

Celle-ci étant linéaire par rapport à $\frac{1}{Y}$, on en tire

$$\frac{1}{Y} = \zeta^\alpha e^{-\frac{1}{\zeta}} (A - \int \zeta^{-1-\alpha} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta), \quad = 3: (5^{1-12},)$$

A étant la constante arbitraire.

Éliminant donc successivement T' , $T'' \dots$, T^{n-1} , Y , au moyen des équations précédentes, on aura l'intégrale de l'équation proposée en T , laquelle contiendra la constante arbitraire A , et sera par conséquent complète.

Dans cette intégrale, outre le terme $A\zeta^\alpha e^{-\frac{1}{\zeta}}$, qui appartient aux exponentielles ordinaires, se trouve comprise la transcendante...

$\int \zeta^{-1-\alpha} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta$ qui, pour les valeurs positives de ζ , semble différente des transcendantes $\Gamma(\alpha, x)$; mais pour les valeurs négatives de ζ , ces deux transcendantes sont de même nature.

En effet, soit $\zeta = -\sigma$, on aura $\int \zeta^{-1-\alpha} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta = (-1)^\alpha \int \sigma^{-1-\alpha} e^{-\frac{1}{\sigma}} d\sigma$; soit encore $e^{-\frac{1}{\sigma}} = x$; ou $\frac{1}{\sigma} = l \frac{1}{x}$, on aura

$$\int \sigma^{-1-\alpha} e^{-\frac{1}{\sigma}} d\sigma = \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha, x);$$

dans ce même cas on aurait

$$\frac{1}{Y} = \sigma^\alpha e^{\frac{1}{\sigma}} \left[A - \Gamma(\alpha, e^{-\frac{1}{\sigma}}) \right].$$

Ainsi le simple changement de ζ en $-\sigma$, suffit pour que l'intégrale complète de l'équation proposée en T , puisse être exprimée par la fonction $\Gamma(\alpha, x)$, en faisant $x = e^{-\frac{1}{\sigma}}$; elle satisfera à toutes les valeurs positives de σ , ou à toutes les valeurs négatives de ζ . Ensuite si l'on change le signe de σ , ce qui rend ζ positif, la fonction $\Gamma(\alpha, x)$ supposera $x = e^{\frac{1}{\zeta}}$, c'est-à-dire $x > 1$, et elle se déterminera alors comme on l'a fait voir dans l'art. 27 de la III^e partie. Donc dans tous les cas, l'intégrale complète de l'équation proposée s'exprimera par la transcendante connue $\Gamma(\alpha, x)$, en donnant à cette transcendante toute l'extension dont elle est susceptible.

50. Soit 2°. $\alpha + \epsilon = -n$, les transformées successives devront être prolongées, suivant la loi de l'art. 9, jusqu'à la transformée

en T^{2n} qui sera

$$\frac{\zeta^2 dT^{2n}}{(T^{2n})^2 d\zeta} + \frac{\alpha\zeta + 1}{T^{2n}} + (n + \epsilon)\zeta - \frac{1}{(T^{2n})^2} = 0.$$

Dans celle-ci, faisant de nouveau $\frac{1}{T^{2n}} = 1 + \zeta Y$, on aura la dernière transformée

$$\frac{\zeta^2 dY}{Y^2 d\zeta} + \frac{(1 - \alpha)\zeta + 1}{Y} + \zeta = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{Y} = \zeta^{1-\alpha} e^{-\frac{1}{\zeta}} (A - \int \zeta^{\alpha-2} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta).$$

Connaissant Y , on obtiendra successivement les valeurs de T^{2n} , T^{2n-2} , ..., et enfin T , de sorte qu'on aura l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée.

31. Dans cette intégrale se trouve la transcendante $\int \zeta^{\alpha-2} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta$ qui, pour toutes les valeurs négatives de ζ , se ramène immédiatement aux fonctions $\Gamma(a, x)$. Car faisant $\zeta = -\sigma$ et ensuite $e^{-\frac{1}{\sigma}} = x$, ou $\frac{1}{\sigma} = l \frac{1}{x}$, on a

$$\frac{1}{Y} = \sigma^{1-\alpha} e^{\frac{1}{\sigma}} (A - \int \sigma^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{\sigma}} d\sigma),$$

et $\int \sigma^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{\sigma}} d\sigma = \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{-\alpha} = \Gamma(1 - \alpha, x)$. Ainsi dans le cas de ζ négatif, l'intégrale de l'équation différentielle proposée dépendra simplement de la fonction $\Gamma(1 - \alpha, x)$.

Dans le cas de ζ positif, on substituera à la fonction $\Gamma(1 - \alpha, x)$, ce que devient cette fonction lorsque $x = e^{\frac{1}{\zeta}}$, c'est-à-dire lorsque x est > 1 ; ou bien, pour éviter des transformations qui quelquefois sont embarrassées d'imaginaires, on conservera dans l'expression de T la transcendante $\int \zeta^{\alpha-2} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta$ qui s'évaluera convenablement suivant les différens cas.

Si α est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale dont il s'agit s'exprimera toujours exactement, ou se réduira à la forme connue $\int \frac{e^x dz}{z}$.

ppp

Si α n'est pas un entier, soit $\frac{1}{\zeta} = u$, on aura $\int \zeta^{\alpha-2} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta = -\int u^{-\alpha} e^u du$,
ce qui donne par le développement de e^{-u} , la valeur approchée

$$\int \zeta^{\alpha-2} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta = \text{const.} - \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{u^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3-\alpha}}{3-\alpha} - \text{etc.}$$

On peut aussi mettre cette intégrale sous la forme

$$\text{const.} - e^u \left(\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{u^{2-\alpha}}{1-\alpha.2-\alpha} + \frac{u^{3-\alpha}}{1-\alpha.2-\alpha.3-\alpha} - \text{etc.} \right),$$

d'où résulte

$$\frac{1}{Y} = A e^{-u} u^{\alpha-1} - \frac{1}{1-\alpha} + \frac{u}{1-\alpha.2-\alpha} - \frac{u^2}{1-\alpha.2-\alpha.3-\alpha} + \text{etc.},$$

série qui pourra être divergente dans les premiers termes, mais qui deviendra toujours convergente après un certain nombre de termes.

52. Si au lieu de faire les substitutions dans l'ordre indiqué art. 9, on les fait dans l'ordre inverse, on aura les équations suivantes qui serviront à déterminer les transformées successives en $T^0, T^{\infty}, \dots, T^{0(2n-1)}, T^{0(2n)}$,

$$\frac{1}{T^0} = 1 + \mathcal{C} \zeta T, \quad \alpha^0 = 1 - \alpha, \quad \mathcal{C}^0 = \alpha + \mathcal{C} - 1,$$

$$\frac{1}{T^{00}} = 1 + \mathcal{C}^0 \zeta T^0, \quad \alpha^{00} = \alpha, \quad \mathcal{C}^{00} = \mathcal{C} - 1,$$

$$\frac{1}{T^{000}} = 1 + \mathcal{C}^{00} \zeta T^{00}, \quad \alpha^{000} = 1 - \alpha, \quad \mathcal{C}^{000} = \alpha + \mathcal{C} - 2,$$

$$\frac{1}{T^{0000}} = 1 + \mathcal{C}^{000} \zeta T^{000}, \quad \alpha^{0000} = \alpha, \quad \mathcal{C}^{0000} = \mathcal{C} - 2,$$

etc., etc., etc.

De là on voit que la transformée paire en $T^{0(2n)} = Y$, sera

$$\frac{\zeta^2 dY}{Y^2 d\zeta} + \frac{\alpha \zeta + 1}{Y} + (\mathcal{C} - n) \zeta - \frac{1}{Y^2} = 0,$$

et que la transformée impaire en $T^{0(2n-1)} = Y$, sera

$$\frac{\zeta^2 dY}{Y^2 d\zeta} + \frac{(1-\alpha)\zeta + 1}{Y} + (\alpha + \mathcal{C} - n) \zeta - \frac{1}{Y^2} = 0.$$

Donc, 1°. si \mathcal{C} est égal à un nombre entier positif n , la transformée de l'ordre $2n$ se réduira à l'équation linéaire

$$\zeta^2 \frac{dY}{d\zeta} + (\alpha \zeta + 1) Y - 1 = 0,$$

dont l'intégrale est $Y = \zeta^{-\alpha} e^{\frac{1}{\zeta}} (A - \int \zeta^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{\zeta}} d\zeta)$. Si dans cette expression on fait $e^{-\frac{1}{\zeta}} = x$, ou $\frac{1}{\zeta} = l \frac{1}{x}$, on aura

$$\int \zeta^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{\zeta}} d\zeta = \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{-\alpha} = \Gamma(1 - \alpha, x);$$

ainsi l'intégrale de l'équation proposée en T s'exprimera généralement au moyen de la fonction $\Gamma(1 - \alpha, x)$.

2°. Si $\alpha + \epsilon$ est égal à un nombre entier positif n , la transformée de l'ordre $2n - 1$, se réduira à une équation linéaire,

$$\frac{\zeta^2 dY}{d\zeta} + [(1 - \alpha)\zeta + 1]Y - 1 = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Y = \zeta^{\alpha-1} e^{\frac{1}{\zeta}} (A - \int \zeta^{-1-\alpha} e^{-\frac{1}{\zeta}} d\zeta);$$

et en faisant toujours la substitution $e^{-\frac{1}{\zeta}} = x$, on aura

$$\int \zeta^{-1-\alpha} e^{-\frac{1}{\zeta}} d\zeta = \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha, x).$$

Donc alors l'intégrale complète de l'équation proposée s'exprimera au moyen de la fonction $\Gamma(\alpha, x)$.

Il reste donc démontré qu'étant proposée l'équation différentielle,

$$\frac{\zeta^2 dT}{T^2 d\zeta} + \frac{\alpha\zeta + 1}{T} + \epsilon\zeta - \frac{1}{T^2} = 0 \quad (e),$$

on en pourra toujours trouver l'intégrale complète au moyen des fonctions $\Gamma(\alpha, x)$, considérées dans toute l'étendue dont elles sont susceptibles, si l'un des nombres ϵ , $\alpha + \epsilon$, est un entier positif ou négatif.

Nous remarquerons que si l'on proposoit l'équation différentielle

$$\zeta^2 \frac{dZ}{d\zeta} + (A\zeta + 1)Z + B\zeta Z^2 + C\zeta - D = 0,$$

où il y a quatre coefficients constans A, B, C, D , cette équation pourroit être ramenée à la même forme que l'équation (e) qui ne contient que deux coefficients constans. En effet, soit $Z = mT + n$, m et n étant deux constantes indéterminées, l'équation transformée en T sera

$$m\zeta^{\alpha} \frac{dT}{d\zeta} + Bm^2\zeta T^{\alpha} + (A\zeta + 1)mT + Bn^2\zeta + n = 0 \\ + 2Bmn\zeta T + An\zeta - D \\ + C\zeta.$$

Déterminant n d'après l'équation $Bn^2 + An + C = 0$, faisant ensuite $m = D - n$, $\zeta = Bm$, $\alpha = A + 2Bn$, on aura

$$\frac{\zeta^2 dT}{T^2 d\zeta} + \frac{\alpha\zeta + 1}{T} + C\zeta - \frac{1}{T^2} = 0,$$

équation entièrement semblable à l'équation (e). Donc l'équation proposée en Z sera intégrable si l'un des nombres

$$BD + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4BC)}, \\ BD + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4BC)},$$

est un entier positif ou négatif.

34. Nous remarquerons enfin qu'on peut donner à l'équation (e), une forme analogue à celle de l'équation de Riccati. Pour cela, soit d'abord $\zeta = Ax^m$, $T = Bxy$; soit ensuite $m = -\frac{1}{\alpha}$, $B = -\frac{\alpha}{\zeta}$,

$A = \frac{1}{\alpha^2 n}$, la transformée en y sera $\frac{dy}{dx} + y^2 - n\alpha x^{\frac{1}{\alpha}-1}y - n\zeta x^{\frac{1}{\alpha}-2} = 0$;

enfin faisant $y - \frac{1}{2}n\alpha x^{\frac{1}{\alpha}-1} = z$, on aura

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha - \zeta)n\alpha x^{\frac{1}{\alpha}-2} - \frac{1}{4}\alpha^2 n^2 x^{\frac{2}{\alpha}-2} = 0.$$

Cette équation, qui est plus générale que l'équation de Riccati, sera donc intégrable si l'un des nombres ζ , $\alpha + \zeta$, est un entier positif ou négatif.

Dans le cas où l'on a $\zeta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$, cette équation devient....

$\frac{dz}{dx} + z^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 n^2 x^{\frac{2}{\alpha}-2} = 0$; elle sera intégrable suivant la théorie précédente, si l'un des deux nombres $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$, est un entier positif ou négatif, et dans ces cas l'exposant de x , savoir, $\frac{2}{\alpha} - 2$,

se réduit à la forme $-\frac{4k}{2k+1}$, k étant un entier positif ou négatif; on obtient ainsi les mêmes résultats que présente la résolution connue de l'équation de Riccati.

FIN.

ERRATA du Tome III.

Page.	lign.	Corrections.
19	23	$-\frac{1}{4} c^0 c^{00} (1 - \frac{1}{2} c^{000})$
24	23	b^{000}
25	8	0.19611
49	13	$h = \log \frac{4}{cK\alpha^2}$
56	16	$\partial U - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 U}{3 \cdot 2^2}$
84	33	0.27563
114	19	$\sin (2\phi' - \phi) = c \sin \phi$
139	42	0.391 111 518 109
153	36	1.18684
180	19	$-\frac{1}{b^3} \cdot \frac{du}{db}$
196	5	$\log r'^2 = -t$

$\square z =$
 $s = \gamma^{-a \cdot \frac{1}{2}} x^a$
 $an = 2, 2x + 2^2 = a x^{2-1} + x^2 = \square x^2, z = \frac{dy}{y}, \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2} \frac{dy}{y}, \int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y}$
 $\frac{1}{2} - 1 = a; \beta a = n, \beta = \frac{1}{2} + 1 = 2, \beta = \frac{1}{2} + 1 = 2, \beta = \frac{1}{2} + 1 = 2$
 $\frac{1}{2} = 1 + a = \frac{n}{2}, \beta = \frac{1}{2} + \frac{a-1}{\frac{1}{2}(a+1)} = \frac{2}{a+1} = 2 \cdot (\frac{1}{2} - 1) = 1 -$
 $\beta + a = 1, a = n - 1, \square z = x^2 \cdot (x^{2n} - c_n \cdot x^n), R, s = \gamma^{-a}$
 $y = \int x^2 dx = \gamma^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}, \int \gamma^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \gamma^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$

SUPPLÉMENT
A L'ESSAI
SUR LA THÉORIE
DES NOMBRES,
SECONDE ÉDITION.

FÉVRIER 1816.

AVIS.

Ce Supplément est divisé en trois chapitres :

Le chapitre I offre les moyens de décomposer un nombre donné en quatre carrés , tels que la somme de leurs racines soit égale à un nombre donné compris entre certaines limites. Ce problème sert d'introduction au chapitre suivant.

Le chapitre II a pour objet la démonstration générale du théorème de Fermat sur les nombres polygones , et de plusieurs théorèmes analogues. Cette démonstration est fondée sur les mêmes principes que celle dont la découverte récente est due à M. Cauchy ; mais elle en diffère à plusieurs égards , et elle ne suppose démontré que le théorème relatif aux nombres triangulaires , qui est le premier cas du théorème général.

Enfin le chapitre III contient deux méthodes nouvelles pour la résolution approchée des équations numériques. Je donne ces méthodes comme nouvelles , parce que je ne connais aucun auteur qui en ait fait mention jusqu'ici. Lagrange qui avait , comme on sait , une grande érudition mathématique , n'en parle nulle part dans son *Traité de la Résolution des Equations numériques* ; s'il avait eu connaissance de ces méthodes , je pense qu'il n'aurait pas dit expressément que le problème énoncé pag. x de l'Introduction , était resté jusque-là sans solution.



SUPPLÉMENT

A L'ESSAI

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES.

§ I. *Sur les moyens de décomposer un nombre donné en quatre carrés, de manière que la somme de leurs racines soit égale à un nombre donné.*

(1) IL s'agit en général de satisfaire aux deux équations

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= s^2 + t^2 + u^2 + v^2, \\ b &= s + t + u + v, \end{aligned}$$

dans lesquelles a et b sont des nombres donnés, et où l'on suppose les quatre racines s, t, u, v positives.

J'observe d'abord que $x^2 + x$ étant toujours un nombre pair, il faut que $a + b$ soit aussi un nombre pair; ainsi les nombres donnés a et b devront être de la même espèce, c'est-à-dire tous deux pairs, ou tous deux impairs.

En second lieu, si les quatre nombres s, t, u, v étaient égaux; on aurait $a = 4s^2, b = 4s$, d'où $b = \sqrt{4a}$; et si, de ces quatre nombres, trois étaient nuls, on aurait $a = s^2, b = s$, ce qui donnerait $b = \sqrt{a}$; donc en général b doit toujours être compris entre les limites \sqrt{a} et $\sqrt{4a}$.

Ces conditions ne sont pas les seules qui doivent avoir lieu pour que le problème soit possible; mais avant de le considérer dans toute

sa généralité, nous examinerons d'abord le cas où l'un des nombres s , t , u , v serait zéro.

(2) Nous aurons, dans ce cas, à résoudre les deux équations

$$(2) \quad \begin{aligned} a &= t^2 + u^2 + v^2, \\ b &= t + u + v, \end{aligned}$$

et voici les conditions de leur possibilité.

1°. Il faut que a ne soit pas de la forme $4^k(8n+7)$; car on sait qu'aucun nombre de cette forme n'est la somme de trois carrés.

2°. Le nombre b doit toujours être de même espèce que a ; mais il faudra de plus, dans ce cas, que b soit compris entre les limites \sqrt{a} et $\sqrt{3a}$. En effet, si les trois nombres t , u , v étaient égaux, on aurait $a = 3t^2$, $b = 3t$, ce qui donnerait $b = \sqrt{3a}$; c'est la plus grande valeur de b ; la plus petite est, comme dans le cas général, $b = \sqrt{a}$.

Cela posé, des trois nombres t , u , v , l'un au moins sera de même espèce que a . Soit t ce nombre, les deux autres u et v devront être tous deux pairs ou tous deux impairs. Faisant donc $u + v = 2p$, $u - v = 2q$, ce qui donne $u = p + q$, $v = p - q$, $t = b - 2p$, il restera à satisfaire à l'équation $a = (b - 2p)^2 + (p + q)^2 + (p - q)^2$, ou à la suivante :

$$\frac{3a - b^2}{2} = (3p - b)^2 + 3q^2.$$

De là on voit que la troisième condition nécessaire pour la possibilité de la solution, est que le nombre $\frac{3a - b^2}{2}$ se réduise à la forme $x^2 + 3y^2$, ce qui aura lieu si $\frac{3a - b^2}{2}$ n'a que des facteurs simples de la forme $6n + 1$, auxquels peuvent se joindre le facteur 3, si b est divisible par 3, et le facteur 4, si a est de la forme $8n + 3$, ou si a est divisible par 4^k , auquel cas b doit être divisible par 2^k .

Ayant donc fait $\frac{3a - b^2}{2} = f^2 + 3g^2$, on en tirera $q = g$, $p = \frac{b \pm f}{3}$, et si les trois valeurs $t = b - 2p$, $u = p + q$, $v = p - q$, sont toutes positives, on aura la solution des équations (2).

(3) *Exemple I.* Soit $a = 678$, $b = 40$, les deux premières conditions seront satisfaites; on aura ensuite $\frac{1}{2}(3a - b^2) = 217 = 7 \cdot 31$, et

puisque les facteurs 7 et 31 sont de la forme $6n+1$, la troisième condition est encore remplie.

Il reste à mettre $7 \cdot 31$ sous la forme $f^2 + 3g^2$, ce qu'on peut faire de deux manières, soit par les valeurs $f=5$, $g=8$, soit par les valeurs $f=13$, $g=4$; et parce que, dans les deux cas, on trouve des valeurs positives pour les indéterminées t , u , v , il en résulte les deux solutions suivantes :

$$\begin{cases} 678 = 10^2 + 23^2 + 7^2 \\ 40 = 10 + 23 + 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 678 = 22^2 + 13^2 + 5^2 \\ 40 = 22 + 13 + 5 \end{cases}$$

(4) *Exemple II.* Soit $a=8003$, $b=121$, les deux premières conditions sont remplies; la troisième l'est également, puisqu'on a $\frac{1}{2}(3a-b^2)=4684=4 \cdot 1171$, et que 1171 est un nombre premier de la forme $6n+1$. Ce nombre peut se mettre sous la forme $32^2 + 3 \cdot 7^2$, et son produit par 4 ou $1^2 + 3 \cdot 1^2$, prend les deux formes $53^2 + 3 \cdot 25^2$ et $11^2 + 3 \cdot 39^2$; mais ces deux formes ne conduisent qu'à une seule solution, laquelle est

$$\begin{aligned} 8003 &= 83^2 + 33^2 + 5^2, \\ 121 &= 83 + 33 + 5. \end{aligned}$$

(5) Au moyen des formules précédentes on pourra, dans beaucoup de cas, non-seulement décomposer en trois carrés un nombre donné qui n'est pas de la forme $4^k(8n+7)$, mais de plus, faire ensorte que la somme des racines de ces carrés soit égale à un nombre donné.

Si on veut décomposer un nombre donné N en trois triangulaires dont les côtés pris ensemble fassent une somme donnée c , il faudra satisfaire aux deux équations

$$\begin{aligned} N &= \frac{x^2+x}{2} + \frac{y^2+y}{2} + \frac{z^2+z}{2}, \\ c &= x + y + z. \end{aligned}$$

Or il est visible que ce problème est renfermé dans celui que nous venons de résoudre. Il faudra faire $a=8N+3$, $b=2c+5$, et après avoir trouvé les valeurs de t , u , v , on en déduira celles de x , y , z , savoir, $x=\frac{t-1}{2}$, $y=\frac{u-1}{2}$, $z=\frac{v-1}{2}$.

Par exemple, soit $N=1000$ et $c=59$, on aura $a=8003$ et $b=121$, ce qui donnera, d'après l'exemple II, la solution $x=41$,

$y = 16$, $z = 2$. On a en effet,

$$1000 = \frac{41 \cdot 42}{2} + \frac{16 \cdot 17}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2},$$

$$59 = 41 + 16 + 2.$$

(6) Venons maintenant à la résolution générale des équations (1); elles donnent d'abord ce résultat remarquable,

$$4a - b^2 = (s + t - u - v)^2 + (s + u - t - v)^2 + (s + v - t - u)^2;$$

d'où l'on voit que $4a - b^2$ doit être décomposable en trois carrés, et qu'ainsi une troisième condition nécessaire pour la possibilité du problème, est que $4a - b^2$ ne soit pas de la forme $4^k(8n + 7)$.

Si $4a - b^2$ n'est pas de cette forme, il sera toujours possible de satisfaire, d'une ou de plusieurs manières, à l'équation

$$4a - b^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

on regardera donc x, y, z comme connus, et en supposant que s, t, u, v soient rangés par ordre de grandeur, ainsi que x, y, z , on aura, pour déterminer s, t, u, v , les quatre équations

$$\begin{aligned} s + t + u + v &= b, \\ s + t - u - v &= x, \\ s + u - t - v &= y, \\ s + v - t - u &= \pm z. \end{aligned}$$

On a mis dans la troisième $\pm z$, parce que, quoiqu'on ait par hypothèse $s > t > u > v$, il n'arrivera cependant pas toujours que la somme $s + v$ soit plus grande que $t + u$.

Il faut maintenant que les valeurs de s, t, u, v , déduites des équations précédentes, soient positives, sans quoi le problème ne serait qu'improprement résolu. Or cette condition peut toujours être remplie en limitant convenablement la valeur de b . Pour le faire voir, il faut examiner successivement le cas où a et b sont impairs, et celui où ils sont pairs.

Premier cas, a et b impairs.

(7) Dans ce cas, $4a - b^2$ sera de la forme $8n + 3$, et on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$(3) \quad 4a - b^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

où $x^2 + y^2 + z^2$ désigne l'une des formes trinaires du nombre $4a - b^2$. Ensuite on déduira des équations de l'article précédent les valeurs des indéterminées s, t, u, v , comme il suit :

$$(4) \quad s = \frac{b+x+y+z}{4}, \quad t = \frac{b+x}{2} - s, \quad u = \frac{b+y}{2} - s, \quad v = \frac{b+z}{2} - s.$$

Puisque les nombres b, x, y, z sont tous impairs, il faudra que l'un des nombres $b+x+y+z, b+x+y-z$ soit de la forme $4n$, et l'autre de la forme $4n+2$; donc, en prenant convenablement le signe de z , dans l'expression de s , on aura un nombre entier pour la valeur de s , ce qui donnera ensuite des nombres entiers pour les valeurs des trois autres indéterminées. On voit par là qu'il n'y a qu'un des deux signes de z qui puisse être employé, et qu'ainsi on n'a qu'une solution pour chaque forme trinaire de $4a - b^2$.

(8) Maintenant, puisque nous avons supposé $x > y > z$, il est clair que les valeurs de s, t, u, v seront toujours positives, si celle de v l'est dans le cas le moins favorable, c'est-à-dire si l'on a $\frac{b-z}{2} - s > 0$, ou $\frac{b-x-y-z}{4} > 0$.

Il suffit, pour cela, qu'on ait $x+y+z < b+4$; car $b-x-y-z$ doit toujours être divisible par 4, dans le cas dont il s'agit. Or, d'après l'équation $4a - b^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on a $x+y+z < \sqrt{3(4a-b^2)}$, et en faisant $(b+4)^2 = 3(4a-b^2)$, on tirera de cette équation

$$b = \sqrt{(3a-3)} - 1.$$

Si donc b , qui doit toujours être plus petit que $\sqrt{4a}$, est supposé en même temps plus grand que la limite $\sqrt{(3a-3)} - 1$, on sera assuré que les valeurs des indéterminées s, t, u, v , déduites des formules précédentes, seront toutes positives, et qu'ainsi le problème sera résolu.

Un seul cas fait exception, c'est celui où l'on aurait à-la-fois $x = y = z = \sqrt{\left(\frac{4a-b^2}{3}\right)}$ et $b = \sqrt{(3a-3)} - 1$; car alors il en résulterait $x+y+z = b+4$, et par conséquent $v = -1$. Mais il est facile de faire ensorte que ce cas particulier ne puisse avoir lieu, il suffit pour cela d'augmenter aussi peu qu'on voudra la limite inférieure de b .

Nous supposerons donc désormais que les limites de b sont

$$b > \sqrt{(3a-2)} - 1, \quad b < \sqrt{4a};$$

et dans cette hypothèse les formules (4) donneront toujours des valeurs positives pour les quatre indéterminées s, t, u, v , même quand b serait égale à sa limite inférieure.

(9) En admettant la limite $b > \sqrt{(3a-2)} - 1$, on a la certitude que la solution sera donnée toujours en nombres positifs. Mais il ne s'ensuit pas que si on prenait b plus petit que cette limite (et cependant plus grand que \sqrt{a}), le problème ne pourrait être résolu en nombres positifs. Il arrivera, au contraire, assez souvent, surtout si a est un grand nombre, que des valeurs de b plus petites que la limite assignée donneront des solutions en nombres positifs; et ces solutions se trouveront également par les formules (4), toutes les fois qu'elles pourront avoir lieu. C'est ce dont on verra un grand nombre d'exemples ci-après.

Second cas. a et b pairs.

(10) Les nombres a et b étant pairs, $4a - b^2$ sera divisible par 4; et puisque cette quantité est représentée par $x^2 + y^2 + z^2$, il faudra que les trois nombres x, y, z soient pairs. On simplifiera donc l'équation en mettant $2x, 2y, 2z$ à la place de x, y, z , ce qui donnera

$$(5) \quad a - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Cela posé, si $a - \left(\frac{1}{2}b\right)^2$ n'est pas de la forme $4^k(8n+7)$, cette équation sera satisfaite par toute forme trinaire, propre ou impropre, du nombre $a - \left(\frac{1}{2}b\right)^2$. Connaissant donc les trois nombres x, y, z , on aura pour déterminer s, t, u, v , les quatre équations

$$\begin{aligned} s + t + u + v &= b, \\ s + t - u - v &= 2x, \\ s + u - t - v &= 2y, \\ s + v - t - u &= \pm 2z, \end{aligned}$$

d'où l'on tire les valeurs

$$(6) \quad s = \frac{\frac{1}{2}b + x + y \pm z}{2}, \quad t = \frac{1}{2}b - s + x, \quad u = \frac{1}{2}b - s + y, \quad v = \frac{1}{2}b - s \pm z.$$

Ces valeurs seront des nombres entiers dans les deux cas que présente le signe ambigu; ainsi il en résultera toujours deux solutions, excepté le cas de $z=0$, où les deux solutions se réduisent à une seule.

(11) Maintenant, pour que ces solutions soient admissibles, il faut que les quatre nombres s, t, u, v soient positifs, ce qui aura lieu si dans le cas le moins favorable, v est positif, ou si l'on a $\frac{\frac{1}{2}b - x - y - z}{2} > 0$.

Cette condition sera remplie comme dans le premier cas, en supposant $b > \sqrt{(3a-2)} - 1$. D'ailleurs on devra faire les mêmes observations que dans l'art. 9, relativement aux solutions qui peuvent avoir lieu dans certains cas où b serait inférieur à la limite assignée.

(12) Il y a diverses remarques à faire sur la solution du problème précédent, selon les diverses formes du nombre a .

1°. Si a est de la forme $4n+2$, le nombre $a - \frac{1}{4}b^2$ sera de l'une des formes $4n+1, 4n+2$, lesquelles sont toujours décomposables en trois carrés, d'après la théorie exposée dans la troisième partie. Donc dans ce cas, les équations proposées seront toujours résolubles.

2°. Si a est de la forme $8n+4$, on pourra satisfaire aux équations proposées de deux manières, les nombres s, t, u, v étant tous pairs ou tous impairs : ces deux solutions seront données par les formules (6); mais il faut, dans ce cas, que $a - \frac{1}{4}b^2$ ne soit pas de la forme $4^k(8n+7)$.

3°. Si a est de la forme $8(2n+1)$, les nombres s, t, u, v devront être pairs, et en général si a est de la forme $2^{2k+1}(2n+1)$, ces nombres devront être divisibles par 2^k ; leur somme b devra donc être aussi divisible par 2^k et même par 2^{k+1} , parce que le quotient devra être pair. Soit donc $a = 2^{2k}a', b = 2^k b', s = 2^k s', t = 2^k t', u = 2^k u', v = 2^k v'$, la solution des équations proposées se réduira à celle des équations

$$\begin{aligned} a' &= s'^2 + t'^2 + u'^2 + v'^2, \\ b' &= s' + t' + u' + v'; \end{aligned}$$

elle sera donc toujours possible, puisqu'alors a' est de la forme $4n+2$. Mais on remarquera que dans ce cas il ne suffit pas que b soit compris entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{(3a-2)} - 1$, il faut encore que b soit divisible par 2^{k+1} . Les autres valeurs de b comprises entre les limites

assignées, ne pouvant satisfaire, on trouverait qu'elles réduisent $a - \frac{1}{4}b^2$ à la forme $4^k(8n+7)$.

On pourra descendre au-dessous de la limite $\sqrt{(3a-2)}-1$, pour essayer s'il y a d'autres solutions; mais il faudra toujours que les valeurs de b soient divisibles par 2^{k+1} .

4°. Enfin si a est de la forme $2^{2k+2}(2n+1)$, k n'étant pas zéro, il faudra que chacun des nombres s, t, u, v soit divisible par 2^k , et leur somme b par 2^{k+1} . C'est pourquoi faisant $a = 2^{2k}a', b = 2^k b', s = 2^k s', t = 2^k t', u = 2^k u', v = 2^k v'$, les équations proposées se réduiront aux suivantes,

$$\begin{aligned} a' &= s'^2 + t'^2 + u'^2 + v'^2, \\ b' &= s' + t' + u' + v', \end{aligned}$$

dans lesquelles a' sera de la forme $8n+4$, et qui se rapporteront ainsi au second cas, comme le précédent se rapporte au premier.

(15) La théorie exposée dans ce chapitre, est la base de la démonstration générale du théorème de Fermat, dont nous nous occuperons dans le chapitre suivant; elle peut être utile dans plusieurs autres recherches d'analyse indéterminée.

On voit déjà que cette théorie donne une extension remarquable aux deux premiers cas du théorème sur les nombres polygones, puisqu'elle offre les moyens non-seulement de décomposer un nombre donné en trois ou en quatre carrés, mais de faire ensorte que la somme des racines de ces carrés soit égale à un nombre donné pris entre certaines limites.

§ II. *Démonstration du Théorème de Fermat, sur les nombres polygones, et de quelques autres Théorèmes analogues.*

(14) On a fait voir ci-dessus (art. 154) qu'un nombre polygone de l'ordre $m + 2$, a pour expression générale

$$\frac{m}{2} (x^2 - x) + x,$$

x désignant le côté de ce polygone, ou le rang qu'il tient parmi les polygones du même ordre. Cette expression prouve que 0 et 1 sont deux termes communs aux polygones de tous les ordres.

Les nombres triangulaires résultent de la supposition $m = 1$, et les carrés de la supposition $m = 2$; dans ces deux premiers cas, il est indifférent de prendre x positif ou négatif, et on n'obtient qu'une seule et même suite, celle des nombres triangulaires ou celle des carrés.

Mais m étant > 2 , l'expression générale des nombres polygones donne deux suites différentes pour chaque ordre, selon qu'on suppose x positif ou négatif. Ces deux suites sont liées entr'elles par une même loi, de sorte que l'une n'est que le prolongement de l'autre; mais dans l'application au théorème de Fermat, on fait toujours abstraction de la suite formée avec des valeurs négatives de x , et on ne considère que celle qui est formée avec les valeurs positives, comme les présente le tableau du n° 154.

(15) Cela posé, il faut démontrer qu'un nombre quelconque est composé d'autant de polygones de l'ordre $m + 2$, qu'il y a d'unités dans $m + 2$.

Le nombre des polygones qui composent un nombre donné, pourrait cependant être moindre que $m + 2$; mais en regardant 0 comme un polygone completif, le nombre des polygones pourra toujours être censé $m + 2$, conformément à l'énoncé de la proposition.

Ce théorème ayant été démontré dans le Traité précédent, pour le

cas des nombres triangulaires et pour celui des carrés, qui sont les deux premiers de la proposition générale, nous ne considérerons que les cas ultérieurs où l'on a $m > 2$, savoir, $m = 3$ pour les nombres pentagones, $m = 4$ pour les hexagones, et ainsi de suite.

Or d'après ce qui a été démontré dans le § précédent, il ne reste plus à établir qu'un petit nombre de propositions subsidiaires pour parvenir à celle qui fait l'objet de ce chapitre.

(16) THÉORÈME I. « a étant un nombre impair quelconque, non » compris dans les dix suivans 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 37, 71, » il existe toujours deux nombres impairs consécutifs c , $c - 2$, tels » qu'en faisant successivement $b = c$ et $b = c - 2$, on pourra, dans » les deux cas, satisfaire aux équations

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= s^2 + t^2 + u^2 + v^2, \\ b &= s + t + u + v, \end{aligned}$$

» avec la condition que les racines s , t , u , v soient toutes positives. »

En effet, 1°. si la différence entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{(3a-2)} - 1$, est égale à 4 ou plus grand que 4, il y aura au moins quatre nombres entiers consécutifs compris entre ces limites. De ces quatre nombres, deux seront impairs et pourront être pris pour b ; les équations proposées seront donc résolubles, dans les deux cas, par les formules de l'art. 7.

Or en faisant $\sqrt{(4a)} - \sqrt{(3a-2)} + 1 = 4$, on trouve $a = 121$; donc le nombre 121 et tous les nombres impairs plus grands que 121, jouissent de la propriété mentionnée.

2°. Si ensuite on examine tous les nombres impairs au-dessous de 121, on trouvera que pour une partie de ces nombres, il existe deux valeurs de b comprises entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{(3a-2)} - 1$, et que pour l'autre partie il n'existe qu'une seule valeur de b .

Dans le second cas, on devra essayer, d'après les formules de l'art. 7, si le nombre impair immédiatement inférieur, quoique plus petit que la limite $\sqrt{(3a-2)} - 1$, ne peut pas être pris pour b , et conduire à une solution des équations (1), dans laquelle les racines s , t , u , v soient prises positivement.

Cet essai réussira pour la plupart des nombres dont il s'agit, et il ne restera que les dix valeurs mentionnées de a , savoir, 1, 3, 5,

7, 11, 15, 19, 23, 27, pour lesquelles il n'y a qu'une valeur de b qui satisfasse.

Voici un tableau qui contient le résultat de ces calculs.

a	b	a	b
119...111	21,19	29...25	9,7*
109	19,17*	23	9
107... 91	19,17	21	9,7
89,87	17,15*	19	7
85... 73	17,15	17	7,5*
71	15	15	7
69,67	15,13*	13	7,5*
65... 57	15,13	11	5
55... 49	15,11*	9	5,3*
47... 43	13,11	7	5
41,39	11, 9*	5	3
37	11	3	3
35... 31	11, 9	1	1

(17) Pour mieux faire concevoir la construction de ce tableau, nous allons donner des exemples de chacun des trois cas qu'il présente.

Premier cas. Si on fait $a = 65$, on trouve pour b les deux valeurs 15 et 13, comprises entre les limites $\sqrt{260}$ et $\sqrt{193} - 1$. Les mêmes valeurs auraient également lieu pour les nombres 63, 61, 59, 57; aussi voit-on dans le tableau, que pour tous les nombres impairs de 65 à 57, les valeurs correspondantes de b sont 15 et 13.

Second cas. Si on fait $a = 41$, on trouve qu'il n'y a que le nombre impair 11 qui soit compris entre les limites $\sqrt{164}$ et $\sqrt{121} - 1$; mais si on essaie la valeur suivante $b = 9$, quoiqu'inférieure à la limite $\sqrt{121} - 1$, on trouve par les formules du n° 7, qu'elle satisfait aussi, puisqu'on a $41 = 6^2 + 2^2 + 1^2$ et $9 = 6 + 2 + 1$. On a donc mis dans la table les valeurs $b = 11$, $b = 9$, correspondantes au nombre $a = 41$; mais on a distingué par une * la seconde valeur 9, pour avertir qu'elle est inférieure à la limite $\sqrt{(3a - 2)} - 1$.

Troisième cas. Si on fait $a = 71$, on ne trouve qu'un nombre impair

15, compris entre les limites qui conviennent à cette valeur de a , savoir, $\sqrt{284}$ et $\sqrt{211} - 1$. Si ensuite on essaie la valeur $b = 13$, on trouve par les formules du n° 7, qu'elle n'est pas admissible, parce que l'une des indéterminées s, t, u, v serait négative. On n'a donc mis dans le tableau que la seule valeur $b = 15$, correspondante au nombre $a = 71$.

(18) THÉORÈME II. « Soit a un nombre impair quelconque; soient » $c, c-2, c-4, \dots, d$, les diverses valeurs successives de b avec » lesquelles on peut résoudre en nombres positifs les équations (1); soit » enfin r un terme quelconque de la suite $0, 1, 2, 3, \dots, m-2$. » Si on considère la fonction

$$Z = \frac{m}{2}(a-b) + b + r,$$

» dans laquelle b et r sont des termes pris à volonté dans les suites » qui leur sont propres, et qu'on appelle P ou $P(a)$ la plus petite valeur » de cette fonction, Q ou $Q(a)$ la plus grande; on aura

$$P(a) = \frac{m}{2}(a-c) + c,$$

$$Q(a) = \frac{m}{2}(a-d) + d + m - 2.$$

» Cela posé, je dis, 1°. que tous les nombres entiers compris depuis » $P(a)$ jusqu'à $Q(a)$, seront représentés par la fonction Z ; 2°. que tous » ces nombres pourront être décomposés chacun en $m+2$ polygones » de l'ordre $m+2$. »

En effet, 1°. soit $Z = P(a) + p$, p étant un nombre pris à volonté depuis 1 jusqu'à $Q(a) - P(a)$, on aura pour déterminer b et r , l'équation

$$p = (m-2)\left(\frac{c-b}{2}\right) + r;$$

or puisque p et $m-2$ sont deux nombres donnés, on voit que r est le reste de la division de p par $m-2$, et que si on appelle q le quotient de cette division, on aura $\frac{c-b}{2} = q$, ou $b = c - 2q$.

Il suit de là que pour chaque valeur donnée de p , on n'a qu'une solution, excepté lorsque le reste r est zéro; car alors on peut faire

indifféremment $r=0$ ou $r=m-2$, et il y aura deux solutions. Cependant s'il s'agit du dernier des nombres $P(a)+p$, qui est $Q(a)$, il faudra prendre $r=m-2$, et il n'y aura qu'une solution, parce qu'en faisant $r=0$, on aurait $b=d-2$, nombre qui n'est pas compris dans la suite $c, c-2, c-4, \dots d$.

2°. $P(a)+p$ ou $P+p$ étant un nombre quelconque pris dans la suite $P, P+1, P+2, \dots Q$, puisqu'on peut toujours supposer $P+p = \frac{m}{2}(a-b) + b + r$, si on substitue dans cette expression les valeurs de a et b données par les équations (1), on aura

$$P+p = \frac{m}{2}(s^2 - s + t^2 - t + u^2 - u + v^2 - v) + r \\ + s + t + u + v.$$

Donc si on désigne en général par pol. x , le polygone de l'ordre $m+2$ dont le côté est x , on aura

$$P+p = \text{pol. } s + \text{pol. } t + \text{pol. } u + \text{pol. } v + r \text{ pol. } 1;$$

c'est-à-dire que le nombre $P+p$ sera composé des quatre polygones dont les côtés sont s, t, u, v , et de r polygones égaux à l'unité; donc comme r est $< m-2$ ou tout au plus $= m-2$, il s'ensuit que le nombre $P+p$ sera composé de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, dont $m-2$ sont égaux indifféremment à zéro ou à l'unité.

(19) THÉORÈME III. « Lorsque $a=121$, la plus grande valeur de b » est 1, et alors on a $P(a) = \frac{m}{2}(a-b) + b = 50m+21$, nombre » qui, suivant la proposition précédente, est la somme de quatre poly- » gones de l'ordre $m+2$.

» Cela posé, je dis que tout nombre entier plus grand que $50m+21$, » est la somme de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, dont $m-2$ se- » ront égaux à zéro ou à l'unité. »

En effet, soit a un nombre impair quelconque plus grand que 121; il existera toujours, suivant le théorème I, deux nombres impairs consécutifs $c, c-2$, compris entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{(3a-2)}-1$, et il suit du théorème précédent que si l'on fait

$$P(a) = \frac{m}{2}(a-c) + c,$$

$$Q(a) = \frac{m}{2}(a-c+2) + c-2 + m-2,$$

tous les nombres entiers compris depuis $P(a)$ jusqu'à $Q(a)$ inclusivement, seront la somme de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$.

Considérons maintenant le nombre $P(a+2)$, et soit c' le plus grand nombre impair compris dans $\sqrt{(4a+8)}$, comme c est le plus grand nombre impair compris dans $\sqrt{4a}$; il faut distinguer deux cas, selon qu'on a $c'=c$, ou $c'=c+2$; car il est évident qu'on ne peut faire aucune autre supposition sur la valeur de c' .

(20) Si l'on a $c'=c$, il suffira de mettre $a+2$ au lieu de a , dans l'expression de $P(a)$, et on aura

$$P(a+2) = \frac{m}{2}(a+2-c) + c;$$

comparant cette valeur avec celle de $Q(a)$, on en tire

$$P(a+2) = Q(a) - m + 4.$$

Or la moindre valeur de m étant 3, on voit que le nombre $P(a+2)$ ne surpasse $Q(a)$ que dans le seul cas de $m=3$, où l'on a $P(a+2) = Q(a) + 1$. Dans tout autre cas, $P(a+2)$ est compris dans la suite $P(a), P(a)+1, P(a)+2, \dots, Q(a)$.

Mais on a vu que tous les nombres de cette suite sont composés de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, et dans le cas où le terme $P(a+2)$ sortirait de cette suite, pour y ajouter le terme suivant $Q(a)+1$, ce terme serait composé de quatre polygones seulement; donc tous les nombres entiers compris depuis $P(a)$ jusqu'à $P(a+2)$ inclusivement, sont composés de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$.

(21) En second lieu, soit $c'=c+2$, on aura

$$P(a+2) = \frac{m}{2}(a-c) + c+2,$$

et par conséquent $P(a+2) = P(a) + 2 = Q(a) - 2(m-3)$. De là on voit que $P(a+2)$ est toujours plus petit que $Q(a)$, excepté dans le seul cas de $m=3$, où l'on a $P(a+2) = Q(a)$; donc tous les nombres entiers compris depuis $P(a)$ jusqu'à $P(a+2)$ inclusivement, sont décomposables en $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$.

(22) Si on observe maintenant que dans le premier cas on a

$P(a+2) = P(a) + m$, et dans le second $P(a+2) = P(a) + 2$; on pourra en conclure qu'à compter d'un nombre donné a tel que $a=121$, la suite $P(a)$, $P(a+2)$, $P(a+4)$, etc., formée en augmentant toujours a de deux unités, s'étend à l'infini. Donc tous les nombres entiers compris depuis $P(121)$, ou $50m+21$ jusqu'à l'infini, sont décomposables en $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$.

Il reste à démontrer que tous les nombres inférieurs à $50m+21$, jouissent de la même propriété; c'est l'objet de la proposition suivante, qui complète la démonstration générale du théorème de Fermat.

(23) THÉORÈME IV. « Tout nombre entier plus petit que $P(121)$, » ou $50m+21$, est la somme de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, » dont $m-2$ sont égaux à zéro ou à l'unité. »

Soit d'abord $a=5$; on voit par le tableau du n° 16 que 3 est la seule valeur correspondante de b ; faisant donc $c=d=3$, les formules du n° 18 donneront

$$\begin{aligned} P(5) &= m + 3, \\ Q(5) &= 2m + 1. \end{aligned}$$

Au-dessous de $P(5)$, on a les nombres 1, 2, 3.... $m+2$, qui sont composés d'autant de polygones égaux à 1 qu'ils contiennent d'unités; ainsi le théorème est vrai à leur égard, on voit même que le dernier de ces nombres $m+2$ est exprimé par un seul polygone, savoir, pol. 2.

Les nombres de $P(5)$ à $Q(5)$ sont composés comme l'énonce le théorème, puisque cette propriété a lieu en général pour tous les nombres de $P(a)$ à $Q(a)$. Ainsi le théorème est vérifié jusqu'au nombre $Q(5) = 2m+1$.

Soit maintenant $a=7$, on aura, par la table du n° 16, $c=d=5$, ce qui donne

$$\begin{aligned} P(7) &= m + 5, \\ Q(7) &= 2m + 3. \end{aligned}$$

Comme la moindre valeur de m est 3, on voit que $P(7)$ ne surpasse $Q(5)$ que dans le seul cas où $m=3$, et alors on a $P(7) = Q(5) + 1$. Donc la propriété générale est vérifiée par tous les nombres depuis 1 jusqu'à $Q(7) = 2m+3$.

On pourrait continuer ainsi l'examen des cas particuliers jusqu'à

$P(121)$; mais nous nous bornerons à un petit nombre de cas généraux qui renferment la solution de tous les cas particuliers. Il s'agit en général d'examiner si tous les nombres compris de $P(a)$ à $P(a+2)$ satisfont au théorème, ou s'il y a exception pour quelques-uns de ces nombres.

(24) *Premier cas.* Supposons que pour le nombre a il y ait deux valeurs correspondantes de b , savoir c et $c-2$, et que pour $a+2$ il y ait une ou plusieurs valeurs de b , dont la plus grande soit c , on trouvera, comme dans l'article 20, que tous les nombres de $P(a)$ à $P(a+2)$ satisfont au théorème.

Second cas. Supposons que c et $c-2$ étant les deux valeurs de b correspondantes au nombre a , on ait $c+2$ pour la plus grande ou la seule valeur de b correspondante au nombre $a+2$; on trouvera encore, comme dans le n° 21, que tous les nombres de $P(a)$ à $P(a+2)$ satisfont au théorème.

Troisième cas. Supposons que b n'ait que la seule valeur c correspondante au nombre a , et que pour $a+2$ on ait une ou plusieurs valeurs de b , dont la plus grande soit $c+2$, on aura, dans ce cas,

$$P(a) = \frac{m}{2} (a - c) + c,$$

$$Q(a) = \frac{m}{2} (a - c) + c + m - 2,$$

$$P(a+2) = \frac{m}{2} (a - c) + c + 2.$$

De là on voit que $P(a+2)$ ne peut surpasser $Q(a)$ que dans le seul cas de $m=3$; qu'alors on a $P(a+2) = Q(a) + 1$; que dans tous les autres cas $P(a+2)$ sera plus petit que $Q(a)$, ou tout au plus égal à $Q(a)$, et qu'ainsi tous les nombres de $P(a)$ à $P(a+2)$ satisfont au théorème.

Quatrième cas. Supposons enfin que relativement à a on ait la seule valeur $b=c$, et relativement à $a+2$, une ou deux valeurs de b , dont la plus grande soit c , alors on aura

$$P(a) = \frac{m}{2} (a - c) + c,$$

$$Q(a) = \frac{m}{2} (a - c) + c + m - 2,$$

$$P(a+2) = \frac{m}{2} (a + 2 - c) + c.$$

On voit dans ce cas qu'il y a une lacune entre $Q(a)$ et $P(a+2)$, car on a $P(a+2) = Q(a) + 2$, et l'intermédiaire qui manque est $Q(a) + 1$. Ainsi, sauf cette exception, le théorème démontré jusqu'à $P(a)$, le sera jusqu'à $P(a+2)$.

(25) Il suffit maintenant de jeter un coup-d'œil sur le tableau du n° 16, pour trouver quels sont les nombres $Q(a) + 1$ qui tomberont dans l'exception du quatrième cas. Ces nombres se réduisent à quatre, savoir :

$$Q(7) + 1 = 2m + 4,$$

$$Q(15) + 1 = 5m + 6,$$

$$Q(25) + 1 = 8m + 8,$$

$$Q(37) + 1 = 14m + 10;$$

or l'expression générale de pol. x (art. 14) donne

$$\text{pol. } 2 = m + 2,$$

$$\text{pol. } 3 = 3m + 3,$$

$$\text{pol. } 4 = 6m + 4,$$

$$\text{pol. } 5 = 10m + 5,$$

et par le moyen de ces polygones on pourra exprimer les quatre nombres précédens comme il suit :

$$2m + 4 = 2\text{pol. } 2,$$

$$5m + 6 = 4\text{pol. } 2 + (m-2)\text{pol. } 1,$$

$$8m + 8 = \text{pol. } 4 + 2\text{pol. } 2,$$

$$14m + 10 = \text{pol. } 5 + \text{pol. } 3 + \text{pol. } 2.$$

Un seul cas, celui de $5m+6$, exige $m+2$ polygones; les trois autres n'en exigent que deux ou trois. Donc les exceptions rentrent dans la proposition générale; donc, *tout nombre entier est la somme de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, dont $m-2$ seront égaux à zéro ou à l'unité.*

(26) La démonstration que nous venons de donner du théorème de Fermat, ne suppose connue que la démonstration du premier cas de ce théorème, concernant les nombres triangulaires. Or cette proposition fait partie de la théorie générale des formes trinaires des nombres, exposée dans la troisième Partie. Nous avons d'ailleurs prouvé (n° 155), qu'en supposant ce premier cas démontré, on en déduit immédiate-

ment que tout nombre entier est la somme de quatre carrés, ce qui est le second cas du théorème de Fermat. Ainsi du premier cas on déduit tous les autres.

Comme on ne peut guère douter que Fermat n'ait été réellement en possession de la démonstration générale de son théorème sur les nombres polygones, il est à croire que cette démonstration était totalement différente de celle que nous venons d'exposer. En effet, il paraît d'abord que Fermat n'avait aucune connaissance de la théorie des formes trinaires des nombres, excepté dans le cas des nombres $8n+3$, qui revient au premier cas de son théorème, mais dont il ne fait pas mention, et dans le cas des nombres premiers $8n-1$, qu'il assure être de la forme $p^2 + q^2 + 2r^2$, dont le double est la somme de trois carrés. Si Fermat eût connu la théorie dont il s'agit, il n'aurait pas restreint cette dernière propriété aux nombres premiers $8n-1$, puisqu'elle s'étend généralement à tous les nombres impairs. En second lieu, si la démonstration de Fermat eût été la même que la précédente, ou fondée sur les mêmes principes, il n'aurait pas manqué d'ajouter au théorème la condition qui lui donne plus de précision et d'élégance, savoir, que sur les $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$ qui composent un nombre donné, il y en a toujours $m-2$ qu'on peut supposer égaux à zéro ou à l'unité.

M. Cauchy a donc fait une découverte importante dans la théorie des nombres, en donnant le premier la démonstration du théorème de Fermat, devenu plus précis par la condition qu'il y a ajoutée. Mais on peut aller encore plus loin en démontrant que, passé une certaine limite facile à assigner pour chaque ordre de polygones, tout nombre donné peut être décomposé en quatre polygones ou en cinq au plus. Cette nouvelle proposition fera l'objet des recherches suivantes.

(27) Supposons que le nombre donné A soit décomposable en quatre polygones de l'ordre $m+2$, il faudra faire

$$A = \frac{m}{2}(a-b) + b,$$

et déterminer les nombres a et b de manière qu'on puisse résoudre en nombres entiers positifs les équations

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= s^2 + t^2 + u^2 + v^2, \\ b &= s + t + u + v; \end{aligned}$$

or il sera possible de satisfaire à ces équations, si a et b sont de même espèce, si b est compris entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{3a-2}-1$, enfin si a est impair ou double d'un impair. Il y aurait d'autres valeurs de a et de b qui permettraient d'effectuer la résolution des équations (1); mais il suffira de considérer celles dont nous venons de faire mention.

(28) Si l'on fait successivement $b = \sqrt{4a}$ et $b = \sqrt{3a-2}-1$, on trouvera que les limites de b correspondantes au nombre donné A , sont

$$b < \frac{2m-4}{m} + \sqrt{\left[\frac{8A}{m} + \left(\frac{2m-4}{m}\right)^2\right]},$$

$$b > \frac{m-6}{2m} + \sqrt{\left[\frac{6A}{m} - 3 + \left(\frac{m-6}{2m}\right)^2\right]},$$

et si on suppose que A est un grand nombre, on aura à peu près $b < \sqrt{\frac{8A}{m}}$, $b > \sqrt{\frac{6A}{m}}$.

Connaissant les diverses valeurs de b par ces limites, on connaîtra a par l'équation $a = b + \frac{2}{m}(A-b)$; et comme $a-b$ doit être pair, il s'ensuit que $\frac{A-b}{m}$ est un entier. Soit cet entier $= x$, on aura

$$(2) \quad \begin{aligned} b &= A - mx, \\ a &= b + 2x. \end{aligned}$$

Cela posé, on peut démontrer les propositions suivantes.

(29) THÉORÈME V. « m étant un nombre impair, si A est un nombre » donné quelconque $> 28m^3$, je dis que A sera décomposable en quatre » polygones de l'ordre $m+2$. »

Les limites de b étant connues, on connaîtra celles de x par l'équation $x = \frac{A-b}{m}$. Supposons que la différence des limites de b soit égale à $2m$ ou plus grande que $2m$, alors la différence des limites de x sera égale à 2 ou plus grande que 2; donc x aura au moins deux valeurs consécutives h , $h+1$; et puisque m est impair, les deux valeurs correspondantes de b , tirées de l'équation $b = A - mx$, seront l'une paire, l'autre impaire. En prenant la valeur impaire, le nombre a sera aussi

impair, puisqu'on a $a = b + 2x$; on pourra donc résoudre les équations (1). Donc pour que le nombre A soit décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$, il suffit qu'on ait $\sqrt{\frac{8A}{m}} - \sqrt{\frac{6A}{m}} > 2m$, ou $A > m^3 (\sqrt{8} + \sqrt{6})^2$, ou plus simplement $A > 28m^3$; ce qui s'accorde avec l'énoncé du théorème.

On voit que ce théorème est d'une grande généralité, puisqu'il s'applique à tous les nombres plus grands que la limite $28m^3$, et qu'il suppose seulement que l'ordre des polygones, désigné par $m + 2$, est impair.

(50) THÉORÈME VI. « m étant pair, tout nombre impair $A > 7m^3$, » sera décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$; et tout » nombre pair $A + 1 > 7m^3$ sera décomposable en cinq polygones dont » un sera égal à l'unité. »

En effet, si A est impair et m pair, il résulte immédiatement des équations (2) que b et a sont des nombres impairs, quel que soit x ; ainsi la solution sera toujours possible s'il y a une valeur de x comprise entre les limites requises, c'est-à-dire si les limites de b diffèrent entr'elles d'une quantité plus grande que m . On devra donc avoir $\sqrt{\left(\frac{8A}{m}\right)} - \sqrt{\left(\frac{6A}{m}\right)} > m$, ce qui donne $A > 7m^3$.

Quant à la seconde partie du théorème, elle suit immédiatement de la première, puisqu'en retranchant 1 du nombre pair donné, on a un nombre impair qui est décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$.

(51) THÉORÈME VII. « Si m est pairement pair ou de la forme $4n$, » tout nombre pair $A > 28m^3$ sera décomposable en quatre polygones » de l'ordre $m + 2$. »

Car puisqu'on a $a = A - (m + 2)x$, s'il y a deux valeurs $x = h$; $x = h + 1$, comprises entre les limites qui conviennent à x , ou si l'on a $A > 28m^3$, et qu'on appelle a, a' , les deux valeurs correspondantes de a , on aura $a - a' = m - 2 = 4n - 2$; donc des deux nombres a, a' , il y en aura un impairement pair, et la solution sera possible.

(52) THÉORÈME VIII. « Si m est impairement pair ou de la forme $4n + 2$, »

» tout nombre impairement pair $A > 7m^3$ sera décomposable en quatre
 » polygones de l'ordre $m + 2$. »

Car puisqu'on a $a = A - (m - 2)x$, et que $m - 2$ est de la forme $4n$, le nombre a sera impairement pair, quel que soit x . Il suffit donc que x ait une valeur, c'est-à-dire qu'on ait $A > 7m^3$, et la solution sera toujours possible.

Au moyen de ces propositions, il est démontré que tout nombre A qui passe une certaine limite, est décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$, excepté seulement le cas où $m + 2$ et A seraient l'un et l'autre divisibles par 4. Or ce cas même peut être réduit à la moitié de son étendue par la proposition suivante.

(33) THÉORÈME IX. « Si m est impairement pair, ou de la forme
 » $4m' + 2$, tout nombre pairement pair $4A' > 28m^3$ sera décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$, pourvu que $A' - m'$
 » soit impair. »

Car puisqu'on a $a = 4A' - 4m'x$ et $b = 4A' - 2x$, si l'on fait $\frac{1}{4}a = a'$ et $\frac{1}{2}b = b'$, la résolution des équations (1) pourra être donnée par celles des mêmes équations où l'on mettrait a' et b' à la place de a et b ; alors on aurait

$$\begin{aligned} a' &= A' - m'x, \\ b' &= 2a' - x. \end{aligned}$$

Or puisqu'on suppose $A' - m'$ impair, si on a une valeur impaire de x , les nombres a' et b' seront impairs, et on pourra résoudre les équations (1). Il suffit donc pour cela que les limites de x diffèrent entre elles de deux unités au moins, ce qui aura lieu si on a $4A' > 28m^3$.

Il est inutile de pousser plus loin ces recherches, puisque s'il existe des cas où un nombre pairement pair qui surpasse la limite $28m^3$, ou telle autre qu'on pourrait assigner, n'est pas décomposable en quatre polygones, on est sûr que ce même nombre sera décomposable en cinq polygones dont l'un sera égal à l'unité. Nous allons faire voir maintenant, par un exemple, comment on peut déterminer directement les polygones dont se compose un nombre donné quelconque.

(34) Soit proposé de décomposer le nombre 6484 en huit ou en un moindre nombre d'octogones.

Il faut, d'après le théorème général, que $A - r$ soit décomposable en quatre octogones, A étant le nombre proposé 6484, et r étant égal

à l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4. Or dans le cas de $m = 6$, les limites de b sont, suivant les formules de l'art. 28,

$$b > \sqrt{(A-r-3)}, \quad b < \frac{4}{3} + \sqrt{\left[\frac{4}{3}(A-r) + \frac{16}{9}\right]}.$$

On satisfera toujours à ces limites, en faisant dans la première $r = 0$, et dans la seconde $r = 4$, ce qui donnera

$$b > \sqrt{6481}, \quad b < \frac{4}{3} + \sqrt{(8641 \frac{7}{9})}.$$

Ainsi on pourra prendre pour b un terme quelconque de la suite 81, 82, 83.....94.

Pour déterminer x , on a l'équation $x = \frac{A-r-b}{m} = 1080 - \left(\frac{b+r-4}{6}\right)$, d'où il résulte que $\frac{b+r-4}{6}$ doit être un entier; ainsi le nombre b devra être de l'une des formes $6n + 0, 1, 2, 3, 4$, auxquelles répondent les valeurs $r = 4, 3, 2, 1, 0$. Cela posé, en se conformant aux limites trouvées, on aura les valeurs de b et r , ensuite celles de x et a , comme il suit :

$b = 81$	$r = 1$	$x = 1067$	$a = 2215$
$b = 82$	$r = 0$	$x = 1067$	$a = 2216$
$b = 84$	$r = 4$	$x = 1066$	$a = 2216$
$b = 85$	$r = 3$	$x = 1066$	$a = 2217$
$b = 86$	$r = 2$	$x = 1066$	$a = 2218$
$b = 87$	$r = 1$	$x = 1066$	$a = 2219$
$b = 88$	$r = 0$	$x = 1066$	$a = 2220$
$b = 90$	$r = 4$	$x = 1065$	$a = 2220$
$b = 91$	$r = 3$	$x = 1065$	$a = 2221$
$b = 92$	$r = 2$	$x = 1065$	$a = 2222$
$b = 93$	$r = 1$	$x = 1065$	$a = 2223$
$b = 94$	$r = 0$	$x = 1065$	$a = 2224$

De là se déduisent plusieurs solutions du problème proposé.

1°. Les trois valeurs impaires de a et b auxquelles correspond la valeur $r = 1$, donneront trois solutions dont le résultat est que le nombre proposé 6484 se forme de quatre octogones et d'un cinquième égal à l'unité.

2°. Les deux valeurs impaires de a et b auxquelles répond la va-

leur $r=3$, donneront deux solutions par lesquelles le nombre proposé se décompose en sept octogones, dont trois sont égaux à l'unité.

3°. Les deux valeurs impairement paires de a qui correspondent à la valeur $r=2$, donneront deux solutions par lesquelles le nombre proposé se décompose en six octogones dont deux sont égaux à l'unité.

4°. Les deux valeurs pairement paires de a auxquelles répond la valeur $r=4$, sont encore admissibles, parce que le nombre $a - \frac{1}{4}b^2$ qui en résulte, peut être décomposé en trois carrés. On obtient par là deux autres décompositions du nombre donné en huit octogones, dont quatre sont égaux à l'unité.

5°. Enfin si on voulait déduire trois autres solutions des valeurs de a et b qui correspondent à la valeur $r=0$, on trouverait que ces solutions ne peuvent avoir lieu, parce que dans ces trois cas le nombre $a - \frac{1}{4}b^2$ se rapporte à la forme $4^k(8n-1)$, qui n'est point décomposable en trois carrés. Nous concluons de là qu'il n'est pas possible de décomposer le nombre donné 6484 en quatre octogones seulement, au moins tant qu'on prend b supérieur à la limite $\sqrt{(3a-2)}-1$. Mais il peut arriver qu'en prenant des valeurs de b inférieures à cette limite, on trouve des solutions admissibles.

En effet, les valeurs de b qui répondent à $r=0$, étant 94, 88 et 82, celle qui suit immédiatement est $b=76$; cette valeur donne $a=2212$, et $a - \frac{1}{4}b^2 = 768 = 4^4 \cdot 3$, nombre qui est décomposable en trois carrés. On trouve ensuite, par les formules de l'art. 10, que l'une des solutions est admissible, puisqu'elle donne $s=43$, $t=u=v=11$; donc le nombre proposé 6484 est égal à la somme des quatre octogones dont les côtés sont 43, 11, 11, 11.

On remarquera que le nombre $6484 > 28m^3$ a été choisi de manière qu'il ne soit pas compris dans le théorème IX, et cependant il se trouve décomposable en quatre octogones seulement.

§ III. *Méthodes nouvelles pour la résolution approchée des équations numériques.*

Nous nous proposons de faire voir comment on peut trouver, avec tel degré d'approximation qu'on voudra, les racines réelles d'une équation proposée, sans qu'on ait aucune connaissance préliminaire de la grandeur et du nombre de ces racines. Les méthodes que nous donnerons pour cet objet, ne supposent que des préparations qui tiennent à la nature de ces méthodes, et peuvent s'appliquer directement à toute équation proposée. La première exige cependant qu'on connaisse une limite supérieure à la plus grande des racines; la recherche de cette limite est donc le premier objet dont nous allons nous occuper.

Limites des Racines réelles.

(35) Il suffira de chercher la limite des racines positives; car en mettant $-x$ à la place de x , ou changeant les signes des termes de rang pair, les racines qui étaient négatives deviendront positives à leur tour; de sorte que la règle trouvée pour les racines positives, s'appliquera également, *mutatis mutandis*, aux racines négatives.

Soit l'équation proposée du degré n ,

$$x^n \pm A_1 x^{n-1} \pm A_2 x^{n-2} \pm A_3 x^{n-3} \dots \pm A_n = 0,$$

dans laquelle 1 est le coefficient du premier terme, et A_r est le coefficient du terme affecté de la puissance x^{n-r} ; pour avoir la limite supérieure des racines réelles et positives, il faut distinguer deux cas.

1°. Si le second terme a un coefficient négatif qui ne soit surpassé par aucun des autres coefficients négatifs; je dis que ce coefficient, augmenté d'une unité, sera plus grand que la plus grande racine positive.

En effet, si une valeur positive de x pouvait être plus grande que $1 + A_1$, ce serait dans le cas où tous les coefficients seraient négatifs et égaux à A_1 , ensorte que l'équation à résoudre fût

$$x^n - A_1 x^{n-1} - A_1 x^{n-2} - A_1 x^{n-3} \dots - A_1 = 0.$$

Mais dans ce cas même, si l'on fait $x = 1 + A_1$, on aura $x^n - A_1 x^{n-1} = x^{n-1}$, $x^{n-1} - A_1 x^{n-2} = x^{n-2}$, etc.; de sorte que le premier membre se réduit à $+1$; donc on a toujours $x < 1 + A_1$.

2°. Si le plus grand coefficient négatif n'est pas celui du second terme, soient A_i et A_k , les deux coefficients négatifs pour lesquels $\sqrt[i]{A_i}$ et $\sqrt[k]{A_k}$ sont les plus grands possibles; je dis qu'on aura toujours $x < \sqrt[i]{A_i} + \sqrt[k]{A_k}$.

En effet, soit a le plus grand de ces deux radicaux, et b l'autre; il n'y aura, par hypothèse, qu'un seul terme négatif de l'équation représenté par $-a^i x^{n-i}$; tous les autres qu'on peut représenter généralement par $-c^r x^{n-r}$, seront tels qu'on a $c = b$ pour l'un au moins de ces termes, et $c < b$ pour tous les autres. Donc l'hypothèse qui rend x le plus grand est celle où l'équation à résoudre serait

$$\left. \begin{aligned} x^n - b x^{n-1} - b^2 x^{n-2} - b^3 x^{n-3} \dots - b^n \\ - x^{n-r} (a^r - b^r) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Le premier membre se réduit à $x^n - x^{n-r} (a^r - b^r) - b \left(\frac{x^n - b^n}{x - b} \right)$, et si l'on fait $x = a + b$, il devient

$$\frac{b^{n+1}}{a} + \frac{a-b}{a} (a+b)^{n-r} \left[(a+b)^r - a \left(\frac{a^r - b^r}{a-b} \right) \right],$$

quantité toujours positive, puisqu'on suppose $a > b$, et qu'on a en général $(a+b)^r > a \left(\frac{a^r - b^r}{a-b} \right)$. Donc la plus grande racine positive de

l'équation proposée est plus petite que $a+b$, ou $< \sqrt[i]{A_i} + \sqrt[k]{A_k}$.

Si l'équation proposée n'avait qu'un seul terme négatif $-A_k x^{n-k}$, la limite de x serait simplement $\sqrt[k]{A_k}$, ce qui peut se vérifier immédiatement.

Définition des Fonctions omale.

(36) Nous appellerons *fonction omale* de x , toute fonction qui a la propriété d'être toujours croissante ou toujours décroissante à mesure que x augmente dans le sens positif, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$.

Nous supposerons toujours x positif, et cependant la fonction omale, considérée comme l'ordonnée d'une courbe, pourrait être positive dans une partie de la ligne des abscisses, et négative dans l'autre; mais nous ne considérerons que les fonctions omale qui demeurent cons-

tamment positives pour toute valeur de x , depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$.

Il suit de notre définition, que pour toute fonction omale $\phi(x)$, le coefficient différentiel $\frac{d\phi(x)}{dx}$ est toujours de même signe, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$. Il sera positif pour les fonctions omales croissantes, et négatif pour les fonctions omales décroissantes.

(37) On peut donner, comme exemples des fonctions omales, les valeurs suivantes de $\phi(x)$, dans lesquelles nous supposons tous les coefficients positifs,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \dots + K, \\ \phi(x) &= \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \dots + K}{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \text{etc.}}, \\ \phi(x) &= 1 + \frac{A}{a+x} + \frac{B}{b+x} + \frac{C}{c+x}.\end{aligned}$$

La première et la seconde sont croissantes, l'une depuis $\phi(0) = K$ jusqu'à $\phi(\infty) = \infty$, l'autre depuis $\phi(0) = 0$ jusqu'à $\phi(\infty) = \infty$; la troisième décroît continuellement depuis $\phi(0) = 1 + \frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c}$ jusqu'à $\phi(\infty) = 1$.

Si on trace la courbe qui a pour équation $y = \phi(x)$, cette courbe montera ou descendra graduellement, depuis la première ordonnée $\phi(0)$ jusqu'à la dernière $\phi(\infty)$, en sorte que la même ordonnée ne pourra jamais répondre à deux abscisses différentes.

Donc c étant un nombre positif donné compris entre $\phi(0)$ et $\phi(\infty)$, l'équation $c = \phi(x)$ aura toujours une racine positive, mais elle n'en pourra avoir qu'une.

Si c n'était pas compris entre les limites $\phi(0)$ et $\phi(\infty)$, l'équation $c = \phi(x)$ n'aurait aucune racine positive.

Résolution de l'Équation omale $c = \phi(x)$.

(38) Imaginons qu'on décrive la courbe dont l'équation est $y = \phi(x)$; et supposons d'abord que la fonction $\phi(x)$ soit croissante, et qu'en même tems la courbe soit concave vers l'axe.

Fig. 1. Soit A le premier point de cette courbe, où l'on a $x = 0$, $y = \phi(0)$. A la distance c de l'axe des x menons la droite CM parallèle à cet

axe, laquelle rencontre en C l'ordonnée prolongée du point A , et en M la courbe CM ; il faut déterminer l'abscisse du point M qui sera la valeur de la racine cherchée.

Pour cela, menons en A la tangente Ak , qui rencontre en k la droite CM , et appelons k l'abscisse du point k ; nous aurons, en supposant $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$,

$$k = \frac{c - \varphi(0)}{\varphi'(0)}.$$

Par le point k menons une perpendiculaire à Ck , qui rencontre la courbe en n ; au point n menons la tangente nk' , qui rencontre en k' la droite CM ; si on appelle k' l'abscisse du point k' , on aura de nouveau

$$k' = k + \frac{c - \varphi(k)}{\varphi'(k)}.$$

Déterminant de même k'' par l'équation

$$k'' = k' + \frac{c - \varphi(k')}{\varphi'(k')},$$

et ainsi de suite, il est évident que la limite vers laquelle convergent les termes de la série croissante $k, k', k'',$ etc. sera la valeur cherchée de x .

On voit donc que pour résoudre l'équation omale $c = \varphi(x)$, il faudra calculer successivement les quantités $k, k', k'',$ etc. d'après les formules

$$\begin{aligned} k &= \frac{c - \varphi(0)}{\varphi'(0)}, \\ k' &= k + \frac{c - \varphi(k)}{\varphi'(k)}, \\ k'' &= k' + \frac{c - \varphi(k')}{\varphi'(k')}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et la dernière des quantités $k, k', k'',$ etc., ou la limite vers laquelle elles tendent, sera la valeur de x .

(39) Il est bon de remarquer, 1°. que les premiers termes de la suite $k, k', k'',$ etc. n'ont pas besoin d'être calculés très-exactement; ce n'est que lorsqu'on est parvenu à deux termes peu différens l'un de l'autre, qu'il importe de continuer le calcul avec toute la précision qu'on veut obtenir dans le résultat.

2°. Que si on sait d'avance que x doit être $> k$, alors il faudra supprimer la première des équations de l'article précédent, et partir de la valeur donnée k pour déterminer toutes les autres $k', k'',$ etc., ce qui abrégera le calcul.

Fig. 2. (40) Supposons maintenant que $\phi(x)$ soit une fonction décroissante, telle cependant qu'on ait $\phi(0)$ égale à une quantité finie; alors la construction se fera comme elle est indiquée dans la figure 2; et parce que $\phi'(x)$ devient négatif dans ce cas, les formules pour calculer successivement $k, k', k'',$ etc. devront être écrites comme il suit :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\phi(0) - c}{-\phi'(0)}, \\ k' &= k + \frac{\phi(k) - c}{-\phi'(k)}, \\ k'' &= k' + \frac{\phi(k') - c}{-\phi'(k')}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On fera d'ailleurs, pour ce cas, les mêmes observations que dans l'article précédent.

(41) Un troisième cas à considérer est celui où la fonction $\phi(x)$ est décroissante, mais telle qu'à l'origine des x , on ait $\phi(0) = \infty$. Dans ce cas, il faut qu'en supposant x infiniment petit, la valeur de $\phi(x)$ se réduise à la forme $Ax^{-m} +$ etc. On aura donc $Ax^{-m} < c$, et par conséquent $x > \sqrt[m]{\frac{A}{c}}$. Cela posé, il faut prendre $k = \sqrt[m]{\left(\frac{A}{c}\right)}$, et partir de la première valeur $x = k$ pour calculer ensuite les termes $k', k'',$ etc. par les formules de l'article précédent. La limite de ces termes sera la valeur cherchée de x .

Il peut y avoir d'autres cas que ceux qui sont représentés par les figures 1 et 2; nous les examinerons ci-après, article 76.

Méthode pour avoir la plus grande Racine positive d'une équation proposée.

(42) Pour écarter toute difficulté étrangère à notre objet, nous supposerons constamment que l'équation proposée n'a point de racines égales, et qu'elle n'est point divisible par x . Cela posé, on commencera par déterminer la limite supérieure des racines positives,

comme il a été dit dans l'article 35. Soit α cette limite; on aura donc la racine cherchée $x < \alpha$.

Si on fait passer dans le second membre de l'équation proposée tous les termes négatifs, cette équation prendra la forme suivante :

$$x^n \left(1 + \frac{f}{x} + \frac{g}{x^2} + \text{etc.} \right) = ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + cx^{n-k-2} + \text{etc.},$$

où tous les coefficients sont positifs et où il faut observer que les deux polynomes ne peuvent être complets, sans quoi la même puissance de x se trouverait à-la-fois dans les deux membres.

Cela posé, si l'on fait

$$\varphi(x) = \frac{ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + cx^{n-k-2} + \text{etc.}}{1 + \frac{f}{x} + \frac{g}{x^2} + \frac{h}{x^3} + \text{etc.}},$$

la fonction $\varphi(x)$ sera une fonction omale croissante de x , et on aura à résoudre l'équation $x^n = \varphi(x)$.

Pour cela supposons que l'on construise sur la même ligne des Fig. 3. abscisses, et dans le sens positif seulement, les deux courbes dont les équations sont $y = x^n$, $y = \varphi(x)$; désignons par P le point d'intersection de ces deux courbes qui répond à la plus grande racine $x = r$; la racine r étant plus petite que α , si on fait $x = \alpha$ dans $\varphi(x)$, on aura une ordonnée $\varphi(\alpha)$ plus grande que l'ordonnée r^n du point P ; car $\varphi(x)$ étant une fonction omale croissante, si l'on a $\alpha > r$, il faut qu'on ait aussi $\varphi(\alpha) > \varphi(r)$, ou $\varphi(\alpha) > r^n$.

Soit n le point de la courbe $y = \varphi(x)$ qui répond à l'abscisse $x = \alpha$; si on mène par le point n une parallèle à la ligne des abscisses qui rencontre en m la courbe $y = x^n$, l'abscisse correspondante au point m étant nommée α' , l'ordonnée en m sera $(\alpha')^n$; ainsi on aura $(\alpha')^n = \varphi(\alpha)$, et par conséquent $\alpha' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha)}$.

Comme on a $\varphi(\alpha) > r^n$, il s'ensuit qu'on a aussi $\alpha' > r$; mais α' est plus approchée de r que α .

L'abscisse α' détermine sur la courbe $y = \varphi(x)$ un second point n' dont l'ordonnée est $\varphi(\alpha')$; si par ce point on mène une parallèle à la ligne des abscisses qui rencontre en m' la courbe $y = x^n$, l'abscisse correspondante au point m' étant nommée α'' , on aura $\alpha'' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha')}$, et l'abscisse α'' sera encore plus grande que celle qui répond au point d'intersection P , mais elle doit en approcher plus que α' .

Il est inutile d'entrer dans de plus grands détails, et on voit qu'en partant de la limite supérieure $\alpha > x$, si on calcule les termes successifs α' , α'' , etc. par les formules

$$\alpha' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha)}, \quad \alpha'' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha')}, \quad \alpha''' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha'')}, \quad \text{etc.},$$

la plus grande racine positive r de l'équation proposée sera la limite vers laquelle convergent les termes de la série décroissante α , α' , α'' , α''' , etc.

Cette suite devra être plus ou moins prolongée, selon qu'on veut obtenir une plus ou moins grande approximation; mais en général la convergence deviendra manifeste après un petit nombre de termes.

(45) Les premiers termes de la suite α , α' , α'' , etc. pouvant être fort éloignés de la racine que l'on cherche, il ne sera pas nécessaire de calculer avec beaucoup de précision ces premiers termes; mais lorsque deux termes consécutifs commenceront à différer peu l'un de l'autre, il faudra augmenter progressivement le nombre des décimales, jusqu'à ce qu'on obtienne deux termes consécutifs qui ne diffèrent que dans l'ordre de décimales qu'on veut négliger. Pour parvenir plus promptement au résultat, on pourra employer le moyen suivant.

Désignons par α , α' , α'' les trois dernières valeurs approchées de r ; aux points de l'axe qui correspondent à ces abscisses, menons des ordonnées p , p' , p'' égales respectivement aux distances mn' , $m'n''$, $m''n'''$, qui ont pour expression $\alpha^n - \varphi(\alpha)$, $\alpha'^n - \varphi(\alpha')$, $\alpha''^n - \varphi(\alpha'')$; faisons passer une courbe parabolique par les extrémités de ces ordonnées, et soit $y = A - Bz + Cz^2$ l'équation de cette courbe, z étant l'abscisse comptée du point où $x = \alpha$. On aura, pour déterminer A , B , C , les équations

$$\begin{aligned} p &= A, \\ p' &= A - B(\alpha - \alpha') + C(\alpha - \alpha')^2, \\ p'' &= A - B(\alpha - \alpha'') + C(\alpha - \alpha'')^2. \end{aligned}$$

Faisant ensuite $y = 0$, on aura

$$z = \frac{2A}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}};$$

d'où l'on tire l'abscisse cherchée du point d'intersection $r = \alpha - z$.

(44) Si l'équation proposée ne devait avoir aucune racine positive, on trouverait que la suite $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''',$ etc. n'a point de limite, et que les termes décroissent successivement jusqu'à devenir nuls. On n'en conclura cependant pas qu'il y a une racine égale à zéro, car cette racine est toujours exclue.

On peut d'ailleurs, pour abrégier le calcul, chercher d'avance la limite inférieure des racines positives. Il faut pour cela faire $x = \frac{1}{z}$, et après avoir trouvé, par la méthode de l'article 35, la limite supérieure de z , qu'on appellera λ , on en conclura que la plus petite valeur positive de x est $> \frac{1}{\lambda}$. Donc, dès que la suite $\alpha, \alpha', \alpha'',$ etc. descendra jusqu'à un terme $< \frac{1}{\lambda}$, on sera sûr que la racine cherchée n'existe pas. Ce procédé s'applique au cas où, ayant déjà déterminé toutes les racines positives $r, r', r'', r''',$ etc., la recherche d'une racine de plus doit conduire à une impossibilité.

Manière de trouver les autres racines positives de la même équation.

(45) La plus grande racine r étant trouvée, nous chercherons d'abord celle qui la suit immédiatement par ordre de grandeur, et que nous désignerons par r' .

Pour cela, le moyen le plus simple est de revenir à l'équation primitive $X=0$, et de diviser son premier membre par $x-r$; on aura l'équation du degré $n-1$ qui contient les autres racines, parmi lesquelles celle que nous cherchons maintenant, et que nous avons désignée par r' , est la plus grande.

La nouvelle équation à résoudre pourra être mise sous la forme $x^{n-1} = \psi(x)$, $\psi(x)$ étant une fonction omale de x . On procédera donc à sa résolution par la même méthode qui a été suivie pour l'équation $x^n = \phi(x)$, et en observant que la limite des racines est connue d'avance, puisqu'on doit avoir $r' < r$.

Il est clair qu'en continuant ces opérations on trouvera successivement les autres racines positives $r'', r''',$ etc., s'il en existe : et lorsque la racine cherchée n'existe pas, le calcul en manifestera de lui-même l'impossibilité, comme nous l'avons remarqué dans l'article 44.

(46) La division de l'équation proposée par $x-r$ peut s'exécuter de la manière suivante.

En prenant la même valeur de $\varphi(x)$ que dans l'article 42, l'équation proposée $x^n = \varphi(x)$, exprimée de la manière ordinaire, est

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \text{etc.} = ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + cx^{n-k-2} + \text{etc.}$$

Soit le premier membre $= P(x-r) + p$, et le second $= Q(x-r) + q$, p et q étant les restes de la division des deux membres par $x-r$; puisque la valeur $x=r$ satisfait à l'équation, on devra avoir $p=q$, et par conséquent l'équation du degré $n-1$ qui reste à résoudre, est $P=Q$.

Soit

$$\begin{aligned} P &= x^{n-1} + f'x^{n-2} + g'x^{n-3} + h'x^{n-4} + \text{etc.}, \\ Q &= a'x^{n-k-1} + b'x^{n-k-2} + c'x^{n-k-3} + \text{etc.}; \end{aligned}$$

on aura évidemment

$$\begin{aligned} f' &= f + r, & a' &= a, \\ g' &= g + f'r, & b' &= b + a'r, \\ h' &= h + g'r, & c' &= c + b'r, \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{aligned}$$

Nous aurons donc l'équation

$$x^{n-1} + f'x^{n-2} + g'x^{n-3} + \text{etc.} = a'x^{n-k-1} + b'x^{n-k-2} + c'x^{n-k-3} + \text{etc.},$$

que l'on peut mettre sous la forme $x^{n-1} = \varphi_1(x)$, en prenant une nouvelle fonction omale $\varphi_1(x)$, ainsi exprimée :

$$\varphi_1(x) = \frac{a'x^{n-k-1} + b'x^{n-k-2} + c'x^{n-k-3} + \text{etc.}}{1 + \frac{f'}{x} + \frac{g'}{x^2} + \text{etc.}}$$

Il faut observer cependant que comme le polynome $x^{n-1} + f'x^{n-2} + g'x^{n-3} + \text{etc.}$, contiendra nécessairement toutes les puissances de x inférieures à $n-1$, il y aura des réductions à effectuer entre les derniers termes de ce polynome et ceux du polynome $a'x^{n-k-1} + b'x^{n-k-2} + \text{etc.}$ En général, dans la valeur de $\varphi_1(x)$ il faudra réduire le terme Mx^{n-k-i} , pris dans le numérateur, avec le terme Nx^{n-k-i} , pris dans le dénominateur, et porter la différence des coefficients où il y aura excès, c'est-à-dire mettre $(M-N)x^{n-k-i}$ dans le numérateur, si on a $M > N$, et $(N-M)x^{n-k-i}$ dans le dénominateur, si on a $M < N$.

Cette opération étant faite, on aura à résoudre l'équation $x^{n-1} = \varphi_1(x)$,

dont on sait que la plus grande racine r' doit être $\leq r$. Connaissant cette seconde racine r' , on procédera semblablement pour avoir la troisième r'' , et les suivantes, s'il y a lieu.

(47) La méthode que nous venons d'indiquer s'applique de même aux racines négatives ; ainsi on peut trouver par son moyen toutes les racines réelles d'une équation numérique : peut-être cette méthode est-elle ce qu'on peut proposer de plus simple et de plus général pour la résolution des équations numériques, au moins tant qu'il n'y a pas de circonstance particulière qui puisse aider à trouver les racines.

On pourrait, sans changer la forme de l'équation proposée $x^n = \varphi(x)$, trouver successivement toutes ses racines, au moyen d'une construction géométrique qui ferait connaître les divers points d'intersection $P, P', P'',$ etc. des deux courbes $y = x^n, y = \varphi(x)$; mais la détermination du second point P' , et en général de tous ceux qui ont un rang pair, serait beaucoup moins facile que celle du premier point P et de tous ceux dont le rang est impair. Et puisque tout embarras peut être évité par les divisions successives ou les opérations équivalentes que nous avons indiquées, nous nous abstenons d'entrer dans d'autres détails sur ces recherches.

Seconde méthode pour la résolution des équations numériques.

(48) Etant proposé l'équation du degré n ,

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + hx^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

dont nous désignerons le premier membre par $F(x)$, prenons un nombre n de facteurs $1+x, 2+x, 3+x, \dots, n+x$, et supposons que le premier membre soit divisé par le produit de tous ces facteurs ; on aura d'abord le quotient 1 égal au coefficient du premier terme, ensuite on pourra supposer que le reste est décomposé en fractions partielles, de manière que l'équation proposée prendra la forme

$$1 + \frac{(1)}{1+x} + \frac{(2)}{2+x} + \frac{(3)}{3+x} \dots + \frac{(n)}{n+x} = 0,$$

dans laquelle (1), (2), (3), etc. sont des coefficients qu'on déterminera de la manière suivante.

Soit en général $x+k$ l'un des facteurs $x+1, x+2, \dots, x+n$, et $Q(x)$ le produit de tous les autres; on pourra faire

$$\frac{F(x)}{(x+k)Q(x)} = 1 + \frac{(k)}{x+k} + \frac{P}{Q(x)},$$

ce qui donne $k = \frac{F(x) - (x+k)P - (x+k)Q(x)}{Q(x)}$. Soit, dans cette équation, $x = -k$, on aura

$$(k) = \frac{F(-k)}{Q(-k)};$$

c'est l'expression générale du numérateur de la fraction partielle qui a pour dénominateur $k+x$.

Dans cette expression, $Q(-k)$ est le produit de tous les facteurs $(1-k)(2-k)(3-k)\dots(n-k)$, excepté celui qui devient zéro pour une valeur déterminée de k . Ainsi on aura successivement

$$Q(-1) = 1.2.3\dots n-1,$$

$$Q(-2) = -\frac{1}{n-1} Q(-1),$$

$$Q(-3) = \frac{1.2}{n-1.n-2} Q(-1),$$

$$Q(-4) = -\frac{1.2.3}{n-1.n-2.n-3} Q(-1),$$

etc.

De sorte que $Q(-k)$ sera positif pour toutes les valeurs impaires de k , et négatif pour les valeurs paires.

Si $F(x)$ reste constamment positif pour toutes les suppositions $x=-1, -2, -3\dots-n$, il est visible que le coefficient (k) aura le même signe que $Q(-k)$, c'est-à-dire qu'il sera positif pour toutes les valeurs impaires de k , et négatif pour toutes les valeurs paires.

Le contraire aura lieu si $F(x)$ reste constamment négatif dans toutes ces suppositions.

Mais cet ordre sera troublé si $F(x)$ ne conserve pas le même signe, dans les diverses suppositions $x=-1, -2, -3\dots-n$; en général, si $F(-k)$ et $F(-k+1)$ sont de signes contraires, ce qui indiquerait une racine négative entre $x=-k$ et $x=-k-1$, les coefficients $(k), (k+1)$ seront de même signe; et ils seront toujours de signes différens si $F(-k)$ et $F(-k-1)$ sont de même signe.

(49) Désignons en général par $\frac{A}{a+x}$, $\frac{A'}{a'+x}$, $\frac{A''}{a''+x}$, etc. les termes $\frac{(k)}{k+x}$, dans lesquels (k) est positif, et par $-\frac{B}{b+x}$, $-\frac{B'}{b'+x}$, $-\frac{B''}{b''+x}$, etc. ceux dans lesquels (k) est négatif; si on fait

$$\phi(x) = \frac{A}{a+x} + \frac{A'}{a'+x} + \frac{A''}{a''+x} + \text{etc.},$$

$$\psi(x) = \frac{B}{b+x} + \frac{B'}{b'+x} + \frac{B''}{b''+x} + \text{etc.},$$

l'équation proposée se réduira à la forme

$$1 + \phi(x) = \psi(x),$$

où $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux fonctions omales décroissantes de x .

Cette équation peut aussi être représentée par

$$1 + \int \frac{A}{a+x} = \int \frac{B}{b+x},$$

en désignant par $\int \frac{A}{a+x}$ la somme des termes qui composent $\phi(x)$, et par $\int \frac{B}{b+x}$ une somme semblable pour $\psi(x)$.

Suivant ce qui a déjà été dit, on voit, 1°. que les diverses valeurs de a seront tous les nombres impairs, et les diverses valeurs de b tous les nombres pairs moindres que n , si $F(-k)$ est constamment positif; 2°. que l'inverse aura lieu si $F(-k)$ est constamment négatif; 3°. que cet ordre ne peut être troublé que lorsque $F(-k)$ et $F(-k-1)$ sont de signes différens, auquel cas les deux termes qui ont pour dénominateurs $k+x$, $k+1+x$ appartiennent à une même fonction $\phi(x)$ ou $\psi(x)$. Donc quand il arrive que deux dénominateurs consécutifs $k+x$, $k+1+x$ se trouvent dans la même fonction $\phi(x)$ ou $\psi(x)$, on en doit conclure qu'il y a une racine négative entre $x=-k$ et $x=-k-1$. C'est d'ailleurs ce qu'on peut démontrer immédiatement. En effet, supposons, par exemple, que dans $\phi(x)$ se trouvent les deux termes $\frac{A''}{3+x} + \frac{A'''}{4+x}$; si on fait successivement $x=-3-\omega$, $x=-4+\omega$, ω étant infiniment petit, on obtient deux résultats, dont l'un est infini positif et l'autre infini négatif. Donc il y a une racine entre -3 et -4 .

(50) Maintenant pour procéder à la résolution de l'équation ainsi exprimée par deux fonctions omales simples, il faut imaginer qu'on construise, dans le sens des x positifs seulement, les deux courbes qui ont pour équations $y = 1 + \phi(x)$, $y = \psi(x)$, et les diverses intersections de ces courbes donneront les diverses racines positives qu'on veut déterminer. Prenons d'abord une idée de la figure de ces courbes.

Fig. 4 et 5. Soit OX la ligne des abscisses commune aux deux courbes, O l'origine des x ; la première et la plus grande ordonnée de la courbe $y = 1 + \phi(x)$ est représentée par $OA = 1 + \phi(0)$. Passé le point A , l'ordonnée diminue de plus en plus, à mesure que l'abscisse augmente; elle finit par être égale à 1, lorsqu'on fait $x = \infty$. Ainsi en prenant $OC = 1$, et menant par le point C une parallèle à la ligne des abscisses, cette parallèle CL sera l'asymptote de la courbe $y = 1 + \phi(x)$.

L'autre courbe $y = \psi(x)$, représentée par BPL , a pour première et plus grande ordonnée $BO = \psi(0)$. Passé le point B , l'ordonnée diminue continuellement et devient zéro lorsque $x = \infty$. Cette courbe a donc pour asymptote la ligne des x .

(51) De cette description sommaire on peut déjà tirer plusieurs conséquences relatives au nombre et à la limite supérieure des racines positives.

1°. Si l'on veut déterminer le point L où la courbe $y = \psi(x)$ rencontre la droite CL qui est l'asymptote de l'autre courbe $y = 1 + \phi(x)$, il faudra résoudre l'équation omale

$$1 = \psi(x).$$

Soit λ la valeur de x tirée de cette équation, par la méthode de l'art. 40; il est évident que s'il y a des intersections entre les deux courbes, elles ne peuvent avoir lieu qu'en deçà du point L . Donc λ est plus grande que la plus grande racine de l'équation proposée.

Si donc l'équation proposée doit avoir m racines positives, il faut que l'arc BL soit coupé en m points par l'autre courbe. Ces intersections ne peuvent guère être rendues sensibles dans la construction graphique des deux courbes, convexes d'un même côté, à moins d'opérer sur une très-grande échelle; mais il suffit pour notre objet d'en concevoir la possibilité.

Fig. 4. 2°. Si l'ordonnée du point B est plus grande que celle du point A ,

c'est-à-dire, si l'on a $\psi(0) > 1 + \phi(0)$, il y aura nécessairement au moins une intersection. En général le nombre des intersections, qui est celui des racines positives de l'équation proposée, devra être impair, puisque la courbe BL , qui d'abord est élevée au-dessus de l'autre courbe, passe nécessairement au-dessous dans la région du point L .

5°. On ne peut avoir $\psi(0) = 1 + \phi(0)$, c'est-à-dire que le point B ne peut pas coïncider avec le point A , parce qu'alors on aurait la racine $x=0$, cas qui est exclu, ainsi que celui où l'équation proposée aurait des racines égales.

4°. Il ne reste donc à considérer que le cas de $\psi(0) < 1 + \phi(0)$. Alors Fig. 5. le point B étant situé au-dessous de A , s'il y a une première intersection, il y en aura nécessairement une seconde, et en général le nombre des intersections devra être pair.

5°. S'il arrivait qu'on eût $\Psi(0) < 1$, le point B tomberait au-dessous de C ; il n'y aurait donc alors aucune intersection, ni par conséquent aucune racine positive.

(52) Voici donc les symptômes des différens cas généraux qui peuvent avoir lieu.

1°. Si l'on a $\psi(0) > 1 + \phi(0)$, l'équation proposée aura au moins une racine positive; elle pourra en avoir trois, cinq, et en général un nombre impair.

2°. Si l'on a $\psi(0) < 1 + \phi(0)$, l'équation proposée n'aura aucune racine positive, ou elle en aura un nombre pair.

3°. Si l'on a $\psi(0) < 1$, l'équation proposée n'aura aucune racine positive.

Venons maintenant à la résolution effective de l'équation proposée: elle consiste à déterminer les valeurs numériques des racines positives, ou à prouver qu'il n'existe aucune de ces racines.

Il y a deux manières de faire ces calculs; l'une en commençant par la plus grande racine, l'autre en commençant par la plus petite. Nous allons exposer ces deux moyens successivement.

Recherche de la plus grande racine.

(53) On connaît déjà la limite λ de la plus grande racine, par la résolution de l'équation omale $1 = \psi(x)$; cette limite est l'abscisse Fig. 6. du point L .

Soit k le point de la courbe $y = 1 + \phi(x)$ qui a la même abscisse que le point L ; si par le point k on mène une parallèle à l'axe qui rencontre en i la courbe $y = \psi(x)$, et qu'on appelle α l'abscisse du point i , on déterminera α en résolvant l'équation $1 + \phi(\lambda) = \psi(\alpha)$.

Soit ensuite k' le point de la courbe Pk qui a la même abscisse que le point i , et dont l'ordonnée est par conséquent $1 + \phi(\alpha)$; si par le point k' on mène une parallèle à l'axe qui rencontre en i' la courbe $y = \psi(x)$, et qu'on appelle α' l'abscisse du point i' , on déterminera α' par l'équation $1 + \phi(\alpha) = \psi(\alpha')$.

De là on voit qu'il faut calculer successivement les quantités $\lambda, \alpha, \alpha', \alpha'',$ etc. par la résolution des équations

$$\begin{aligned} 1 &= \psi(\lambda); \\ 1 + \phi(\lambda) &= \psi(\alpha), \\ 1 + \phi(\alpha) &= \psi(\alpha'), \\ 1 + \phi(\alpha') &= \psi(\alpha''), \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

et le dernier terme de la suite décroissante $\lambda, \alpha, \alpha', \alpha'',$ etc. sera la valeur de la racine cherchée r .

Nous remarquerons comme ci-dessus, que le calcul des termes $\lambda, \alpha, \alpha', \alpha'',$ etc. n'exige beaucoup de précision que lorsqu'on est parvenu à deux termes consécutifs très-peu différents l'un de l'autre.

Nous remarquerons encore qu'au moyen du dernier terme trouvé, qui approche déjà beaucoup de la valeur de x , on peut achever le calcul de la manière suivante.

Soit p ce dernier terme, et soit $x = p - \omega$, ω ne pouvant être qu'une très-petite quantité, si on substitue cette valeur dans l'équation proposée $1 + \phi(x) = \psi(x)$, le résultat sera de la forme

$$\epsilon = F\omega + G\omega^2,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 + \phi(p) - \psi(p), \\ F &= \int \frac{B}{(b+p)^2} - \int \frac{A}{(a+p)^2}, \\ G &= \int \frac{B}{(b+p)^3} - \int \frac{A}{(a+p)^3}, \end{aligned}$$

On aura donc , en négligeant seulement les quantités de l'ordre ϵ^3 ,

$$\omega = \frac{E}{F} - \frac{G\epsilon^2}{F^3},$$

et de là $x = p - \omega$.

Détermination de la plus petite racine.

(54) Il y a deux cas à considérer , selon que $1 + \phi(o)$ est plus petit ou plus grand que $\psi(o)$.

Premier cas , $1 + \phi(o) < \psi(o)$. Alors le point A , origine de la courbe $y = 1 + \phi(x)$, étant situé au-dessous du point B , origine de la courbe $y = \psi(x)$, je mène Ab parallèle à l'axe qui rencontre en b l'autre courbe. Soit α l'abscisse du point b , on trouvera α en résolvant l'équation omale $1 + \phi(o) = \psi(\alpha)$, et α sera une première approximation vers la moindre racine $x = r$ qui est l'abscisse du premier point d'intersection P . Fig. 4.

L'ordonnée menée au point b coupe la courbe inférieure en un point a dont l'ordonnée $= 1 + \phi(\alpha)$. Par le point a menons une parallèle à l'axe qui rencontre la courbe supérieure en b' ; si on appelle α' l'abscisse du point b' , on trouvera α' par la résolution de l'équation $1 + \phi(\alpha) = \psi(\alpha')$. Continuant ainsi indéfiniment , on voit que l'abscisse qui convient au point d'intersection P , sera le dernier terme de la suite $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc.

Donc pour avoir la plus petite racine $x = r$, il faut déterminer successivement les termes $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc. par la résolution des équations omales

$$\begin{aligned} 1 + \phi(o) &= \psi(\alpha), \\ 1 + \phi(\alpha) &= \psi(\alpha'), \\ 1 + \phi(\alpha') &= \psi(\alpha''), \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

et la dernière des quantités croissantes $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., ou la limite vers laquelle tendent ces quantités , sera la racine cherchée $x = r$.

(55) *Second cas* , $1 + \phi(o) > \psi(o)$. Alors le point B étant situé au-dessous de A , on mènera par le point B une parallèle à l'axe qui rencontrera en a la courbe supérieure AP . Soit α l'abscisse du point a , on trouvera α en résolvant l'équation omale $\psi(o) = 1 + \phi(\alpha)$, et α sera une première approximation vers la racine cherchée. Fig. 5.

L'ordonnée au point a rencontre la courbe inférieure en un point b dont l'ordonnée $= \downarrow(a)$. Par le point b menons une parallèle à l'axe qui rencontre en a' la courbe supérieure ; si l'on appelle α' l'abscisse du point a' , on trouvera α' en résolvant l'équation omale $\downarrow(\alpha) = 1 + \phi(\alpha')$.

On voit maintenant, sans entrer dans de plus grands détails, que si on détermine successivement les termes $\alpha, \alpha', \alpha'',$ etc., par les équations

$$\begin{aligned}\downarrow(0) - 1 &= \phi(\alpha), \\ \downarrow(\alpha) - 1 &= \phi(\alpha'), \\ \downarrow(\alpha') - 1 &= \phi(\alpha''), \\ &\text{etc. ;}\end{aligned}$$

le dernier terme de la suite $\alpha, \alpha', \alpha'',$ etc. sera la valeur cherchée de la plus petite racine $x = r$.

(56) Dans les deux cas, la difficulté se réduit toujours à résoudre un certain nombre d'équations omales simples, par les formules de l'art. 40. Nous avons d'ailleurs observé que les premiers termes de la suite $\alpha, \alpha', \alpha'',$ etc. n'ont pas besoin d'être calculés avec beaucoup de précision ; ainsi, à cet égard, les calculs peuvent être notablement abrégés. On voit ensuite par la nature de ces opérations, que les points $a, a', a'',$ s'approchent rapidement du point d'intersection P ; de sorte qu'on n'aura jamais à résoudre qu'un petit nombre d'équations omales simples. D'ailleurs la détermination de la limite pourra être abrégée, si on le juge à propos, par le procédé de l'art. 53.

Il pourra arriver aussi qu'on sache d'avance que la racine cherchée r est plus grande qu'une quantité connue λ ; dans ce cas, on partira de la valeur $\alpha = \lambda$ pour déterminer toutes les autres $\alpha', \alpha'',$ etc., ce qui abrègera le calcul.

Nous observerons encore que dans le second cas, il pourrait arriver qu'on ne trouvât pas de solution ; alors la suite $\downarrow(\alpha), \downarrow(\alpha'), \downarrow(\alpha''),$ etc., dont le premier terme est > 1 , en offrirait bientôt un < 1 , ce qui prouverait qu'il n'y a aucune intersection entre les deux courbes, ni par conséquent aucune racine positive de l'équation proposée.

La détermination de la plus petite racine peut être effectuée par une suite plus convergente que celle dont nous venons de montrer l'usage ; mais avant d'exposer cette seconde solution, nous avons à résoudre le problème suivant.

De l'intersection d'une droite quelconque avec la courbe omale $y = \psi(x)$.

(57) Soit BNG la courbe décrite d'après l'équation $y = \psi(x)$; Fig. 7. $\psi(x)$ étant une fonction omale simple qu'on peut représenter par $\int \frac{B}{b+x}$. Soit F un point donné sur le prolongement de l'ordonnée du point N ; si par le point F on mène sous un angle donné NFG , la droite FG qui rencontre la courbe au point G , il s'agit de déterminer l'abscisse du point G .

Soit f l'abscisse donnée du point F , la distance donnée $FN = c$; et m la tangente de l'angle que fait la droite FG avec l'axe; si on appelle x l'abscisse du point G , on aura pour déterminer x , l'équation

$$m = \frac{c + \psi(f) - \psi(x)}{x - f}.$$

Or je remarque que le second membre de cette équation est une fonction omale décroissante de x ; car à mesure que x augmente, ou à mesure que le point G avance sur la courbe dans le sens des x , il est visible que le second membre qui représente la tangente de l'angle que fait FG avec la parallèle à l'axe menée par le point F , diminue continuellement. Au reste cette fonction peut être présentée sous une forme entièrement développée; car ayant fait $\psi(x) = \int \frac{B}{b+x}$, si on observe que $\frac{B}{b+x} = \frac{B}{b+f} - \frac{B(x-f)}{(b+f)(b+x)}$, on pourra faire

$$\psi(x) = \int \frac{B}{b+f} - (x-f) \int \frac{B}{(b+f)(b+x)};$$

et comme $\int \frac{B}{b+f}$ est la même chose que $\psi(f)$, l'équation à résoudre se réduira à cette forme

$$(1) \quad m = \frac{c}{x-f} + \int \frac{C}{b+x},$$

où l'on a fait, pour abréger, $C = \frac{B}{b+f}$.

Comme x doit être plus grand que f , on voit que le second membre de cette équation est en effet une fonction omale simple de x , à compter de $x=f$; j'observe de plus que cette fonction étant infinie

lorsque $x = f$, et nulle lorsque $x = \infty$, l'équation sera toujours possible, quel que soit m , pourvu qu'il soit positif; c'est-à-dire, pourvu que la droite FG soit menée par le point F , de manière à rencontrer l'axe dans la partie indéfinie fX .

Nous remarquerons encore que si l'on a $c = 0$, ou si le point F coïncide avec le point N , alors l'équation à résoudre devient

$$(2) \quad m = \int \frac{c}{b+x};$$

c'est l'équation qui détermine le point d'intersection de la courbe $y = \psi(x)$, avec la droite menée par un point N de cette courbe, en sorte qu'elle fasse avec l'axe des x , un angle dont la tangente $= m$.

(58) Dans le cas où c n'est pas nulle, la résolution de l'équation (1) se rapporte à l'art. 41, et il faudra, pour effectuer la solution, connaître une première valeur approchée de x . Or puisqu'on doit avoir $m > \frac{c}{x-f}$, il en résulte $x > f + \frac{c}{m}$: on peut donc partir du premier terme $k = f + \frac{c}{m}$, pour calculer successivement les autres termes k' , k'' , etc., dont la limite est la valeur cherchée de x .

(59) On peut encore déterminer l'abscisse du point d'intersection G par le procédé suivant.

Par le point N menez une parallèle à l'axe qui rencontre la droite FG en I ; du point I abaissez une perpendiculaire à l'axe qui rencontrera la courbe au point N' ; par le point N' menez de même $N'I'$ parallèle à l'axe, puis $I'N''$ perpendiculaire, et ainsi de suite. Soit f' l'abscisse du point N' , f'' celle du point N'' , etc., on calculera les termes successifs f' , f'' , etc. par les formules

$$\begin{aligned} f' &= f + \frac{c}{m}, \\ f'' &= f' + \frac{\psi(f) - \psi(f')}{m}, \\ f''' &= f'' + \frac{\psi(f') - \psi(f'')}{m}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et il est visible que la limite vers laquelle tendent les termes de la suite f , f' , f'' , etc. sera la valeur cherchée de l'abscisse du point G .

Cette méthode est plus simple que la précédente; mais elle ne peut être employée lorsque $c = 0$; elle ne peut pas l'être non plus lorsque $m = 0$, c'est-à-dire lorsque la droite FG est parallèle à l'axe, parce qu'il n'y a point d'intersection dans le sens où x est $> f$.

Seconde manière de déterminer la plus petite racine.

(60) Nous supposons qu'on a $\psi(0) > 1 + \phi(0)$, parce que, dans ce cas, l'équation $1 + \phi(x) = \psi(x)$ a toujours au moins une racine positive.

Par le premier point B de la courbe $y = \psi(x)$, soit menée la tan- Fig. 8.
gente Ba qui rencontre en a la courbe $y = 1 + \phi(x)$, et soit α l'abscisse du point a , on trouvera, par la formule de l'art. 57, que α est la racine de l'équation

$$-\psi'(0) = \frac{c}{x} + \int \frac{A}{a(a+x)},$$

dans laquelle on a $c = \psi(0) - 1 - \phi(0)$, et où la fonction omale $\int \frac{A}{a(a+x)}$ est déduite de la fonction $\phi(x) = \int \frac{A}{a+x}$, en divisant chaque terme de celle-ci par la valeur correspondante de a .

On appliquera donc à cette équation les formules de l'art. 40, en prenant pour première valeur de k , d'après l'art. 41, $k = \frac{c}{-\psi'(0)}$.

Par le point a ainsi déterminé, menez une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la courbe supérieure en b ; au point b menez la tangente ba' qui rencontre la courbe inférieure en a' , et ainsi de suite.

Si on appelle α' , α'' , etc. les abscisses des points a' , a'' , etc., on trouvera que les différens termes α , α' , α'' , etc. se déterminent par la résolution des équations successives

$$\begin{aligned} -\psi'(0) &= \frac{\psi(0) - 1 - \phi(0)}{x} + \int \frac{A : a}{a+x}, & \text{d'où } x &= \alpha, \\ -\psi'(\alpha) &= \frac{\psi(\alpha) - 1 - \phi(\alpha)}{x - \alpha} + \int \frac{A : (a + \alpha)}{a+x}, & \text{d'où } x &= \alpha', \\ -\psi'(\alpha') &= \frac{\psi(\alpha') - 1 - \phi(\alpha')}{x - \alpha'} + \int \frac{A : (a + \alpha')}{a+x}, & \text{d'où } x &= \alpha'', \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

et la limite vers laquelle convergent les termes de la suite croissante α , α' , α'' , etc., sera la valeur de la plus petite racine cherchée.

Au reste ces formules étant moins simples que celle de l'art. 54, nous nous bornerons au cas qui vient d'être résolu, et nous n'examinerons pas celui où l'on aurait $\downarrow(0) < 1 + \phi(0)$.

Connaissant la plus grande ou la plus petite racine positive, déterminer toutes les autres.

(61) On pourrait chercher successivement toutes les racines par les intersections des deux courbes que nous avons tracées, sans changer la forme de l'équation proposée qui détermine ces courbes. Mais il est beaucoup plus simple, après avoir trouvé la racine $x = r$, de supprimer de l'équation proposée le facteur $x - r$, afin d'avoir l'équation du degré immédiatement inférieur, qui contient les autres racines, et dans laquelle r sera la limite de la racine r' qui doit suivre immédiatement r . Voici le procédé qu'il convient de mettre en usage pour cet objet.

Nous avons supposé que l'équation proposée du degré n est divisée par le produit $(1+x)(2+x)\dots(n+x)$, afin de mettre cette équation sous la forme $1 + \phi(x) = \downarrow(x)$. Lorsque le degré de l'équation se réduit à $n-1$, on doit donc faire disparaître le plus grand dénominateur $n+x$, afin que le plus grand de ceux qui restent soit $n-1+x$, conformément au degré de l'équation. Pour cela il faut multiplier par $n+x$ les différens termes de l'équation $1 + \phi(x) = \downarrow(x)$, et faire ensorte que le produit soit divisible par $x-r$.

Or on a $\frac{A(n+x)}{a+x} = \frac{A(n+r)}{a+r} + \frac{A(n-a)(r-x)}{(a+r)(a+x)}$; donc si on fait $\frac{A(n-a)}{a+r} = A_1$, on aura

$$\phi(x) = \int \frac{A}{a+x} = (n+r) \int \frac{A}{a+r} + (r-x) \int \frac{A_1}{a+x}.$$

De même en faisant $\frac{B(n-b)}{b+r} = B_1$, on aura

$$\downarrow(x) = \int \frac{B}{b+x} = (n+r) \int \frac{B}{b+r} + (r-x) \int \frac{B_1}{b+x}.$$

Substituant ces valeurs et observant qu'on a $\int \frac{A}{a+r} = \phi(r)$ et $\int \frac{B}{b+r} = \downarrow(r)$, l'équation $1 + \phi(x) = \downarrow(x)$ deviendra

$$n+x + (n+r)\phi(r) + (r-x) \int \frac{A_1}{a+x} = (n+r)\downarrow(r) + (r-x) \int \frac{B_1}{b+x}.$$

Mais puisque la valeur $x = r$ satisfait à l'équation $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, on a $1 + \varphi(r) = \psi(r)$; effaçant donc dans l'équation précédente les termes qui se détruisent, et divisant le reste par $r - x$, il viendra

$$1 + \int \frac{B_1}{b+x} = \int \frac{A_1}{a+x}.$$

Cette équation qu'on peut mettre sous la forme $1 + \psi_1(x) = \varphi_1(x)$, est entièrement semblable à la proposée; mais elle a un terme de moins; car par les valeurs des coefficients A_1, B_1 , on voit que le terme qui avait pour dénominateur $n+x$, disparaîtra, soit qu'il appartienne à la fonction $\varphi(x)$ ou à $\psi(x)$.

D'ailleurs on doit observer que comme n est le plus grand des nombres a et b , les coefficients A_1 et B_1 seront toujours positifs, de sorte que le passage de l'équation proposée $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, à la suivante $1 + \psi_1(x) = \varphi_1(x)$, qui contient une racine de moins, ne fait qu'ôter un terme de l'une des fonctions $\varphi(x), \psi(x)$, sans en faire passer aucun de l'une dans l'autre, comme cela aurait lieu si quelqu'un des coefficients A_1, B_1 devenait négatif. Il n'y a que le terme constant 1 qui change de signe ou qui passe d'un membre dans l'autre.

(62) On voit donc que la division de l'équation proposée, par $x - r$, s'exécute par un procédé très-simple qui consiste à transposer le terme constant 1, et à remplacer dans chacun des termes $\frac{A}{a+x}$ et $\frac{B}{b+x}$, le coefficient A par $\frac{A(n-a)}{a+r}$, et le coefficient B par $\frac{B(n-b)}{b+r}$.

Maintenant nous n'avons aucune règle nouvelle à donner pour la résolution de l'équation $1 + \psi_1(x) = \varphi_1(x)$. On appliquera à cette équation les formules des articles 54 et suivans; et sachant d'avance que la plus petite racine r' est $> r$, on parviendra plus facilement encore au résultat. Après avoir trouvé la racine r' qui est la seconde de l'équation proposée, on formera semblablement une troisième équation $1 + \varphi_2(x) = \psi_2(x)$, qui contiendra les $n - 2$ autres racines.

On aura donc ainsi successivement, par des équations qui se simplifient de plus en plus, les diverses racines positives $r, r', r'',$ etc. de l'équation proposée; et ce calcul sera terminé lorsqu'on sera parvenu à une transformée qui n'est plus résoluble, ce qu'on reconnaîtra aux conditions que nous avons indiquées dans la solution générale.

(63) La même méthode fera connaître les racines négatives en partant de l'équation proposée, dans laquelle on changera le signe de x , et que l'on mettra ensuite sous la forme $1 + \varphi(x) = \psi(x)$. Mais il sera plus simple de prendre la dernière des transformées $1 + \psi_1(x) = \varphi_1(x)$, $1 + \varphi_2(x) = \psi_2(x)$, etc., laquelle ne contient plus de racines positives, mais peut en contenir de négatives. Pour obtenir celles-ci, on réduira cette transformée à la forme ordinaire, débarrassée de fractions, et après avoir changé le signe de x , on lui appliquera la méthode du n° 48, pour la réduire de nouveau à la forme $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, dont il faudra chercher les racines positives.

(64) Il reste donc à faire voir comment on peut résoudre une équation qui n'a que des racines imaginaires; mais ce problème est beaucoup plus difficile que celui qui consiste à trouver les racines réelles, et nous ne nous flattons pas que les méthodes précédentes fournissent de grands secours pour sa solution. Il est vrai qu'on pourrait trouver les racines imaginaires d'une équation du degré n , au moyen des racines réelles d'une équation du degré $\frac{n(n-1)}{2}$. Mais pour peu que n surpasse 4, l'extrême complication d'une telle transformée et des calculs nécessaires pour y parvenir, rend l'usage de ce moyen tout-à-fait illusoire. C'est donc dans l'équation proposée elle-même, et non dans une transformée d'un ordre plus élevé, qu'il faut chercher les moyens d'obtenir les valeurs numériques des racines imaginaires. Nous avons déjà indiqué, pag. 151 du Traité précédent, une méthode qui aurait l'avantage de conduire assez facilement à ce but, si on pouvait donner quelques lumières au calculateur sur le choix de la première valeur hypothétique de la racine exprimée par $\alpha + \epsilon \sqrt{-1}$ ou $r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)$. Mais en attendant que cette méthode reçoive les améliorations dont elle est susceptible, nous allons donner les formules qui, dans l'application de la méthode précédente, conviennent au cas des racines imaginaires; et d'abord une racine imaginaire étant représentée par $r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)$, nous chercherons les limites de la quantité r , qui est en quelque sorte la mesure de grandeur ou le *module* de cette racine, puisque la valeur d'une puissance quelconque m de x ne peut jamais surpasser r^m , mais peut en différer aussi peu qu'on voudra.

Limites de la quantité réelle qui sert de module aux racines imaginaires.

(65) L'équation proposée dont toutes les racines sont imaginaires, étant désignée par

$$x^n \pm A_1 x^{n-1} \pm A_2 x^{n-2} \pm A_3 x^{n-3} \dots + A_n = 0,$$

si on suppose $x = r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)$, cette équation se partage en deux autres, savoir,

$$\begin{aligned} r^n \cos n\theta \pm A_1 r^{n-1} \cos (n-1)\theta \pm A_2 r^{n-2} \cos (n-2)\theta \dots + A_n &= 0, \\ r^n \sin n\theta \pm A_1 r^{n-1} \sin (n-1)\theta \pm A_2 r^{n-2} \sin (n-2)\theta \dots \pm A_{n-1} r \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Multipliant la première par $\cos n\theta$, la seconde par $\sin n\theta$, et ajoutant les produits, on a

$$r^n \pm A_1 r^{n-1} \cos \theta \pm A_2 r^{n-2} \cos 2\theta \dots + A_n \cos n\theta = 0.$$

Or il est visible que l'hypothèse qui rendra r^n le plus grand, est celle où l'on aurait

$$r^n = A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + A_3 r^{n-3} \dots + A_n,$$

les coefficients A_1, A_2, A_3 , etc. étant tous pris positivement dans le second membre, et alors en appliquant ce qui a été trouvé dans le cas des racines réelles, art. 35, on pourra en conclure,

1°. Que si A_1 , coefficient du second terme, n'est surpassé en grandeur par aucun des autres coefficients A_2, A_3, \dots, A_n , on a

$$r < 1 + A_1.$$

2°. Que si A_i et A_k sont les deux coefficients pour lesquels $\sqrt[i]{A_i}$ et $\sqrt[k]{A_k}$ sont les plus grands, on aura

$$r < \sqrt[i]{A_i} + \sqrt[k]{A_k}:$$

telle est donc, dans ce cas, la limite supérieure de la quantité r qui sert de module aux racines imaginaires.

(66) Pour avoir la limite inférieure de cette même quantité, j'observe que l'équation proposée n'ayant, par hypothèse, que des racines imaginaires, son dernier terme A_n doit être le produit de toutes les quantités

r^2, r'^2, r''^2 , etc., qui résultent des différentes couples de racines imaginaires. Soit donc r la plus grande des quantités r, r', r'' , etc., et r'' ou ρ la plus petite, on aura

$$r > \sqrt[n]{A_n} \text{ et } \rho < \sqrt[n]{A_n} :$$

le plus grand des modules r doit donc être compris entre les limites suivantes :

$$r > \sqrt[n]{A_n}, \quad r < \sqrt[i]{A_i} + \sqrt[k]{A_k}.$$

Quant aux limites du plus petit module ρ , nous n'avons encore que la supérieure $\rho < \sqrt[n]{A_n}$; mais il est aisé d'avoir la limite inférieure.

Pour cela il faut, dans l'équation proposée, faire $x = \frac{1}{z}$, ce qui donnera une équation de la forme

$$z^n \pm B_1 z^{n-1} \pm B_2 z^{n-2} \dots + B_n = 0,$$

et il faudra considérer deux cas.

1°. Si B_1 , coefficient du second terme, est au moins aussi grand qu'aucun autre coefficient, on aura, en prenant B_1 positivement, $z < 1 + B_1$.

2°. Si B_i et B_k sont les deux coefficients pour lesquels $\sqrt[i]{B_i}$ et $\sqrt[k]{B_k}$ sont les plus grands, on aura, en appelant a et b ces deux radicaux, $z < a + b$.

Donc, dans le premier cas, on aura $\rho > \frac{1}{1+B_1}$, et dans le second $\rho > \frac{1}{a+b}$.

Forme des équations à résoudre dans le cas des racines imaginaires.

(67) Soit $F(x) = 0$ l'équation proposée du degré n , dont toutes les racines sont imaginaires; si on substitue pour x une valeur quelconque $x=k$, le premier membre $F(k)$ sera toujours une quantité positive. Il suit de là que si on procède comme dans l'article 48, et qu'on divise l'équation proposée par le produit des facteurs $1+x, 2+x \dots n+x$, afin de lui donner la forme $1+\varphi(x) = \psi(x)$, ou $1 + \int \frac{A}{a+x} = \int \frac{B}{b+x}$, les différentes valeurs de a seront les nombres impairs $1, 3, 5 \dots n-1$, tandis que celles de b seront les nombres pairs $2, 4, 6 \dots n$.

Ainsi, dans le cas des racines imaginaires, les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont constamment de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{(1)}{1+x} + \frac{(3)}{3+x} + \frac{(5)}{5+x} \dots + \frac{(n-1)}{n-1+x}, \\ \psi(x) &= \frac{(2)}{2+x} + \frac{(4)}{4+x} + \frac{(6)}{6+x} \dots + \frac{(n)}{n+x},\end{aligned}$$

de sorte qu'elles ont le même nombre de termes.

(68) Cela posé, si l'on fait $x = r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)$, on aura

$$\frac{A}{a+x} = \frac{A}{a+r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)} = \frac{A(a+r \cos \theta - \sqrt{-1} \cdot r \sin \theta)}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2},$$

et par conséquent

$$\int \frac{A}{a+x} = \int \frac{Aa}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} + r(\cos \theta - \sqrt{-1} \sin \theta) \int \frac{A}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2}.$$

De là on voit que l'équation $1 + \int \frac{A}{a+x} = \int \frac{B}{b+x}$ se partagera en deux autres, savoir,

$$\begin{aligned}(2) \quad 1 + \int \frac{Aa}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} &= \int \frac{Bb}{b^2 + 2br \cos \theta + r^2}, \\ \int \frac{A}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} &= \int \frac{B}{b^2 + 2br \cos \theta + r^2}.\end{aligned}$$

Dans le premier membre, a aura toutes les valeurs impaires $1, 3, 5, \dots, n-1$, et dans le second, b aura toutes les valeurs paires $2, 4, 6, \dots, n$.

Telles sont donc les deux équations qu'il faut résoudre pour trouver les valeurs de r et de θ qui appartiennent à chaque couple de racines imaginaires.

Le nombre r est toujours positif : quant au nombre $r \cos \theta$, il peut être positif ou négatif ; et à cet égard, on pourrait distinguer deux sortes de racines imaginaires, les unes positives lorsque la partie réelle $r \cos \theta$ est positive, les autres négatives lorsque cette partie est négative.

(69) Les équations précédentes peuvent être censées formées dans la supposition de $r \cos \theta$ positif. On pourrait en former de semblables dans la supposition de $r \cos \theta$ négatif. Pour cela il faudrait changer le signe de x dans l'équation proposée, et procéder de même, après ce

changement, pour réduire l'équation sous la forme $1 + \int \frac{A}{a+x} = \int \frac{B}{b+x}$; ensuite on ferait $x = r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)$, ce qui donnerait deux équations semblables aux équations (α), mais dont les coefficients seraient différents.

Ce qui semble nécessiter cette distinction, c'est que si on laissait les équations (α) sous la même forme lorsque $\cos \theta$ est négatif, la fonction $\int \frac{A}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2}$ ne serait plus une fonction omale de r . En effet, cette fonction étant différenciée par rapport à r , donnerait le coefficient différentiel

$$- \int \frac{2A(r + a \cos \theta)}{(a^2 + 2ar \cos \theta + r^2)^2},$$

lequel ne conserverait pas le même signe depuis $r=0$ jusqu'à $r=\infty$, contre la nature des fonctions omales.

Il faudra donc, pour la solution complète de l'équation proposée, considérer deux systèmes semblables au système (α), et dans chacun desquels $\cos \theta$ sera supposé positif.

(70) Soit maintenant $r \cos \theta = p$, $r^2 = q$, les deux équations à résoudre seront

$$1 + \int \frac{Aa}{a^2 + 2ap + q} = \int \frac{Bb}{b^2 + 2bp + q},$$

$$\int \frac{A}{a^2 + 2ap + q} = \int \frac{B}{b^2 + 2bp + q};$$

on peut même les représenter plus simplement par

$$(a') \quad \begin{cases} 1 + \int \frac{Aa}{a^2 + 2ap + q} = 0, \\ \int \frac{A}{a^2 + 2ap + q} = 0, \end{cases}$$

en convenant que A sera toujours positive pour toute valeur impaire $a = 1, 3, 5, \dots, n-1$, et négative pour toute valeur paire $a = 2, 4, 6, \dots, n$.

Ces équations sont d'une forme assez simple; cependant comme elles contiennent deux inconnues p et q , il ne paraît pas qu'on puisse les résoudre par une méthode analogue à celles que nous avons données pour le cas des racines réelles, qui n'offre qu'une inconnue.

Si donc on veut éviter les longueurs de l'élimination, par laquelle on pourrait réduire les deux inconnues à une seule, il faudra se borner à résoudre ces équations par une sorte de tâtonnement, en ne supposant autre chose, sinon que q ou r^2 est compris entre des limites données, et qu'on a toujours $p < \sqrt{q}$.

On pourrait ne trouver aucune solution pour les équations précédentes qui représentent le système (α); mais alors les deux équations semblables qui représentent l'autre système, dans la supposition que les racines imaginaires, c'est-à-dire leurs parties réelles, sont négatives, contiendraient nécessairement toutes les n racines imaginaires de l'équation proposée; de sorte que si la résolution ne réussissait pas dans un cas, elle réussira nécessairement dans l'autre.

On peut même ne point changer la forme des équations précédentes, et se contenter de changer le signe de p , ce qui reviendra au second système. En effet, la dernière forme (α'), sous laquelle nous avons mis les équations à résoudre, en employant les inconnues p et q au lieu de r et θ , n'a plus l'inconvénient remarqué dans l'art. 69, et les quatre fonctions

$$\int \frac{Aa}{a^2 - 2ap + q}, \quad \int \frac{A}{a^2 - 2ap + q}, \quad \int \frac{Bb}{b^2 - 2bp + q}, \quad \int \frac{B}{b^2 - 2bp + q},$$

considérées tant par rapport à p que par rapport à q , sont toujours des fonctions omales, puisque p doit toujours être renfermé entre les limites $p = 0$, $p = \sqrt{q}$.

(71) Supposons qu'après quelques essais on a trouvé des valeurs de p et q qui approchent de satisfaire aux équations (α'). Soient ces valeurs $p = f$, $q = g$, et supposons qu'elles donnent

$$1 + \int \frac{Aa}{a^2 + 2af + g} = \mu,$$

$$\int \frac{A}{a^2 + 2af + g} = \nu,$$

μ et ν étant des quantités assez petites. Pour avoir des valeurs plus approchées on fera $p = f + \delta f$, $q = g + \delta g$, et on aura pour déterminer δf et δg , les équations

$$2\delta f \int \frac{Aa^2}{(a^2 + 2af + g)^2} + \delta g \int \frac{Aa}{(a^2 + 2af + g)^2} = -\mu,$$

$$2\delta f \int \frac{Aa}{(a^2 + 2af + g)^2} + \delta g \int \frac{A}{(a^2 + 2af + g)^2} = -\nu.$$

Soit, pour abréger,

$$F = \int \frac{A}{(a^2 + 2af + g)^2},$$

$$G = \int \frac{Aa}{(a^2 + 2af + g)^2},$$

$$H = \int \frac{Aa^2}{(a^2 + 2af + g)^2},$$

on aura

$$2H\delta f + G\delta g = -\mu,$$

$$2G\delta f + F\delta g = -\nu,$$

d'où l'on tire

$$\delta f = \frac{1}{2} \cdot \frac{F\mu - G\nu}{G^2 - FH}, \quad \delta g = \frac{H\nu - G\mu}{G^2 - FH}.$$

Ainsi les valeurs corrigées de p et q sont

$$p = f + \frac{1}{2} \cdot \frac{F\mu - G\nu}{G^2 - FH},$$

$$q = g + \frac{H\nu - G\mu}{G^2 - FH}.$$

Il faut observer, à l'égard des quantités F, G, H , qu'on a

$$Fg + 2Gf + H = \int \frac{A}{a^2 + 2af + g} = \nu,$$

faisant donc $H = -gF - 2fG + \nu$, et négligeant les termes qui contiendraient deux dimensions des quantités μ et ν , on aura

$$p = f + \frac{1}{2} \cdot \frac{F\mu - G\nu}{G^2 + 2fFG + gF^2}.$$

$$q = g - \left(\frac{G\mu + (gF + 2fG)\nu}{G^2 + 2fFG + gF^2} \right).$$

Ces valeurs serviront à leur tour à en faire connaître de plus approchées, s'il est nécessaire.

(72) Appelons de nouveau f et g les valeurs corrigées de p et q ; on en déduira les deux racines imaginaires $x = f \pm \sqrt{(f^2 - g)}$. Pour avoir ensuite les autres racines de la même équation, il faut former l'équation qui les contient.

Soient $x = r'$, $x = r''$ les deux racines qu'on vient de déterminer, il faudra dans l'équation proposée $1 + \frac{A}{a+x} = 0$, remplacer le coeffi-

cient A par un nouveau coefficient

$$A_2 = \frac{(n-a)(n-1-a)}{(a+r')(a+r'')} A.$$

C'est en effet la conséquence qui résulte des formules de l'article 61; et comme on a $(a+r')(a+r'') = a^2 + 2af + g$, la valeur de A_2 sera

$$A_2 = \frac{(n-a)(n-a-1)}{a^2 + 2af + g} A.$$

Cela posé, la nouvelle équation du degré $n-2$ à résoudre sera

$$1 + \int \frac{A_2}{a+x} = 0;$$

et par la substitution $x = p \pm \sqrt{(p^2 - q)}$, cette équation se partage en deux autres, savoir,

$$1 + \int \frac{A_2 a}{a^2 + 2ap + q} = 0,$$

$$\int \frac{A_2}{a^2 + 2ap + q} = 0.$$

Ces équations sont entièrement semblables à celles de l'art. 70, mais elles contiennent chacune deux termes de moins, puisque les valeurs de A_2 qui répondent aux valeurs $a = n$, $a = n-1$, sont nulles. Ainsi la dernière des valeurs de a sera $n-2$, parce qu'en effet l'équation à résoudre n'est que du degré $n-2$.

(73) Au moyen de cette analyse, on forme avec beaucoup de facilité les diverses équations qui restent successivement à résoudre, à mesure qu'on trouve deux des racines imaginaires de l'équation proposée. Le procédé pour passer d'un système au suivant, consiste à supprimer deux termes dans chacune des deux équations du système, et à modifier les coefficients des autres termes suivant une loi constante. Ce procédé donne immédiatement le résultat qu'on obtiendrait en divisant l'équation proposée par le facteur correspondant aux deux racines trouvées, et mettant ensuite le quotient sous la forme qui convient à notre méthode.

Lorsque les opérations nécessaires pour obtenir les racines réelles sont terminées, et qu'il ne reste plus à résoudre qu'une équation de degré pair dont toutes les racines sont imaginaires, on est assuré

d'avance que la résolution est possible. Si donc la recherche qu'elle occasionne devient longue par les tâtonnemens qu'on ne peut guère éviter, au moins elle ne sera jamais infructueuse. D'ailleurs à mesure que les opérations avancent, elles se simplifient progressivement par la diminution du nombre des termes qui devient successivement $n-2$, $n-4$, $n-6$; etc., comme le degré de l'équation; et lorsqu'on est parvenu à une transformée du quatrième degré, la solution peut être achevée sans tâtonnement.

(74) La méthode que nous venons de développer est encore fort imparfaite; mais elle a quelques avantages particuliers qu'elle doit à la simplicité et à l'élégance des formules. Le plus considérable de ces avantages consiste en ce que, si l'on substitue différentes valeurs pour p ou q , afin d'en trouver qui satisfassent aux équations, la substitution se fait dans chaque dénominateur $a^2 + 2ap + q$, sans exiger aucune opération complexe.

Il n'en est pas de même lorsqu'en faisant $x = r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)$, on a à substituer une nouvelle valeur de r ou une de θ , dans les équations dont ces inconnues dépendent, pag. 150. Ces substitutions exigent des opérations compliquées, surtout pour avoir les sinus et cosinus des multiples de θ : ce premier avantage est déjà très-grand.

Il y en a un second qui n'est pas moins remarquable. Il consiste en ce que les deux équations à vérifier se forment simultanément d'une manière très-simple. En effet, si en attribuant des valeurs particulières à p et q , on trouve chaque terme $\frac{Aa}{a^2 + 2ap + q} = \pm F(a)$, savoir, $+F(a)$ si a est impair, et $-F(a)$ si a est pair, la première des deux équations (α') étant ainsi formée,

$$\left. \begin{aligned} 1 + F(1) + F(3) + F(5) \dots + F(n-1) \\ - F(2) - F(4) - F(6) \dots - F(n) \end{aligned} \right\} = 0,$$

on en déduit immédiatement la seconde qui est

$$\left. \begin{aligned} F(1) + \frac{1}{3} F(3) + \frac{1}{5} F(5) \dots + \frac{1}{n-1} F(n-1) \\ - \frac{1}{2} F(2) - \frac{1}{4} F(4) - \frac{1}{6} F(6) \dots - \frac{1}{n} F(n) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Il devient donc très-facile de vérifier les deux équations à la fois.

(75) Nous croyons avoir expliqué les méthodes précédentes avec assez de détails, pour qu'il soit superflu de produire des exemples de leur usage. Nous ferons seulement une observation générale qui pourra être utile dans les applications; c'est que si la grandeur des coefficients de l'équation proposée, ou le calcul de la limite supérieure des racines, indique que ces racines doivent être de grands nombres, il conviendra de les réduire à une grandeur médiocre, en faisant $x = my$, m étant 10, 100, ou tel autre nombre qu'on voudra, au moyen duquel les valeurs de y ne puissent contenir que des unités ou des dizaines au plus. De même si les coefficients de l'équation proposée étaient tellement petits qu'on dût en conclure que les racines sont beaucoup plus petites que l'unité, il faudrait faire $x = \frac{y}{m}$, et prendre m de manière que la plus grande valeur de y pût aller jusqu'à un ou deux chiffres en nombres entiers. La transformation est utile dans le second cas surtout, pour éviter que les racines ne soient rapprochées dans un trop petit espace, et qu'on n'en omette quelqu'une dans les approximations successives.

(76) Nous terminerons ces Recherches par une remarque nécessaire pour compléter la résolution de l'équation omale $c = \phi(x)$, donnée dans les art. 58 et suiv.

On a supposé tacitement, dans ces articles, que la courbe décrite d'après l'équation $y = \phi(x)$, était toute concave ou toute convexe vers l'axe, dans la partie soumise au calcul, savoir, depuis $x = 0$ ou $x = k$, jusqu'à $x = r$, r étant l'abscisse du point d'intersection M . Cette propriété en vertu de laquelle la suite k, k', k'' , etc. est continuellement croissante vers la limite cherchée r , a lieu dans une infinité de fonctions omales, et notamment dans toutes celles dont on fait usage dans notre seconde méthode. Mais en général la définition des fonctions omales n'exige qu'une seule condition, savoir, que le coefficient différentiel $\frac{d\phi(x)}{dx}$ conserve le même signe dans toute l'étendue des x positives. Il peut donc arriver que le coefficient du second ordre $\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}$ change une ou plusieurs fois de signe dans la même étendue, et alors la courbe $y = \phi(x)$ éprouvera une ou plusieurs inflexions ou changemens de courbure. Supposons, par exemple, qu'un changement

de cette sorte ait lieu entre les deux points k' et k'' , ce qu'on reconnaîtra par les deux différences $\phi(k') - c$ et $\phi(k'') - c$ qui devront être de signes différens; si on continue les calculs d'après les formules des art. 38 et 40, afin d'obtenir la valeur du terme suivant k''' , on trouvera $k''' < k''$, de sorte que la suite k, k', k'', k''' cesse d'être croissante après le terme k'' .

Cependant si l'on a en même tems $k'' > k'$, on pourra continuer le calcul des termes suivans par les mêmes formules, et on arrivera également au résultat, qui est la limite des termes k'', k''', k^{iv} , etc.

Mais il pourrait arriver qu'on eût $k''' < k'$, et alors en continuant le calcul par les mêmes formules, on s'éloignerait de plus en plus du vrai résultat que l'on cherche. Pour obvier à cet inconvénient, le moyen le plus simple est de joindre les deux points k', k'' par une droite qui coupera la droite CM en un point dont il est facile de déterminer la position. Soit k'' l'abscisse de ce point, on aura

$$k''' = k' + \frac{c - \phi(k')}{\phi(k'') - \phi(k')} (k'' - k'),$$

et k''' sera une valeur très-approchée de la racine r . On continuera ensuite par les formules ordinaires, le calcul des termes suivans k^{iv}, k^v , etc., et la limite de cette suite sera la racine cherchée.

En général les exceptions dont nous venons de parler ne se rencontrent que dans des cas où la résolution se simplifie d'elle-même, puisque sachant que la racine cherchée doit être comprise entre k' et k'' , il est facile ensuite de resserrer ces limites à volonté.

Addition au § VIII, IV^e Partie, page 394.

JE dois ici faire mention de deux ouvrages très-importans pour la science des nombres, qui ont paru depuis la publication du Traité précédent (*).

M. Chernac, professeur de Philosophie à Deventer, a publié en 1811, sous le titre de *Cribrum Arithmeticum*, une Table où l'on trouve tous les nombres premiers et les diviseurs des autres nombres, depuis 1 jusqu'à un million et plus.

M. Burckhardt s'est proposé ensuite de reculer beaucoup plus loin les limites de cette Table. Il a créé pour cet objet une méthode si simple et si facile, qu'elle lui a fourni en très-peu de tems, une Table contenant le moindre diviseur de tout nombre compris dans le second million. Cette Table a été publiée en 1814.

M. Burckhardt s'est occupé aussitôt d'en dresser une semblable pour le troisième million et même pour le quatrième. La Table construite pour le troisième million est déjà imprimée et ne tardera pas à paraître. Mais avant d'aller plus loin, l'auteur se propose de donner le premier million dans la même forme que les autres, afin de compléter, sous le moindre volume possible, une suite de Tables qui pourra avoir beaucoup d'usages, et qui sera recherchée surtout par les amateurs de l'analyse indéterminée.

La Table de Chernac m'a mis à portée de vérifier les calculs que j'avais faits *à priori*, pour savoir combien il y a de nombres premiers de 1 à 1000000. La théorie m'avait donné 78527, à quelques unités près dont je ne pouvais répondre; la formule de l'art. 389 donnait 78543; l'énu-

> 78493

Δ

34

50

(*) *Cribrum Arithmeticum, sive Tabula continens numeros primos, etc., confecit Ladislaus Chernac; Daventriæ 1811.*

Table des diviseurs pour tous les nombres de 1020000 à 2028000; par J.-Ch. Burckhardt; Paris 1814, chez M^{me} V^e COURCIER, quai des Augustins.

mération faite immédiatement d'après le *Cribrum arithmeticum*, a produit 78493 : mais il est possible et même vraisemblable qu'il se soit glissé, dans une si longue énumération, une erreur au moins égale à la différence qu'on trouve entre ce résultat et celui de la formule. Tout ce qu'on doit conclure de là, c'est que la formule a toute l'exactitude nécessaire, et que les différens résultats s'accordent entr'eux beaucoup mieux qu'on n'aurait dû le croire. La Table ultérieure de M. Burckhardt fournira de semblables vérifications dont le succès ne paraît pas douteux, soit pour confirmer l'exactitude de la formule, soit pour lui ajouter un nouveau degré de perfection.

Au reste l'énumération faite dans la Table de Chernac a donné pour chaque centaine de mille, les résultats contenus dans le tableau suivant qui servira de continuation à celui du n° 389, et où l'on remarquera de même l'étonnante conformité qu'il y a entre le résultat de la formule et celui que donnent les Tables.

Limite x .	Nombre y	
	par la formule.	par les Tables.
400000	33854	33863
500000	41533	41538
600000	49096	49093
700000	56565	56535
800000	63955	63937
900000	71279	71268
1000000	78543	78493

FIN DU SUPPLÉMENT.

De l'Imprimerie de M^{me} V^e COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

$\frac{24.2 dr}{2}$

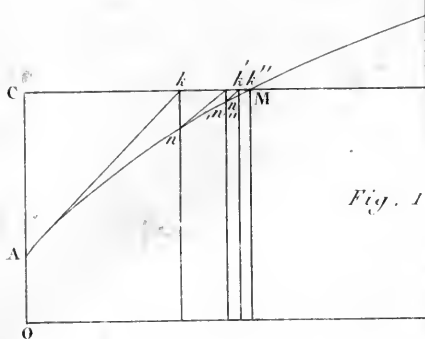


Fig. 3.

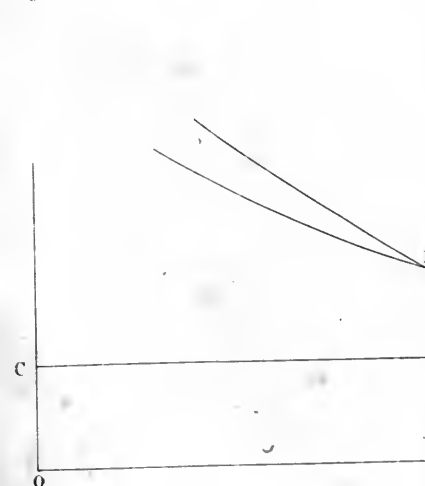
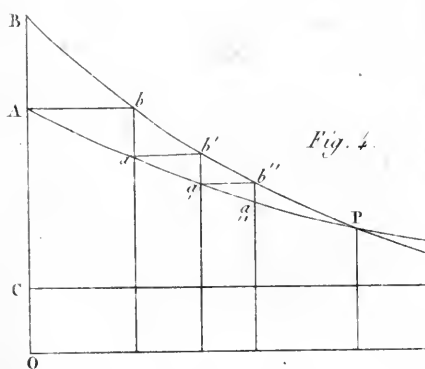
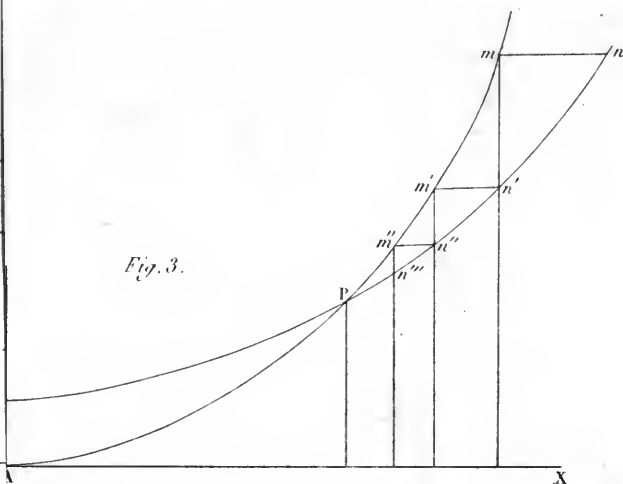
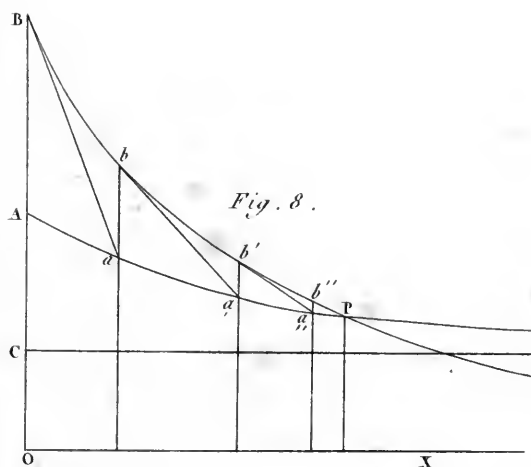


Fig. 8.




11.454. Let $t^2 = e^u$, $t = e^{\frac{u}{2}}$, $dt = e^{\frac{u}{2}} \frac{du}{2}$, $\int \sqrt{e^{-t^2}} dt = \int e^{-\frac{u}{2}} e^{\frac{u}{2}} \frac{du}{2}$

$$= \int e^{-e^u} e^u du, \text{ as } u = t^2.$$

$$= \int e^u du \left(1 - e^{2u} + \frac{e^{4u}}{1.2} - \frac{e^{6u}}{1.2.3} \dots \right) = 0 + e^u - \frac{e^{3u}}{3} + \frac{e^{5u}}{1.2.5} - \frac{e^{7u}}{1.2.3.5} + \dots$$

2

TO  100 Evans Hall 642-3381

2

3

1 MONTH

4

5

6

DUE AS STAMPED BELOW

JUL 20 1967

UC-ATLANTA

UNIV. OF CALIF., BERK.

~~NON-CIRCULATING~~

~~SEP 30 1991~~

FORM NO. DD3, 1/83

®

U.C. BERKELEY LIBRARIES



C037507024

QA311
L4
v.3

MATH.-
STAT.
LIBRARY

-233

